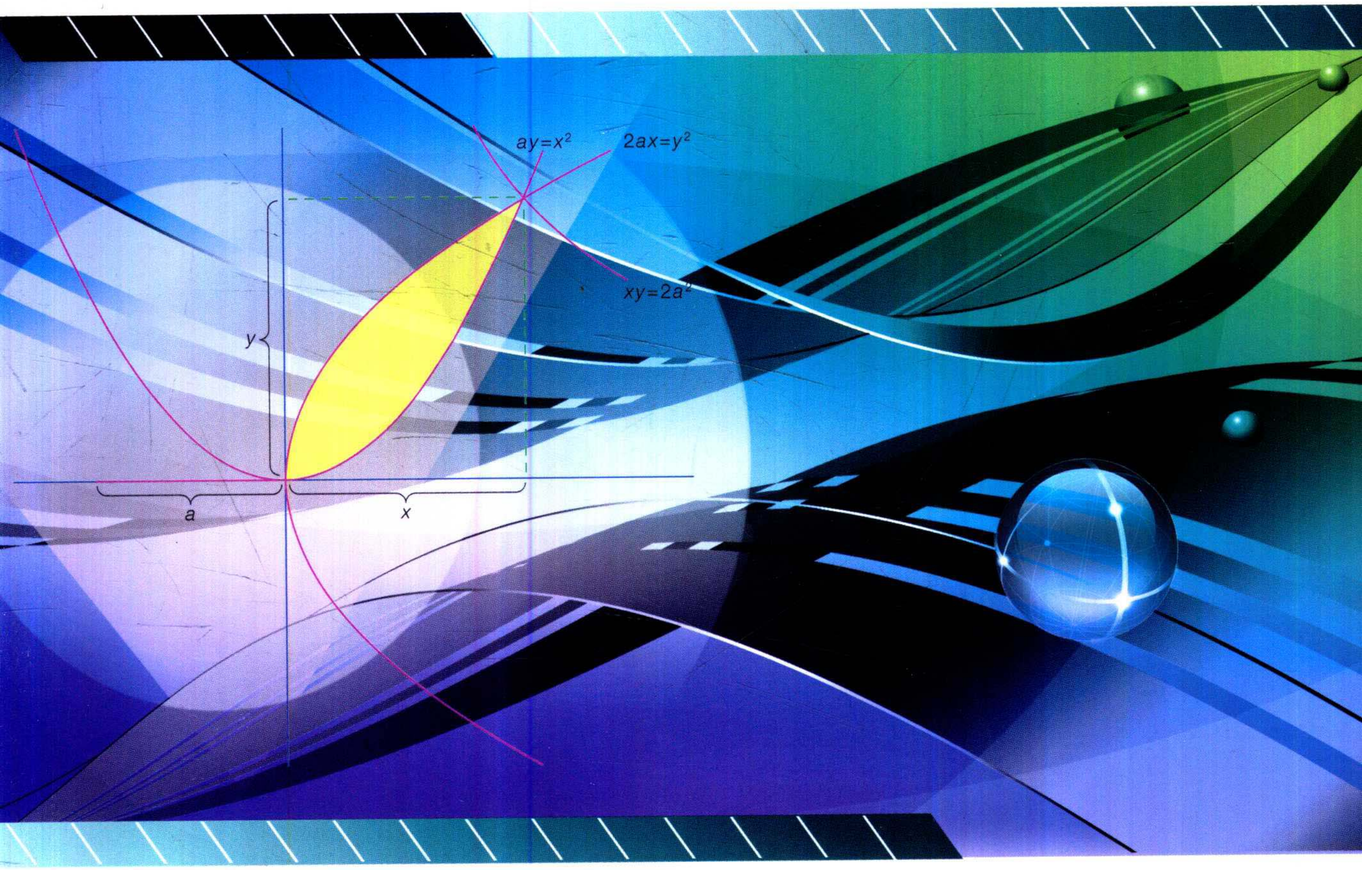
“新工科建设”教学探索成果·“十三五”规划教材

微积分

同步练习与提高（三）

主　编　李莎莎　余琛妍
副主编　涂黎晖　王聚丰　孙海娜　翁云杰
主　审　苏德矿



中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

“新工科建设”教学探索成果·“十三五”规划教材

微积分
同步练习与提高(三)

主　编　李莎莎　余琛妍

副主编　涂黎晖　王聚丰　孙海娜　翁云杰

主　审　苏德矿

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是与《微积分学》（下册）（吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著）配套的学习辅导用书，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、常微分方程。

常微分方程在很多科学领域内有着重要的应用，如自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究等。这些问题都可以化为求常微分方程的解，或者化为研究解的性质的问题。本书研究了几类简单的常微分方程的解法。

本书的题目既包含“基础部分”，又包含“提高部分”，对强化学生的数学思维很有帮助。

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步练习与提高. 三/ 李莎莎，余琛妍主编. — 北京：电子工业出版社，2018.3

ISBN 978-7-121-31977-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①李… ②余… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 139737 号

策划编辑：章海涛
责任编辑：章海涛　　　　　文字编辑：孟　宇
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：9.75　字数：125 千字
版　　次：2018 年 3 月第 1 版
印　　次：2018 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：26.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：192910558（QQ 群）。

前　言

信息安全与国家的军事、外交、政治、金融甚至我们的日常生活息息相关，已成为信息科学领域、社会科学领域重要的研究课题。数学基础犹如信息安全学科之根茎，支撑着信息安全领域的理论创新与技术进步。

微积分是高等学校工科类专业、经管类专业一门重要的数学基础课。能否用数学的思维、方法去思考、推理以及定量分析一些自然现象和经济现象，是衡量民族科学文化素质的重要标志，提高数学素养在培养高素质人才中有着不可替代的作用。

本书是与《微积分学》(下册)(吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著)相配套的学习辅导用书，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、常微分方程。本书主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作为参考。本书分成三大部分：第一部分为基础题，根据《微积分学》的章节顺序和教学进度，选出适量的习题并留有解题空间作为作业供学生练习，同时也为老师批阅和学生复习提供了方便；第二部分为提高题，在原有的习题难度基础上，结合教材内容和考研大纲筛选出具有一定综合性的习题，并给出了详细的解题思路和解答过程，还提供了部分习题的多种解法，该部分可作为学有余力的学生提高数学解题能力的参考用书；第三部分为期中、期末样卷，可供学生复习备考之用。

本书的编写自始至终得到浙江大学宁波理工学院领导的支持和关怀，数学组全体老师对各章节习题进行了筛选、演算和校正，并提出了很多宝贵的意见，编者在此一并向他们表示衷心的感谢。

《微积分学》(下册)(吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著)在浙江大学宁波理工学院和其他一些院校已经使用十多年，编写与该教材配套的用书是编者多年的心愿，现将长期教学实践积累的点滴写出来，为数学课程的学习带来更多的方便。由于对编写此类书缺乏经验，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 2 月

浙江大学宁波理工学院

目　　录

第 9 章　向量代数与空间解析几何

§ 9.1　向量和向量运算

1．用向量方法证明平行四边形的对角线必互相平分。

§ 9.2　空间直角坐标系

2．已知三角形的三个顶点分别为 $A(1,5,0)$，$B(11,3,8)$，和 $C(5,11,12)$，求各中线之长。

3．已知 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$A$ 点的坐标是$(0,5,3)$，求 B 点的坐标。

4．从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB，长为 34，求 B 点的坐标。

5．求下列各向量的模、方向余弦和与其同方向的单位向量。
（1） $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；（2） $\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 。

6．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 5，与 x 轴正向的夹角是 $\dfrac{\pi}{4}$，与 y 轴正向的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$。

§9.3　标量积、向量积、混合积

7．已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=4$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$。

8．已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；（3）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

9．已知 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；（3）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

10．求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的夹角。

11．已知两点 $M(4,\sqrt{2},1)$ 和 $P(3,0,2)$，计算 $\overrightarrow{MP}$ 的模、方向余弦和方向角，并证明 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\overrightarrow{MO}$ 的夹角是锐角，其中 O 是坐标原点。

12．证明向量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{c}$垂直。

13．已知三点$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，求三角形ABC的面积和AB上的高h。

14．已知$\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{b}\{1,-1,3\}$，$\boldsymbol{c}\{1,-2,0\}$，求：（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（3）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。

15．求与向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$都垂直的单位向量。

16．已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，求$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。

17．设$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，求以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的面积。

18．设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角。

第 10 章　多元函数微分学

§ 10.1　平面点集多元函数

1．求下列函数的定义域。

（1）$z=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$；（2）$z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$。

§ 10.2　二元函数的极限和连续性

2．判断下列函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限，若存在，求极限值。

（1）$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；（2）$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$；

（3）$f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$；（4）$f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$。

§ 10.3　偏导数

3．求下列函数的偏导数。

（1）$z=\sqrt{(\ln(xy))}$；（2）$z=(1+xy)^y$；

（3） $u=\arctan(x-y)^z$；（4） $z=\mathrm{e}^x(\cos y+x\sin y)$。

4．设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$，求 $f_x'(1,1)$， $f_y'(1,2)$。

5．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{4y}}$，求 $f_x'(2,1)$。

6．求下列函数的所有二阶偏导数。

（1） $u=x^4+y^4-4x^2y^2$；（2） $u=\ln(x^2+y)$。

7．设 $z=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$，验证下列等式等立。

（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；（2） $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$。

8．设 $z=2\cos^2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$，证明 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$。

§ 10.4　全微分

9．求下列函数的全微分。

（1）$z=\ln(x^2+y^2)$；（2）$z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$；（3）$u=x^{yz}$。

10．求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，当 $x=1$，$y=2$ 时的全微分。

11．计算 $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ 的近似值。

§ 10.5　复合函数的微分法

12．设 $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

13．设下面的 f 都有一阶连续偏导数，求下列函数的一阶偏导数。

（1）$u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$；（2）$u=f(x,xy,xyz)$；（3）$u=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$。

14．设 f 有连续二阶偏导数，$u=f(x+y,x-y)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

15．设 f 有连续二阶偏导数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

16．设 f,φ 具有连续二阶偏导数或导数，$z=f(x+\varphi(y))$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

17．设 f 有连续偏导数，$u=f(x,y,z)$，$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。

18．设 f 是可微函数，$u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$，证明 $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$。

§ 10.6　隐函数求导

19．设 $x^2+y^2+z^2-6xz=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

20．设 $xyz=x+y+z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

21．设 $e^z=x+y+z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

22．设 $x-az=\varphi(y-bz)$，其中 a，b 为常数，φ 可导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

23．设 $f(cx-az,cy-bz)=0$，其中 f 有连续偏导数，证明 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$。

24．设 z 是由方程确定的隐函数，求 dz。

（1）$x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$；

（2）$x^2+y^2+z^2=f(ax+by+cz)$，其中 f 有连续偏导数，a，b，c 是常数。

25. 设 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x+u,yu)$ 确定，其中 f 有连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 。

§ 10.7　多元函数的极值

26. 求下列函数的极值点。
（1） $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ ；（2） $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 。

27. 求函数 $z=x^2-y^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\}$ 上的最大值，最小值。

28. 设四个正数 a,b,c,d 的和为常数 4λ ，求乘积 $u=abcd$ 的最大值。

第 11 章　重积分

§ 11.1　二重积分的概念和性质

1. 用二重积分的几何意义求下列积分值。

（1）$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$；

（2）$\iint\limits_D 3\,\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x+y\leqslant 1, y-x\leqslant 1, y\geqslant 0\}$。

2. 根据二重积分性质，比较下列积分的大小。

$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 2\}$。

§ 11.2　二重积分的计算

3. 计算 $\iint\limits_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围的区域。

4．计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由$xy=1, y=x, y=2$所围的区域。

5．计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由曲线$y^2=x$与直线$x+y=2$所围的区域。

6．交换下列二次积分的积分次序。

（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；（2）$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（3）$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；（4）$\int_{-a}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^a \mathrm{d}x\int_{x-a}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$。

7．计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D \left|y-x^2\right|\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$；