普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学
学习指导和训练

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO HE XUNLIAN

张保才　陈庆辉　王永亮　范瑞琴　左大伟　编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学学习指导和训练

张保才　陈庆辉　王永亮　范瑞琴　左大伟　编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

《高等数学学习指导和训练》根据本科数学教学大纲及最新研究生考试数学一和数学二的基本内容与要求，由教学经验丰富的教师结合教学体会编写完成。全书共8章，主要讲解了微积分基础知识、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和常微分方程。每章内容包括基本要求、知识要点、典型例题和自测题；附录包括10套模拟试卷。

本书旨在帮助学生强化基本概念，扩大课程信息量，延伸运算与证明问题的处理技巧，增强数学科学能力的培养，为深入学习并参加考研的同学提供一本系统精练的复习指导书。

本书适合作为普通高等学校工科各专业的课程结业指导书，也可作为本科学生考研复习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导和训练/张保才等编. —北京：中国铁道出版社，2017.9
普通高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-113-23784-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第221815号

书　　名：高等数学学习指导和训练
作　　者：张保才　陈庆辉　王永亮　范瑞琴　左大伟　编

策　　划：李小军　　**读者热线：**(010)63550836
责任编辑：张文静　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：刘　颖
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2017年9月第1版　2017年9月第1次印刷
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　**印张：**17.75　**字数：**400千
书　　号：ISBN 978-7-113-23784-4
定　　价：36.00元

前　言

《高等数学学习指导和训练》是根据普通高等学校本科数学教学大纲以及最新研究生考试数学一和数学二的基本内容与要求，由教学经验丰富的教师结合教学体会编写完成的。其宗旨是使在校工科大学生能较快、较好地掌握“高等数学”这门课程，顺利地通过课程考试。本书能够帮助学生强化基本概念，扩大课程信息量，延伸运算与证明问题的处理技巧，增强数学思维能力，对想深入学习并参加考研的学生而言是一本系统精练的复习指导书。

本书每章的内容包括四部分：第一部分是根据本科和考研内容要求给出的基本要求；第二部分是课程的知识要点，它是对课程的重点、难点、要点的小结和补充，起着画龙点睛的作用；第三部分为典型例题，根据不同的知识点选出有较强概念、运算或证明价值的例题，通过对这些例题的学习，学生能够较快地掌握知识点，完成课程学习；第四部分为自测题，着重测试对本章基本概念、定理和方法的掌握情况，建议学习完本章内容后再使用。

另外，附录部分给出了模拟试卷，学生可从中分析出考试的形式和重点，从而顺利地通过课程考试。建议使用这10套模拟试卷时一定要计时(每套试卷时间120分钟)。建议使用自测题和模拟试卷时，不要边做题边对照答案，而是要等到答题结束再核对，这样才能充分利用这部分内容。

考虑到这是一本本科课程结业和考研复习两用的指导书，因此在内容上比本科教科书有所加深和拓展，书中带“*”号的内容对本科不作要求，但对准备考研的同学来说是简捷、必要的参考材料。

由于编者经验和水平所限，书中难免存在疏漏及不足，恳请读者批评指正。

编　者

2017年7月

目　录

第1章 微积分基础知识

1.1 基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质.

1.2 知识要点

1.2.1 集合、函数与初等函数

1. 集合

集合 具有某种特定性质的对象的总体.组成这个集合的对象称为该集合的元素.

区间 开区间$\{x|a<x<b\}\triangleq(a,b)$,闭区间$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\triangleq[a,b]$,$b-a$称为区间长度;无限区间$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

邻域 设a为任意实数,δ是一个正实数.称$U(a,\delta)\triangleq\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$为点$a$的$\delta$邻域.$U(a,\delta)$是到点$a$的距离小于$\delta$的所有点$x$的集合.点$a$的$\delta$去心邻域为$\mathring{U}(a,\delta)\triangleq\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

2. 函数的概念

函数 设$A,B\subset\mathbf{R}$是两个非空数集,若对于每个数$x\in A$,按照某个确定的法则f,有

唯一的数 $y\in B$ 与之相对应,则称 f 为 A 到 B 的函数,记为 $y=f(x)$,或 $y=y(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量. 当 x 取数值 $x_0\in A$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=y(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 A 的各个数值时,对应函数值的全体所构成的数集 $f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 称为函数的值域.

定义域的约定 在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在纯数学问题中,函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数.

单值函数与多值函数 根据映射或函数的定义,当自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.

注意 *以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.*

反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,值域为 J. 如果 $f:I\to J$ 是单射,则称逆映射 $f^{-1}:J\to I$ 为函数 f 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$. 如果仍用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,则函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

注意 *①函数 $y=f(x)$ 有反函数的充分必要条件为 f 是单射. ②单调函数(是单射)一定有反函数,但不是单调的函数也可能有反函数. 对于连续函数,只有单调函数才有反函数.*

复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,而 $\varphi(D_2)\subset D_1$,称 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

3. 函数的几种特性

(1)**函数的奇偶性** 若 $f(-x)=-f(x)(\forall x\in D)$,定义域 D 关于原点对称,则称 $f(x)$ 为奇函数. 若 $f(-x)=f(x)(\forall x\in D)$,定义域 D 关于原点对称,则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2)**函数的有界性** 函数 $f(x)$ 在集合 $X(X\subset f(A))$ 上有界是指集合 $f(X)$ 是有界集,即存在 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M(\forall x\in X)$. 如果 $f(X)$ 是无界集,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(3)**函数的周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 l,使得 $f(x+l)=f(x)(\forall x\in D)$,则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数.

(4)**函数的单调性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

4. 初等函数

以下 5 类函数称为**基本初等函数**:

(1)**幂函数** $y=x^{\mu}$(μ 是常数)称为幂函数. $\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 是最常见的几个幂函数.

(2)**指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 称为指数函数. $y=\mathrm{e}^x$ 是常用的指数函数,常用 $\exp(x)$ 来表示 e^x.

(3)**对数函数**　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$称为对数函数,它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. $y=\ln x(\ln x=\log_e x$,　$e=2.718\ 28\cdots)$是常用的对数函数.

(4)**三角函数**　正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$,所有这些函数统称为三角函数.

(5)**反三角函数**　反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.反三角函数是三角函数的反函数.

初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和(或)有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注意　由于分段函数一般不能用一个式子表示,所以分段函数一般不是初等函数.

5. 几个常见分段函数

(1)符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$　　(2)取整函数 $\operatorname{int}(x)$　　(3)狄利克雷函数 $D(x)$

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & 当\ x>0\\ 0 & 当\ x=0\\ -1 & 当\ x<0\end{cases};\quad \operatorname{int}(x)=[x];\quad D(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in\mathbf{Q}\\ 0 & 当\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases};$$

(4)函数连续和可导性问题常用反例函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & 当\ x\neq 0\\ 0 & 当\ x=0\end{cases},$$

通常取 $\alpha=0,1,2,3$ 四种情形.

1.2.2　数列的极限

1. 数列极限的定义

数列极限的**直观定义**　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$当 n 无限增大$(n\to\infty)$时,一般项 x_n 无限地趋于数 $a\ (x_n\to a)$.例如,当 $n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}\to 0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

数列极限的**严格定义**　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$对于任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立.

用数学符号描述为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N,\forall\,n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则称数列$\{x_n\}$**收敛**,且以 a 为极限;若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在,则称数列$\{x_n\}$**发散**.

2. 收敛数列的性质

唯一性　若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限是唯一的.

有界性　若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$是有界数列.

推论　若数列$\{x_n\}$无界,则$\{x_n\}$发散.

注意　有界数列不一定收敛,如$\{(-1)^n\}$有界,但它不收敛.

保号性 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$(或$a<0$),则存在$N$,使得当$n>N$时,有$x_n>0$(或$x_n<0$).

保序性 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,若存在$N$,当$n>N$时,$x_n\leqslant y_n$,则$a\leqslant b$.

注意 即使$x_n<y_n$,也不保证有$a<b$.例如$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$和$\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$.

3. 数列与子数列的敛散性关系

命题1 数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是$\{x_n\}$的任何子数列$\{x_{n_k}\}$都收敛于a.

推论1 若数列$\{x_n\}$有一个发散的子数列$\{x_{n_k}\}$,则$\{x_n\}$必发散.

推论2 若数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限,则$\{x_n\}$必发散.

推论3 若$\{x_n\}$单调,它的某一子列$x_{n_k}\to a(k\to\infty)$,则$x_n\to a(n\to\infty)$.

推论4 若$x_n\to\infty$,则它的任一子列$x_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$.

推论5 若$\{x_n\}$无界,则必存在一个子列$x_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$.

命题2 数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是子数列$\{x_{2n-1}\}$和$\{x_{2n}\}$都收敛于a.

4. 数列极限的运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$;　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$　$(b\neq 0)$;　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=ca$　(c为常数).

除了以上这些关于数列的敛散性,还有下面这些会经常用到:

(1)若$\{x_n\}$收敛,$\{y_n\}$发散,则$\{x_n+y_n\}$必发散.

(2)即使$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散,$\{x_n+y_n\}$也不一定发散.例如,$\{(-1)^n\}$和$\{(-1)^{n+1}\}$都发散,但$\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$收敛.

(3)即使$\{x_n\}$和$\{y_n\}$至少有一个发散,$\{x_ny_n\}$也不一定发散.例如,$\{(-1)^n\}$和$\{(-1)^{n+1}\}$都发散,但$\{(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}\}$收敛.又如,$\{(-1)^n\}$发散,$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$收敛,但$\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$收敛.

(4)若$c\neq 0$,则$\{x_n\}$和$\{cx_n\}$同时收敛同时发散.

5. 数列收敛的两个准则

夹逼准则 若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n>N)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

夹逼准则的用法:当极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$很难计算时,可将$x_n$适当缩放成$y_n$和$z_n$(即$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n>N)$),使得$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

单调有界准则　单调有界数列必有极限.

单调有界准则的用法：如果能判定数列 $\{x_n\}$ 单调增加(或单调减少)，且能判定 $\{x_n\}$ 有上界(或下界)，则 $\{x_n\}$ 收敛.

1.2.3　函数的极限

1. 函数极限的概念

(1)自变量 x 无限趋大时($x\to\infty$)函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的直观定义　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 当自变量 x 的绝对值无限增大($x\to\infty$)时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地趋于数 $A(f(x)\to A)$，即 $|x|\to+\infty\Rightarrow|f(x)-A|\to 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的严格定义　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似地，可得到单侧(向)极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的定义.

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在并且相等. 即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

推论　若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

(2)自变量 x 趋于有限值时($x\to x_0$)函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的直观定义　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 当自变量 x 无限地趋于 $x_0(x\to x_0)$ 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地趋于数 A.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的严格定义　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

注意　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与函数值 $f(x_0)$ 无关.

类似地，可得到单侧极限：左极限 $f(x_0-0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $f(x_0+0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 的定义.

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在并且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

函数极限与数列极限具有这样的关系：

命题　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对任何数列 $x_k\to x_0(k\to\infty)$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=A$.

函数极限具有与数列极限相应的一些性质和运算法则，如唯一性、局部有界性、局部

保号性、局部保序性、四则运算法则和夹逼原理等.

2. 无穷小量与无穷大量

无穷小量 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，以零为极限的函数 $\alpha(x)$ 称为当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小量，简称为无穷小.

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$）的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

无穷小量的运算性质

(1)有限个无穷小量的代数和是无穷小量；

(2)有限个无穷小量的乘积是无穷小量；

(3)无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量.

无穷大量 如果对于任意给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$（或 $X>0$），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大量，简称为无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

无穷大量的运算性质：

(1)两个无穷大的乘积仍是无穷大；

(2)无穷大与有界函数的和是无穷大；

注意 ①两个无穷大的和不一定是无穷大；

②两个正无穷大（或负无穷大）的和是正无穷大（或负无穷大）；

③无穷大与一个具有非零极限的函数之积是无穷大.

定理 4(无穷小量与无穷大量的关系) 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

无穷大与无界函数的关系 无穷大必无界，但无界不一定无穷大. 例如，$y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x\neq\infty$（因为易见 $x=n\pi$ 时 $x\sin x=0$）.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

有关极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{x}{n}=x$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

有关极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{lx}=e^{kl},\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x=\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b},\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+c}=e.$$

其他重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$$

4. 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同一个自变量变化过程中的无穷小，且 $\beta(x)\neq 0$，而 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 在这个变化过程中的极限存在.

(1)若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

(2)若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

(3)若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(4)若 $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C(C\neq 0,k\in\mathbf{N})$，则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k **阶无穷小**. 特别地，取 $\beta(x)=x-x_0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}=C$，则称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 k **阶无穷小**.

定理 5 设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\tilde{\alpha}(x)$，$\tilde{\beta}(x)$ 都是同一个极限过程的无穷小，若 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，并且 $\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在，并且 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$.

当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小有

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$；

$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$，$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$.

1.2.4 连续函数

1. 连续函数的概念与基本性质

连续函数的定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

单侧连续的定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

函数间断点及其分类 使函数 $f(x)$ 不连续的点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点. 通常将函数的间断点分为两类:一类是左右极限都存在的间断点,称为第一类间断点;不是第一类的间断点称为第二类间断点. 有时也根据间断点的特点分别称为可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点、振荡间断点.

定理 6(连续函数的四则运算) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 也在 x 处连续.

定理 7(反函数的连续性) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调且连续,则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $J=f(I)$ 上也单调且连续.

定理 8(复合函数的连续性) 设 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 都是连续函数,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 也是连续函数.

定理 9(连续函数与极限的交换性) 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))=f(u_0)$,这说明极限运算与连续函数运算可以交换.

注意 (1)基本初等函数在其定义域内连续;

(2)一切初等函数在其定义区间内都是连续的(如初等函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 在定义域内就不是连续函数,因为它的定义域是离散的点集).

2. 闭区间上连续函数的性质

定理 10(最大值与最小值定理) 在闭区间上的连续函数一定能在该区间上取到最大的函数值和最小的函数值.

定理 11(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

定理 12(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,m 和 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值,则对任何 $\mu\in[m,M]$,都至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 13(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

1.3 典型例题

1. 函数

例 1.1　设 $f\left(\sin \dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

解　令 $\sin \dfrac{x}{2}=t$，则 $\cos x=1-2\sin^2 \dfrac{x}{2}=1-2t^2$，所以 $f(t)=1+1-2t^2=2-2t^2$，故 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x$.

例 1.2　设 $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{当 } x>0\\ x & \text{当 } x\leqslant 0\end{cases}$，　$g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{当 } x\leqslant 1\\ x^3 & \text{当 } x>1\end{cases}$，　求 $f(g(x))$.

解　$f(g(x))=\begin{cases}\ln g(x) & \text{当 } g(x)>0\\ g(x) & \text{当 } g(x)\leqslant 0\end{cases}$.

①当 $g(x)>0$ 时，有两种情况，或者 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，此时 $g(x)=x^2$，则 $f(g(x))=\ln g(x)=\ln x^2=2\ln|x|$；或者 $x>1$，此时 $f(g(x))=\ln g(x)=\ln x^3=3\ln x$.

②当 $g(x)\leqslant 0$ 时，只有 $x=0$，此时 $g(x)=0$，则 $f(g(x))=f(0)=0$.

综上，$f(g(x))=\begin{cases}2\ln|x| & \text{当 } x\leqslant 1, x\neq 0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ 3\ln x & \text{当 } x>1\end{cases}$.

评注　本题主要考察分段函数的复合，首先要注意分段函数的取值，再对应求复合函数的值.

例 1.3　若 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 适合 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=mx+\dfrac{n}{x}$，$|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

解　由 $\begin{cases}af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=mx+\dfrac{n}{x}\\ af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=\dfrac{m}{x}+nx\end{cases}$，解得　$(a^2-b^2)f(x)=amx+a\dfrac{n}{x}-\left(b\dfrac{n}{x}+bnx\right)$，故 $f(x)=\dfrac{am-bn}{a^2-b^2}x+\dfrac{an-bn}{a^2-b^2}\dfrac{1}{x}$　$(x\neq 0)$.

例 1.4*　若 $f(x)$ 满足 $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{-x-3}{x-1}\right)=\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为已知函数，求 $f(x)$.

解　令 $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$，则 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{-x-3}{x-1}$，且 $\varphi(\varphi^{-1}(x))=\varphi^{-1}(\varphi(x))=x$，$\varphi(\varphi(x))=\varphi^{-1}(x)$，$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(x))=\varphi(x)$，所以由 $\alpha(x)=f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{-x-3}{x-1}\right)$，得

$$\alpha(x)=f(\varphi(x))+f(\varphi^{-1}(x)), \tag{1}$$

$$\alpha(\varphi(x))=f(\varphi(\varphi(x)))+f(\varphi^{-1}(\varphi(x)))=f(\varphi^{-1}(x))+f(x), \tag{2}$$

$$\alpha(\varphi^{-1}(x))=f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))+f(\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(x)))=f(x)+f(\varphi(x)), \tag{3}$$

式(1)，(2)，(3)联立得 $f(x)=\dfrac{1}{2}[-\alpha(x)+\alpha(\varphi(x))+\alpha(\varphi^{-1}(x))]$，即

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[-\alpha(x)+\alpha\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+\alpha\left(\frac{-x-3}{x-1}\right)\right].$$

评注 本题也可参考上题的解法.

令 $u=\frac{x-3}{x+1}\Rightarrow x=\frac{-u-3}{u-1}$，$\frac{-x-3}{x-1}=\frac{u-3}{u+1}\Rightarrow f(u)+f\left(\frac{u-3}{u+1}\right)=\alpha\left(\frac{-u-3}{u-1}\right)$.

令 $u=\frac{-x-3}{x-1}\Rightarrow x=\frac{u-3}{u+1}$，$\frac{x-3}{x+1}=\frac{-u-3}{u-1}\Rightarrow f\left(\frac{-u-3}{u-1}\right)+f(u)=\alpha\left(\frac{u-3}{u+1}\right)$.

又 $f\left(\frac{u-3}{u+1}\right)+f\left(\frac{-u-3}{u-1}\right)=\alpha(u)$，易得所需结论.

该解法告诉我们：数学不是“看出来”的，是“算出来”的.

2. 数列极限

例 1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=(\quad)$.

解 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

评注 这是“$\infty-\infty$”型的极限问题，一般要转化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限问题.

例 1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)=(\quad)$.

解 $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]\\&=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

例 1.7 设 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $x_n=\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

评注 以上两题是利用拆(合)项方法将无限项变为有限项求极限. 做这类题目要仔细观察表达式的特点.

例 1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=(\quad)$.

解 $\frac{1}{2}$.