JINBANG BOOKS·SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

2018

全国硕士研究生入学统一考试

全国十二大考研辅导机构指定用书

线性代数辅导讲义

讲义2.0

主编◎曹显兵

内容精讲

公式结论

例题分析

练习提升

明确重点
提高效率

必考考点
方法技巧

典型题型
全面覆盖

学练结合
综合提升

双色印刷
佳的阅读体验

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

2018

全国硕士研究生入学统一考试

全国十二大考研辅导机构指定用书

线性代数辅导讲义

主编◎曹显兵

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是为准备考研的同学系统复习线性代数而精心编写的讲义，适合考生强化复习阶段使用，也可作为高校数学教师讲授或同学们学习线性代数课程的参考书。考研数学课程中，线性代数是理工科（数学一、二）、经济类（数学三）以及农学联考类必考的课程。这门课的两个主要特点：一是试题的计算量大，无论是行列式、矩阵、线性方程组的求解，还是特征值、特征向量和二次型的讨论都涉及到大量的数值运算，稍有不慎，即会出错，造成不应有的丢分；二是前后内容联系紧密、纵横交织，又跳跃度大、相对独立，形成了一个完整、独特的知识体系。

本讲义共分六章：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值和特征向量，二次型。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导讲义/曹显兵主编. —西安：西安交通大学出版社，2017.5
ISBN 978-7-5605-9717-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 117416 号

书　　名　线性代数辅导讲义
主　　编　曹显兵
责任编辑　李迎新　贺彦峰

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　西安市兴庆南路 10 号（邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874（发行中心）
　　　　　(029)82668315（总编办）
印　　刷　三河市越阳印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　11　字数　239 千字
版次印次　2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-9717-1
定　　价　39.80 元

读者购书、书店添货，如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

版权所有　侵权必究

金榜图书官方天猫店
店名：时代巨流图书专营店
(http://sdjlts.tmall.com)

金榜图书官方微店

西安交通大学出版社
天猫官方店

西安交通大学出版社
官方微店

前　言

本书是为准备考研的同学系统复习线性代数而精心编写的讲义，适合考生强化复习阶段时使用，也可作为高校数学教师讲授或同学们学习线性代数课程的参考书。

考研数学课程中，线性代数是理工科(数学一、二)、经济类(数学三)以及农学联考类必考的课程，一共有5个题(2个选择，1个填空，2个解答)，分值为34分，占总分的22.7%。

线性代数一般安排在大学二年级开设。由于这门课程无需高等数学(微积分)作为先修课程，因此许多同学对该门课程的学习内容并没有太多困难，但考试成绩并不理想。究其原因，作者认为主要是同学们没有把握好线性代数这门课的两个主要特点：一是试题的计算量大，无论是行列式、矩阵、线性方程组的求解，还是特征值、特征向量和二次型的讨论都涉及到大量的数值运算，稍有不慎，即会出错，造成不应有的丢分；二是前后内容联系紧密、纵横交织，又跳跃度大、相对独立，形成了一个完整、独特的知识体系。作者主讲考研数学课程已有十多年，积累了比较丰富的教学经验与体会。本书正是根据作者这十多年来的辅导讲稿精心提炼、整理而成的，目的是帮助考生把握课程特点、进行归纳总结，大幅提高数学逻辑思维和综合运用所学知识解决问题的能力，花最少的时间达到最佳的复习效果，在较短时间内复习好线性代数，最终取得优异成绩，实现自己的人生梦想。

本讲义共分六章，内容包括：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值和特征向量，二次型。每章由以下四部分构成：

一、考试要求与考试内容精讲

本部分给出最新考研大纲所规定的考试要求，并且对考试内容作了规范、精炼的描述与讲解，让考生一目了然，知道考什么、达到什么要求。

二、重要公式与结论

本部分针对每一章中的重点、难点以及需要进一步提高掌握的公式与结论进行了归纳总结。特别对一些重要的一般教材不明确给出而考研又要求的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结，目的在于让考生站在更高的层次“看”考题，大幅提高考生分析问题和解决问题的能力。更好地把握考试的重点、难点，掌握解题的基本方法及基本技巧。

三、典型题型与例题分析

本部分力求用最少的篇幅来大幅提高考生的"实战"能力，所选例题覆盖了线性代数的所有题型。一方面，作者通过精心选取或重新命制题目，使得本书所选例题更具代表性，考生更容易理解基本概念，掌握基本方法、基本原理；另一方面，借助于典型例题的评注以及每个题型后的小结，帮助考生更快地掌握解题思路和方法，全方位地提高应试能力和应试技巧，达到举一反三、触类旁通、事半功倍的复习效果。

四、本章小结

本部分明确指出了这一章的重点所在，有利于考生提高复习效率，节省宝贵的复习时间。

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不一一列出，在此谨向相关作者表示衷心感谢！由于编者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

最后，祝各位考研同学复习顺利，快乐考研，心想事成！

作者

2017 年于北京

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　行列式

考试要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考试内容精讲

一、排列和逆序

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数为 $n!$ 个.

定义 1.2　一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若 $i_t > i_s$，则称这一对数 i_ti_s 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列. 在所有的 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中，奇排列个数 $=$ 偶排列个数 $=\dfrac{n!}{2}$.

定义 1.3　在排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换，记为 (i_t,i_s). 对换改变排列的奇偶性.

定义 1.4　行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有不同的 n 级排列求和. 显然，被加项共有 $n!$ 项，正、负项各占一半，即$\dfrac{n!}{2}$ 项$(n\geqslant 2)$.

注意：1. 规定，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

2. n 阶行列式是一个数，是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素列下标(当行下标按自然顺序排列时)的逆序数，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号.

二、行列式的性质

性质 1　行列式的行列互换，行列式的值不变.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式的值反号.

性质 3　行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于 k 乘以此行列式.

推论 1　如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零.

性质 4　如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个元素之和，则此行列式等于两个行列式的和.这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个相加元素之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同.

性质 5　把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变.

推论 2　如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

三、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

定义 1.5　在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按一行(或列)展开定理

定理 1.1　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

重要公式与结论

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 对于下列副对角线行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

A_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|, \ |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{BA}|,$$

但

$$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| \pm |\boldsymbol{B}|, \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

5. $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$，$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|(\boldsymbol{A}^*)^*| = |\boldsymbol{A}|^{n^2-2n+1}$，
$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{2n-1}$，$||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^{n^2-n+1}$，$||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n^2-1}(n\geqslant 2)$.

6. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{m\times m} \\ \boldsymbol{B}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{m\times m} \\ \boldsymbol{B}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{m\times m} \\ \boldsymbol{B}_{n\times n} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

7. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

8. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$. 一般地

$$|f(\boldsymbol{A})| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n),$$

其中

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_m\boldsymbol{E}.$$

9. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. 从而将 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的计算转化为 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的计算，进一步有 $|f(\boldsymbol{A})| = |f(\boldsymbol{B})|$.

10. 区分 $|\boldsymbol{A}| = 0$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 不能推出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 例如，非零矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 另外，若矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，且为方阵，则其行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

❖ 典型题型与例题分析

题型一　基本概念与性质的命题

【例 1.1】　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -17 & 9 & 2x \\ 2 & -x & 4 & 12 \\ 89 & 16 & x & 2 \\ 1009 & 3 & 9 & 8x \end{vmatrix}$,则 x^3 的系数为________.

【分析】　根据行列式的定义,每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积,于是含有 x^3 的项,只能在主对角线上选 2 个元素,而且必须选中对角线外含有 x 的元素,故行列式中含有 x^3 的项是

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=(-1)^5 2x\cdot(-x)\cdot x\cdot 1009=2018x^3.$$

即 x^3 的系数为 2018.

【例 1.2】　记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

【分析】　把行列式第 1 列的 -1 倍分别加到第 2,3,4 列,然后再把第 2 列加到第 4 列可得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

显然 $f(x)=0$ 的根的个数为 2,故选(B).

【例 1.3】　已知 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}=-16$,则 $A_{41}+A_{42}=$________,$A_{43}+A_{44}=$________.其中,A_{4j} 为 D_4 中 a_{4j} 的代数余子式.

【详解】　由行列式的按行展开定理得

$$\begin{cases} 4(A_{41}+A_{42})+5(A_{43}+A_{44})=-16, \\ 2(A_{41}+A_{42})+3(A_{43}+A_{44})=0. \end{cases}$$

解之得　　$A_{41}+A_{42}=-24,A_{43}+A_{44}=16.$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

【例 1.4】 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 286 & 512 & 315 & 168 \\ -200 & 200 & -200 & 200 \\ 25 & 88 & 68 & 98 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \end{vmatrix}$，则此行列式的第 4 行各元素的余子式之和为________.

【分析】 首先找到代数余子式和余子式之间的关系，然后注意一个元素的代数余子式(或余子式)，实际上与这个元素的值没有关系. 因此，改变原行列式中第 4 行的元素并不会改变第 4 行的元素的代数余子式.

【详解】 记 A_{4j}, M_{4j} 分别表示第 4 行 j 列元素的代数余子式和余子式，则有

$$A_{4j} = (-1)^{4+j} M_{4j}, \quad 即\ A_{41} = -M_{41}, A_{42} = M_{42}, A_{43} = -M_{43}, A_{44} = M_{44}.$$

故 $\sum_{j=1}^{4} M_{4j} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 286 & 512 & 315 & 168 \\ -200 & 200 & -200 & 200 \\ 25 & 88 & 68 & 98 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.(两行成比例，行列式值为 0)

【评注】 本题还可利用第 2 行元素分别乘第 4 行元素的代数余子式之和为零得到正确答案. 但若先把每个余子式都计算出来，则会浪费宝贵的考试时间.

题型二 具体行列式的计算

【例 1.5】 计算下列行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} & & & & & \lambda_1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & \lambda_n & & \\ \lambda_{n+1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{2n} & & & \end{vmatrix}.$$

【分析】 考虑到零元素很多，可直接按行列式定义求解. 另外，还可用分块阵的行列式公式计算.

【详解 1】 定义法

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (-1)^{\tau(2n,2n-1,\cdots,n+1,1,2,\cdots n)} a_{1,2n} a_{2,2n-1} \cdots a_{n,n+1} a_{n+1,1} \cdots a_{2n,n} \\ &= (-1)^{1+2+\cdots+n-1+\overbrace{n+\cdots+n}^{n个}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \\ &= (-1)^{\frac{3n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{2n}. \end{aligned}$$

【详解 2】 公式法

$$D_{2n} = (-1)^{n\times n} \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{n+1} & & & \\ & \lambda_{n+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n^2} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n}$$
$$= (-1)^{\frac{3n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{2n}.$$

【例 1.6】 (2016 数 1,3) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ ________.

【详解】 将行列式按第 4 列展开得

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} +$$
$$(-1)\cdot(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)\lambda^3 + [\lambda(2\lambda+3) + 4(-1)^{3+1}(-1)(-1)]$$
$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

应填 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

【例 1.7】 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & & & & \\ a_2 & x & -1 & & & \\ a_3 & & x & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{n-1} & & & & x & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix}.$$

【详解】 按第 n 行展开，易得递推公式.

$$D_n = a_n(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1} + xD_{n-1} = a_n + xD_{n-1}$$
$$= a_n + x(a_{n-1} + xD_{n-2}) = a_n + a_{n-1}x + x^2 D_{n-2}$$
$$= \cdots = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_3 x^{n-3} + x^{n-2} D_2$$
$$= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1}.$$

【例 1.8】 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

【分析】 利用行列式的加法性质转化为两个易计算的行列式.

【详解】

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1+0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1+0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1+0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n(a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-2})$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+a_na_{n-1}D_{n-2}=\cdots$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+a_1a_3\cdots a_{n-1}a_n+a_2a_3\cdots a_{n-1}a_nD_1$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【小结】 对具体行列式的计算常用下列方法：

1. 对零元素很多的可直接用定义计算.

2. 利用行列式的性质和行(列)展开定理计算,其具体做法有二:一是利用行列式的性质将所给行列式化为上(下)三角形行列式进行计算;二是按行(列)展开定理,把高阶行列式转化为低阶行列式计算.在具体求解时,一般总是先利用行列式的性质,把行列式的某行(列)的元素变换成尽可能多的零,然后再按此行(列)展开降阶,也就是把两种方法结合起来应用.

3. 利用行(列)展开定理得到递推公式,再结合数学归纳法进行计算.

4. 利用分块阵的行列式、范德蒙行列式等重要公式计算.

题型三　抽象行列式的计算

【例 1.9】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

【详解】 由题设，有

$$B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}.$$

于是 $$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}=2.$$

【评注】 本题相当于矩阵 B 的列向量组可由矩阵 A 的列向量组线性表示，关键是将其转化为用矩阵乘积形式表示. 一般地，若

$$\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_m=a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则有 $$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

【例 1.10】 设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\3\boldsymbol{\alpha}_2\\4\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\2\boldsymbol{\beta}_2\\3\boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维行向量，且 $|A|=9$，$|B|=6$，试求 $|2A-B|$.

【详解】 利用分块矩阵的运算法则与行列式的性质得

$$|2A-B|=\begin{vmatrix}2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1\\4\boldsymbol{\alpha}_2\\5\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\boldsymbol{\alpha}_1\\4\boldsymbol{\alpha}_2\\5\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\4\boldsymbol{\alpha}_2\\5\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}=\frac{2\times4\times5}{3\times4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\3\boldsymbol{\alpha}_2\\4\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}-\frac{4\times5}{2\times3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\2\boldsymbol{\alpha}_2\\3\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{10}{3}|A|-\frac{10}{3}|B|=10.$$

【例 1.11】 (2010 数 2,3) 设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ________.

【分析】 本题考查矩阵的运算、行列式的性质. 一个关键的思路是将矩阵的加法运算转化为乘法运算，从而方便利用矩阵乘法运算下行列式的性质.

【详解】 由于 $$|A+B^{-1}|=|(AB+E)B^{-1}|=|(AB+AA^{-1})B^{-1}|$$
$$=|A(B+A^{-1})B^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|B^{-1}|$$
$$=3\times2\times2^{-1}=3$$

因此应填 3.

【评注】 也可以由 $|A|\cdot|A^{-1}+B|=|E+AB|=|A+B^{-1}|\cdot|B|$ 得 $|A+B^{-1}|=3$.

【例 1.12】 (2012 数 2,3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$ ________.

【详解】 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{E}_{12}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{E}_{12}|=3^3\cdot(-1)=-27.$$

故应填 -27.

【例 1.13】 (2013 数 1,2,3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

【详解】 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 有，$A_{ij}=-a_{ij}$，$(i,j=1,2,3)$，得 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，于是

$$\boldsymbol{AA}^*=-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

两边取行列式得 $-|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3$，解得 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=0$.

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，与已知矛盾，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

【评注】 也可以如下证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$：由 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$. 于是，根据行列式的按行展开定理得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)<0.$$

【例 1.14】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵)，$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的值.

【详解 1】 根据 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|\\&=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|.\end{aligned}$$

于是 $$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

因为 $$1-|\boldsymbol{A}|>0,$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

【详解 2】 因为 $$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,$$

即有 $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,$$

也即 $$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

因为 $$1-|\boldsymbol{A}|>0,$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

【例 1.15】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 $(n\geqslant 3)$ 可对角化矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})=3$，试求行列式 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|$ 的值.

【详解】 由 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，知存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，其对角线元素为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值(即以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角线元素的对角阵).

令 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，则 $\exists\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，使得

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

于是可得 $$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{x}.$$

由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，有 $(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^2+2\lambda=0$.

解得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能特征值.

再由 $r(\boldsymbol{A})=3$，有 $r(\boldsymbol{\Lambda})=3$. 故 $\lambda_2=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值，$\lambda_1=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-3$ 重特征值，即 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 的 n 个特征值为 $\mu_1=4(n-3$ 重$)$，$\mu_2=2(3$ 重$)$. 所以

$$|A+4E| = \mu_1^{n-3} \cdot \mu_2^3 = 4^{n-3} \cdot 2^3 = 2^{2n-3}.$$

【例 1.16】 已知矩阵 A 与 B 相似，其中 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求行列式 $|A+2E|$.

【分析】 根据相似矩阵有相同的行列式，可将抽象行列式 $|A+2E|$ 的计算转化为具体行列式的计算.

【详解】 因为矩阵 A 与 B 相似，故 $A+2E$ 相似 $B+2E$. 于是

$$|A+2E| = |B+2E| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 69.$$

【小结】 对抽象行列式的计算要综合利用行列式、矩阵的性质，并特别注意矩阵的性质：

1. $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值.
2. 若 A 相似于 B，则 $|A| = |B|$.
3. 对 n 阶方阵 A，$|A| = 0$ 的充要条件是 $r(A) < n$.

题型四　有关 $|A| = 0$ 的命题

【例 1.17】 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵，则

(A) 当 $m > n$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$.　　(B) 当 $m > n$ 时，必有行列式 $|AB| = 0$.

(C) 当 $n > m$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$.　　(D) 当 $n > m$ 时，必有行列式 $|AB| = 0$.

【分析】 4 个选项在于区分行列式是否为零，而行列式是否为零又是相应矩阵是否可逆的充要条件，因此问题转化为矩阵是否可逆，而矩阵是否可逆又与矩阵是否满秩相联系，最终只要判断 AB 是否满秩即可.

【详解】 因为 AB 为 m 阶方阵，且

$$r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B)) \leqslant \min(m,n)$$

当 $m > n$ 时，由上式可知，$r(AB) \leqslant n < m$，即 AB 不是满秩的，故有行列式 $|AB| = 0$.

正确选项为(B).

【评注】 矩阵 AB 的具体元素未知，因此直接应用行列式的有关计算方法进行求解是困难的. 对于此类抽象矩阵行列式的计算往往可转而考虑：(1) 矩阵的秩（判断行列式是否为零）；(2) 行列向量组的线性相关性；(3) 方程组解的判定；(4) 特征值和相似矩阵的性质等进行计算.

【例 1.18】 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$，$A \neq E$，证明 $|A| = 0$.

【证明 1】 **反证法**　假设 $|A| \neq 0$，从而 A 可逆，由 $A^2 = A$，两边左乘 A^{-1}，得 $A = E$，与已知条件矛盾，所以 $|A| = 0$.

【证明 2】 由 $A^2 = A$，得 $A(A-E) = O$. 于是 $A-E$ 的每一个列向量为齐次线性方程组

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com