

飞机非线性
分析

刘

南京航

198

飞机非线性动态特性分析基础

目 录

前 言	1
第一章 非线性系统特性	
§ 1—1 非线性系统的数学模型	3
§ 1—2 典型的非线性特性	5
§ 1—3 非线性系统的特殊现象	8
第二章 相平面法	
§ 2—1 相平面概念	13
§ 2—2 相轨迹的确定方法	16
§ 2—3 相轨迹特性	23
第三章 平均法	
§ 3—1 确定极限环的能量平均法	33
§ 3—2 估算振幅和频率	35
§ 3—3 缓慢变化的振幅：近周期性解	39
§ 3—4 周期性解：谐波平衡法	42
§ 3—5 按谐波平衡法求等价线性化方程	44
第四章 摄动法	
§ 4—1 方法要点	48
§ 4—2 远离共振的强迫振动	50
§ 4—3 邻近共振的强迫振动	52
§ 4—4 摆的无阻尼振幅方程	55
§ 4—5 摆的有阻尼振幅方程	59

§ 4—6	软弹簧和硬弹簧	6 0
§ 4—7	自主方程的周期性解	6 2
§ 4—8	自激方程的强迫振动	6 4

第五章 描述函数法

§ 5—1	描述函数概念	6 8
§ 5—2	典型非线性特性的描述函数的计算	7 1
§ 5—3	用描述函数法分析非线性系统	8 0
§ 5—4	多个非线性的描述函数法	9 4
§ 5—5	不对称振荡时的描述函数	9 6

第六章 李雅普诺夫稳定性概念

§ 6—1	李雅普诺夫意义下的稳定性定义	9
§ 6—2	按一次近似判断稳定性	1 0 2
§ 6—3	李雅普诺夫直接法	1 0 4

第七章 大迎角时飞机稳定性和操纵性

§ 7—1	大迎角时空气动力特性	1 1 3
§ 7—2	大迎角时飞机纵向运动	1 2 0
§ 7—3	非零侧滑角时稳定性分析	1 2 6

第八章 飞机极限环振荡

§ 8—1	飞机松杆运动时极限环	1 3 5
§ 8—2	操纵系统和自动器非线性引起飞机运动极限环	1 4 0
§ 8—3	空气动力非线性引起飞机运动极限环	1 5 2
§ 8—4	地面试验和飞行试验确定飞机极限环	1 7 1
§ 8—5	飞机极限环振荡要求	1 7 6

第九章 飞机滚转耦合中的稳定性和操纵性

§ 9-1 飞机滚转机动飞行时的基本运动方程 180

§ 9-2 飞机滚转机动稳定性 182

§ 9-3 飞机滚转机动运动方程稳态解 187

§ 9-4 飞机滚转机动运动过渡过程的确定 190

§ 9-5 非线性空气动力引起飞机滚转机动发散现象 194

§ 9-6 用准稳态方法预测飞机滚转耦合中的跳跃现象
..... 198

§ 9-7 用BACTM法预测飞机滚转耦合中的跳跃现象
..... 205

参考文献 220

前 言

在研究飞机动态特性时，将飞机作为一个线性系统来处理，可以获得许多有效的结果。但是众所周知，严格的线性系统是不存在的，飞机的基本动力学方程的惯性项和运动学变量是非线性的。外力、特别是空气动力，可能包含有固有的非线性。现代飞机中广泛使用的自动器和助力操纵系统中，通常出现有摩擦、饱和、间隙、不灵敏区

及其他的非线性控制因素。最后，在大多数飞行操纵情况下还实际存在着人工的操纵，也包含有非线性的控制作用。这些非线性的因素可以显著地改变飞机的动态特性，影响飞机的飞行品质。

非线性系统的研究与线性系统有很大的区别。它不像线性系统那样有一般性的有效的求解方法。早在1892年李雅普诺夫就提出了判别稳定性的直接法，它是研究非线性运动稳定性的重要理论基础。随着喷气式飞机的出现，以及自动控制系统在飞机上的应用，李雅普诺夫的稳定性理论有了很大的发展。很多人在这方面做了大量的研究工作。到目前为止，除了古典的李雅普诺夫法以外，还先后发展了相平面法、平均法、摄动法、描述函数法、摄动法等一系列近似研究方法。其中描述函数法，虽然是一种近似方法，但从工程计算的角度来看，却是分析非线性系统的一种极为方便而有效的方法。随着高速电子计算机的采用和推广，使复杂的高阶非线性微分方程求解已不成问题，通过计算机所得到的结果可能是从其他理论分析方法得不到的，这就为非线性系统的研究提供了有力的工具。但是，计算机给出的只是特解，而不能给出有关全部解的性质，不能给出系统变化的工作机理和显明的物理概念，从而代替不了各种近似理论研究方法。需要指出的是，在飞机系统的非线性动态特性分析中，除采用上述方法外，

通过地面模拟试验和飞行试验方法可能取得更好的结果，因此也是当前采用的较为普遍的必不可少的方法。

本课程是空气动力学专业的选修课程，考虑到听课者已学过“自动控制原理”中的线性部份和“飞机稳定性和操纵性”课程，因此，本课程中如涉及上述内容，只作简单提示，不再重述。

由于非线性内容的复杂性，很多问题的处理还有待于进一步的研究和发展，因此，本课程的内容着重于介绍有关基本概念及各种近似处理方法，并尽可能介绍在这个领域中最近一个时期已取得的一些进展。全课程共九章，第一章介绍非线性系统特性的一些基本概念，第二章到第六章介绍研究非线性系统的几种理论分析方法，最后三章则介绍飞机大迎角和非线性情况时出现的各种现象及其动态特性的理论分析和实验研究方法。

第一章 非线性系统特性

§ 1—1 非线性系统的数学模型

如果系统中包含一个或一个以上的环节具有非线性特性时，这种动态系统就称为非线性动态系统，或简称非线性系统。由质量 m 、弹簧和阻尼器构成的简单的振动系统，就是一个非线性系统，如图1—1所示。图1—2表示了弹簧力的非线性特性（图中反对称特性没有画出）。弹簧力 $K(x)$ 仅是弹簧位移 x 的函数。如果弹簧产生单位伸长

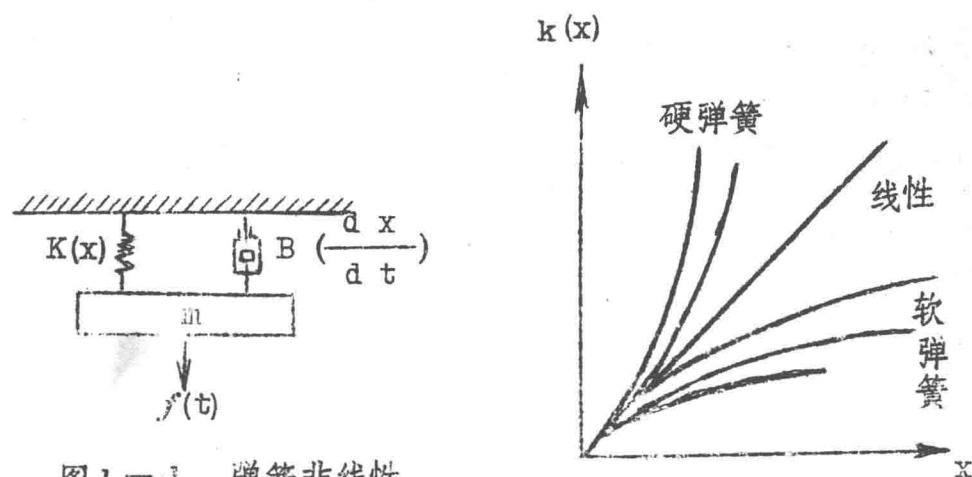


图 1—1 弹簧非线性

振动系统 图 1—2 弹簧力非线性特性

所需的张力增量随伸长程度增大而减小，这弹簧就愈柔软，这种特性常称为“软弹簧”特性。与此相反，弹簧产生单位伸长所需的张力增量随伸长程度增大而增加时，就常称为“硬弹簧”特性。

阻尼力的非线性特性表示在图1—3上。由于阻尼器的外壁和活塞接触就产生了静止摩擦，只要物体一开始运动，这个力就马上急剧地下降。开始运动时的摩擦叫库伦摩擦（或叫干摩擦），它与速度无关，保持为常值，而作用方向与运动方向相反。考虑到阻尼力还包括与速度成正比的粘性摩擦和与速度平方成正比的平方摩擦，合成的阻

尼力的非线性特性如图 1—3 所示。因为每一种摩擦力都仅仅是速度的函数，所以合成阻尼力可表示为 $B \left(\frac{dx}{dt} \right)$ 。

考虑到作用于质量 m 上的全部力，其运动可用下面的非线性微分方程表示。

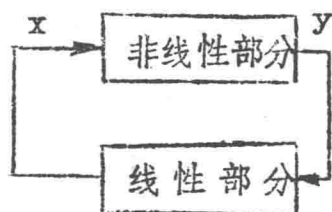
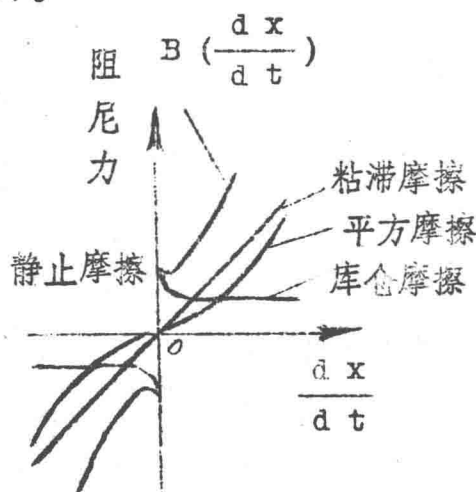


图 1—4 非线性系统
方块图

图 1—3 阻尼力的非线性特性

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + B \left(\frac{dx}{dt} \right) + K(x) = f(t) \quad (1-1)$$

对于一般非线性系统，系统可能由多个环节构成，则需用更高阶的非线性微分方程来表示，这些微分方程就可作为非线性系统的数学模型。

非线性系统数学模型的另一种形式是用方块图来表示，如图 1—4 所示。这里线性部分是各个线性环节的总称，其中包括反馈部分。由于在大多数情况下，关心的是各方块的输入和输出的关系，所以不必用微分方程来表示，只需把系统的线性部分用传递函数或脉冲响应来表示，而非线性部分可用第五章中将要介绍的描述函数法求出的非线性增益或描述函数来表示。

§1-2 典型的非线性特性

实际系统中遇到的非线性是各式各样的，但是它们的特性大致可以归纳成两大类：一类是单值非线性特性，其输出与输入是单一对应的关系；另一类是非单值非线性特性，对应于同一输入的输出量在一个以上。

实际系统中的非线性特性的形状也是比较复杂的，我们在分析时将它们典型化，即用简单的折线代替复杂的非线性曲线。经常遇到的典型非线性有以下几种。

一、不灵敏区特性

许多敏感元件的测量精度都是有限的，由于存在摩擦与工艺缺陷等原因，敏感元件对于一定范围内的输入量感受不到。同样，执行机构也有类似的情况，并不是一有输入信号执行机构就马上动作，而是需要输入信号大到一定的程度以后执行机构才开始动作。这种只有当输入量超过一定值以后才有输出的特性，如图1-5所示，称之为不灵敏区特性。其中 $-e < x < +e$ 的区域叫做不灵敏区或死区。

二、饱和特性

任何实际放大器，它们的输出量与输入量之间的线性关系都是有

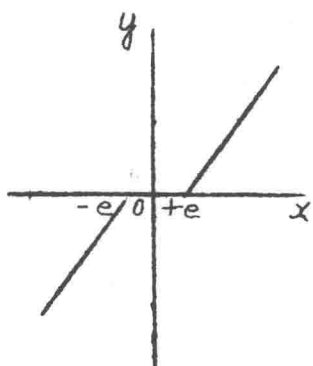


图1-5 不灵敏区特性

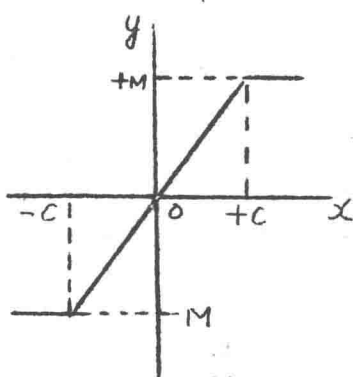


图1-6 饱和特性

一定范围的，超过这个范围输出量便保持一个常值。同样，许多元件的运动范围、运动速度由于受到能源功率等条件的限制，也都具有饱和特性。饱和特性如图 1-6 所示，其中 $-c < x < +c$ 的区域叫做线性范围，线性范围之外叫做饱和区。

三 有不灵敏区的饱和特性

在很多情况下，不灵敏区和饱和特性是同时出现的，如图 1-7 所示。

四 理想继电器特性

若增大饱和特性的线性段斜率，线性段变窄，极限情况下，成为理想继电器特性，如图 1-8 所示，其输出与输入的关系是：

$$y = \begin{cases} M \operatorname{sign} x & \text{当 } x \neq 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

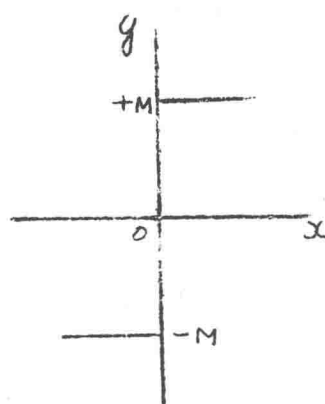
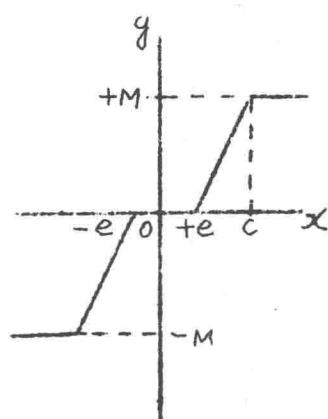


图 1-7 有不灵敏区的饱和特性

图 1-8 理想继电器特性

五 有不灵敏区的继电器特性

图 1-9 所示继电器特性称为具有不灵敏区继电器特性，当不灵敏区趋于零时，就是理想继电器特性。

以上几种都是属于单值非线性特性，下面列举的是非单值非线性特性。

六 有滞环的继电器特性

实际继电器的继电器特性一般带有滞环，如图 1-10(a) 所示。

图 1-10(b) 为有死区和滞环的继电器特性。

七 间隙特性

凡是有机传动地方，一般总有间隙存在。当输入量的变化还在间隙内时，输出量就会保持不变。这种特性如图 1-11 所示。

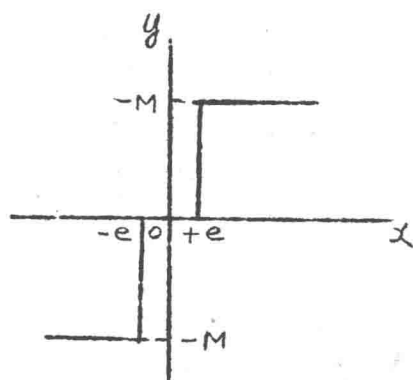


图 1-9 有不灵敏区的继电器特性

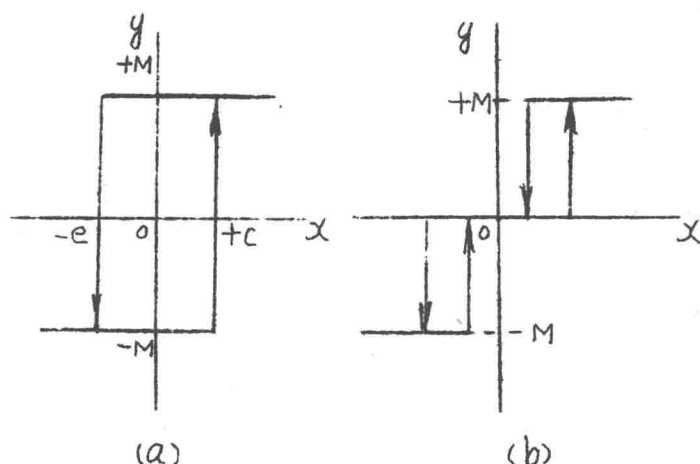


图 1-10 有滞环的继电器特性

八 磁滞特性

磁滞特性如图 1-12 所示。由于磁路特性的影响，输出量与输入量的关系不是单值对应的，而是呈现磁滞回线的形状。

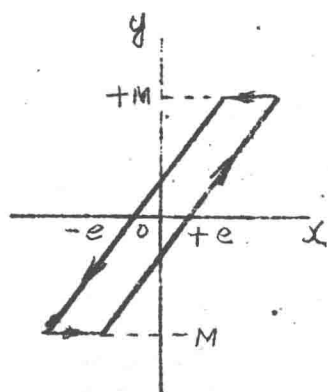


图 1—1 1 间隙特性

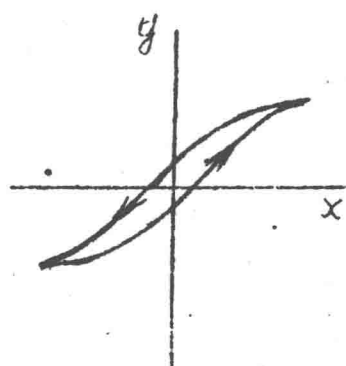


图 1—1 2 磁滞特性

§ 1—3 非线性系统的特殊现象

如果系统中存在非线性元件就会给系统的动力学特性带来一定的影响，出现一些特殊现象，这些特殊现象往往不能用线性系统的理论加以解释。下面简单地介绍这些现象。

一、叠加原理被破坏

线性系统研究中的一个很大特点是描述系统动态特性的线性微分方程满足叠加原理，例如考虑如下的一个最简单的系统

$y = Kx$ 如果输入量 x 由两个作用组成，即

$$x = x_1 + x_2$$

则我们有

$$y = kx = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2$$

上式说明系统对于总的的作用等于单个作用的总和。

但在非线性系统中，这种关系不再成立。例如对于图 1—6 所示的饱和非线性，在 x_1 、 x_2 单独作用时，都可以在线性范围内，两者相加作用，便有可能超出线性范围，这样所得的结果显然就不等于

x_1 、 x_2 单独作用的总和，于是叠加原理遭到破坏。

三 极限环振荡（自振荡）现象

在非线性系统中，虽然没有受到外界周期性的振荡作用，但有时也会出现一种具有一定频率的不衰减的等幅振荡，称之为极限环振荡或叫做自振荡。例如，二阶非线性微分方程

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0 \quad (1-2)$$

是有名的范德波（Van der Pol）方程，描述一个具有非线性阻尼项 $\varepsilon (x^2 - 1) \dot{x}$ 的非线性系统。若 ε 为正数，当在干扰作用下引起的 x 值很小时，系统具有负阻尼，这意味着系统具有随时间增长而发散的的运动形式，而当 x 值较大时，系统具有正阻尼，因而系统具有随时间增长而收敛的运动形式。这样，由于非线性阻尼随 x 值而变，实际系统既不可能无限衰减，也不可能无限发散，最终必然会出现一个持续振荡运动，如图 1-13 所示。

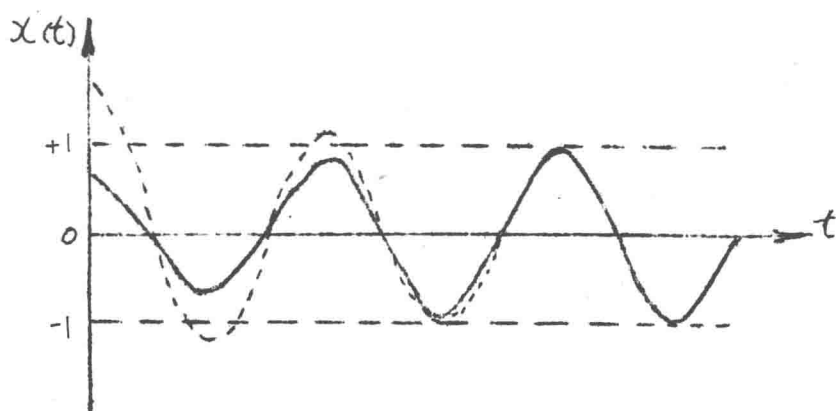


图 1-13 极限环振荡

三 稳定性与外界作用和初始条件有关

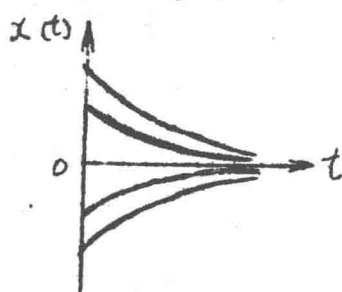
在线性系统中，系统的稳定性只与系统的结构参数或系统特征方程的根有关而与外界作用及初始条件无关，但在非线性系统中，系统

的稳定性则与外界作用及初始条件有关。现比较一阶线性微分方程 $\dot{x} = -x$ 和一阶非线性微分方程 $\dot{x} = -x + x^2$ 的解，设初始条件都是 $x(0) = x_0$ 。

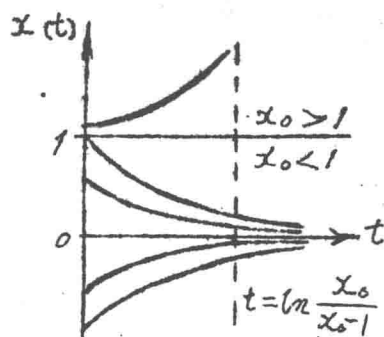
求解。

显然，线性微分方程的特征根是 -1 ，因此它的解为 $x = x_0 \cdot e^{-t}$ 。
非线性微分方程的解为

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}} e^{-t}$$



(a) $\dot{x} = -x$



(b) $\dot{x} = -x + x^2$

图 1-14 线性系统与非线性系统的比较

在图 1-14 上表示了不同 x_0 值时，与上述解相对应的时间曲线。

由图可见，线性系统的平衡位置只有一个即 $x = 0$ ，这表明不论初始条件 x_0 如何，随着时间的增长，系统都以指数规律收敛到零；但对于非线性系统，当 $x_0 > 1$ 时，系统经过有限时间便发散到无限大。

此外，在公式 (1-2) 中也可以看到：若 ε 为负数，对于较小的 x 值，非线性阻尼项为正，系统将随时间增长而衰减到零；对于较大的 x 值，非线性阻尼项为负，系统具有随时间增长而发散的~~运动形式~~，见图 1-15。这个现象表明，该非线性系统在小干扰作用下是稳定的，而在大干扰作用下是不稳定的。

四 频率与振幅的依赖性

若图 1-1 所示弹簧自由振动系统，只考虑粘性摩擦时可近似用下列微分方程来描述

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + c x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (1-3)$$

式中 $(c x + \varepsilon x^3)$ 和 μ 为单位质量非线性弹簧力和粘性阻尼系数, μ 和 c 均为正的常数, 而 ε 可为正, 也可为负。如果 ε 是正值, 如前所述, 就称为硬弹簧, ε 是负值, 则称为软弹簧, 系统非线性的程度用 ε 的大小来表示。非线性微分方程 (1-3) 就是通常所说的杜芬 (Duffing) 方程。如果系统受到一个非零的初始条件作用, 它的解代表一个阻尼振荡。在实验研究中观察到: 当振幅减小时, 自由振荡的频率是减小还是增加, 取决于 ε 值的正负号, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 随着自由振荡的振幅减小, 频率保持不变 (这相当于线性系统的情况), 如图 1-16 所示。

在非线性系统实验研究中, 频率与振幅的依赖性能够很容易地观察到。频率与振幅的依赖性是非线性系统振荡的最基本特性之一。

五 跳跃现象 (突变, 突跳)

所谓跳跃现象是在实践中

测量非线性系统的频率响应特性时发现的。若对图 1-1 所示系统进行强迫振荡实验时, 描述系统的微分方程近似为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + c x + \varepsilon x^3 = F \cos \omega t \quad (1-4)$$

式中 $F \cos \omega t$ 是外作用函数。使外作用函数的振幅 F 保持常数, 缓慢地改变其频率 ω , 并观察响应的振幅 x , 就可以得到与图 1-17(a) 和(b)类似的频率响应曲线。若 $\varepsilon > 0$, 从图 1-17(a) 曲线上频率 ω 低的点 1 开始, 当频率 ω 增加时, 振幅 x 也增加, 直到 2 为止。若 ω 继续增加时, 将引起从点 2 到点 3 的跳跃, 此现象称为跳跃现象。当

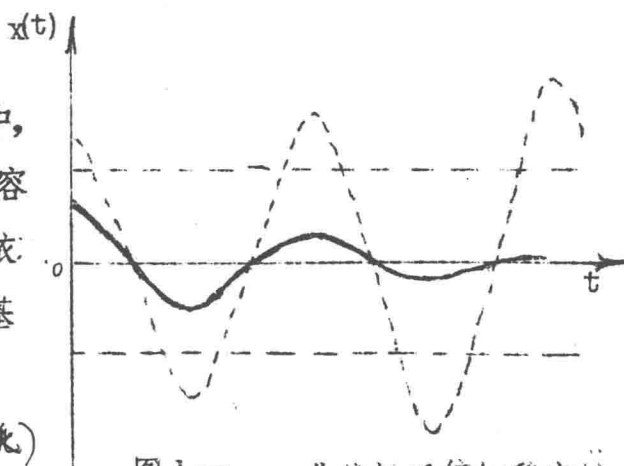


图 1-16 非线性系统的稳定性

频率 ω 再进一步增加, 振幅 x 沿着曲线从点3到点4。换一个方向来进行实验, 即从高频开始, 当 ω 减小时, 振幅通过点3逐渐增加, 直到点5为止, 当 ω 继续减小, 将引起从点5到点6的另一个跳跃, 最后趋向点1。可见, 响应曲线实际上是不连续的, 与点2和点5之间曲线对应的振荡是不稳定的振荡, 这部分在实验中是观察不到的。在具有软弹簧特性($\varepsilon < 0$)的系统中也发生类似的跳跃, 如图1-17(b)所示。

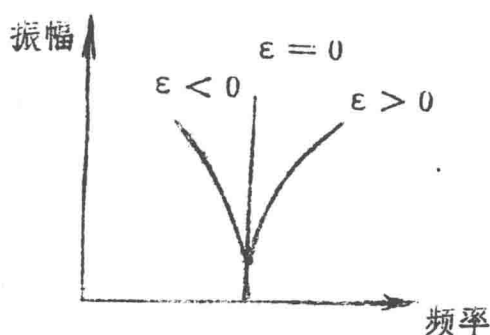


图1-16 振幅与频率的关系

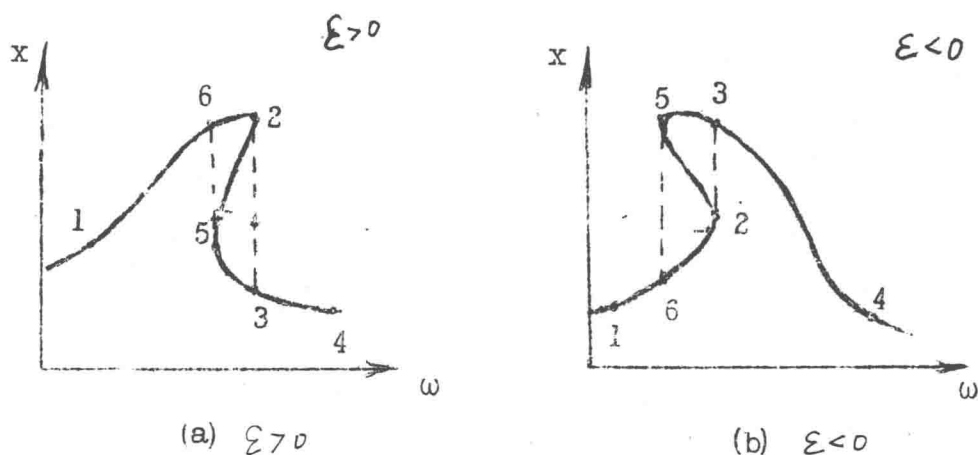


图1-17 发生跳跃现象的频率响应曲线

第二章 相平面法

相平面这一概念，能应用于线性系统，也能应用于非线性系统。然而，由于对线性系统已经有许多统一而方便的分析方法，所以通常把相平面法当作解决某些类型的非线性系统的有力工具。

§ 2-1 相平面概念

设一个二阶系统可以用下列常微分方程描述。

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

式中 $f(x, \dot{x})$ 是 x 和 $\dot{x}$ 的线性或非线性函数。该方程的时间解可以用 $x(t)$ 与 t 的关系来表示，也可以用时间 t 作为参变量，用 $\dot{x}(t)$ 与 $x(t)$ 的关系来表示。以 x 和 $\dot{x}$ 为直角坐标组成的平面称为相平面，系统的每一状态均相应于该平面上的一点 $(x, \dot{x})$ 。当 t 变化时，这一点在相平面 $x-\dot{x}$ 上描绘出的曲线，表示出了系统的过渡过程，这种曲线就叫做相轨迹。相平面连同其上的相轨迹称为相图。

用相轨迹这种几何方法表示系统的动态过程，叫做系统动态特性的相平面表示法。在相平面上可以全面地表示出系统中各种可能的运动特点，特别是可以清晰的提供各种非线性特性对系统动态特性的影响。虽然相平面法通常只适用于一阶和二阶系统，但在高阶非线性系统的分析设计中，可以从非线性因素对一阶和二阶系统的影响得到启示，并可用来检验其他的近似分析方法。

一 单摆线性化方程和相应的相图

摆锤质量 m 、摆长 l 的单摆，如图 2-1 所示，其运动方程为非线性常微分方程

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0 \quad (2-1)$$