



现代数学丛书  
Series in Contemporary  
Mathematics

# 线性随机系统

一种关于建模、估计和辨识的几何方法

[瑞典] 林德奎斯特 (A.Lindquist) [意大利] 皮奇 (G.Picci) / 著  
赵延龙 赵文虢 / 译

## Linear Stochastic Systems

A Geometric Approach to Modeling,  
Estimation and Identification

(上册)

上海科学技术出版社  
Shanghai Scientific & Technical Publishers



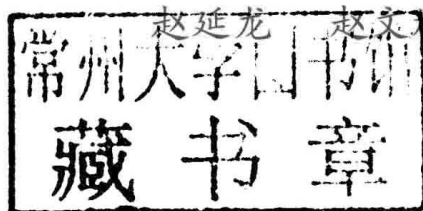
现代数学丛书

# 线性随机系统：一种关于建模、估计和辨识的几何方法

上册

[瑞典] 林德奎斯特 [意大利] 皮奇 著

赵延龙 赵文虎 译



上海科学技术出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

线性随机系统:一种关于建模、估计和辨识的几何方法. / (瑞典)林德奎斯特(A. Lindquist), (意)皮奇(G. Picci)著;赵延龙,赵文虢译. —上海:上海科学技术出版社,2018.3

ISBN 978-7-5478-3792-4

I. ①线… II. ①林… ②皮… ③赵… ④赵… III. ①线性随机系统 IV. ①TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 274782 号

Original title: Linear Stochastic Systems: A Geometric Approach to Modeling, Estimation and Identification by Anders Lindquist and Giorgio Picci  
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015  
Translation copyright © Shanghai Scientific & Technical Publishers 2018  
All rights reserved

上海市版权局著作权合同登记号 图字:09-2015-327 号

总 策 划 苏德敏 张 晨  
丛书策划 包惠芳 田廷彦  
责任编辑 田廷彦  
封面设计 赵 军

线性随机系统:一种关于建模、估计和辨识的几何方法  
[瑞典]林德奎斯特 [意大利]皮奇 著  
赵延龙 赵文虢 译

上海世纪出版(集团)有限公司 出版、发行  
上海科学技术出版社  
(上海钦州南路71号 邮政编码 200235 www.sstp.cn)

上海中华商务联合印刷有限公司印刷  
开本 787×1092 1/16 印张 46.75  
字数 810 千字

2018年3月第1版 2018年3月第1次印刷  
ISBN 978-7-5478-3792-4/O·58  
定价:328.00元(上下册)

## 《现代数学丛书》编委会

### 主 编

李大潜(LI Tatsien, LI Daqian)

复旦大学数学科学学院, 上海 200433, 中国

### 编 委

Philippe G. CIARLET

Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong, China.

Jean-Michel CORON

Laboratoire Jaques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252  
Paris Cedex 05, France.

鄂维南(E Weinan)

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA.  
北京大学数学科学学院, 北京 100871, 中国

励建书(LI Jianshu)

Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and  
Technology, Hong Kong, China.

李骏(LI Jun)

Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA.

林芳华(LIN Fanghua)

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New  
York, NY 10012, USA.

**马志明 (MA Zhiming)**

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, 中国

**Andrew J. MAJDA**

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, USA.

**Cédric VILLANI**

Institut Henri Poincaré, 75231 Paris Cedex 05, France.

**袁亚湘 (YUAN Yaxiang)**

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, 中国

**张伟平 (ZHANG Weiping)**

南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071, 中国

**助 理**

**姚一隼 (YAO Yijun)**

复旦大学数学科学学院, 上海 200433, 中国

# 译者序

《线性随机系统：一种关于建模、辨识和估计的几何方法》一书是著名的控制理论方面的权威、瑞典皇家理工学院和上海交通大学“千人计划”讲席教授林德奎斯特以及意大利帕多瓦大学皮奇教授编著的。林德奎斯特教授现任瑞典皇家工程院院士、中国科学院外籍院士，同时也是俄罗斯科学院外籍院士、匈牙利运筹学会荣誉会员、国际电子与电气工程师协会终身会员 (IEEE Life Fellow)、国际工业与应用数学学会会士 (SIAM Fellow) 和国际自动控制联合会会士 (IFAC Fellow)。林德奎斯特教授的研究涉及数学和工程的广泛领域，包括系统和控制、信号处理、系统辨识等。皮奇教授现任瑞典皇家工程学院外籍院士，同时也是国际电子与电气工程师协会终身会员和国际自动控制联合会会士。皮奇教授的研究集中于随机系统的建模、估计和辨识。林德奎斯特教授和皮奇教授的研究成果，在许多方向都做出了前瞻性和开创性的贡献。

本书旨在对具有二阶矩的随机过程的状态空间建模给出严格的数学理论，并包括这些理论方法在工程和其他学科中的应用。具有平稳性的二阶矩随机过程建模与滤波的研究始于上世纪 40 年代 Kolomogov、Wiener、Cramer、Wold 等人以及之后 60 年代 Kalman 等人的奠基性工作。本书基于 Hilbert 空间的几何理论这一崭新视角来重新审视这个问题。应当说，基于两位作者三十多年来的研究成果，本书建立了基于几何方法的随机系统建模、估计和辨识的完整理论架构，针对这些问题提供了一种新的数学工具，是一本新颖而又坚实的理论专著。

本书分上下两册，由 17 章和 2 节附录组成：第 1 章为导言，第 2 章介绍二阶随机过程的几何性质，第 3 章介绍平稳随机过程的谱表示，第 4 章介绍新息、Wold 分解和谱分解，第 5 章介绍连续时间情形下的谱分解，第 6 章介绍有限维线性随机系统，第 7 章介绍分裂子空间的几何性质，第 8 章介绍 Markov 表示，第 9 章介

绍 Hardy 空间的正规 Markov 表示, 第 10 章介绍连续时间情形下的随机实现理论, 第 11 章为随机均衡和模型降阶, 第 12 章为有限区间和部分随机实现理论, 第 13 章为时间序列的子空间辨识, 第 14 章为零动态与 Riccati 不等式的几何性质, 第 15 章为平滑和内插, 第 16 章为非因果线性随机系统和谱分解, 第 17 章为带输入的随机系统的相关理论, 最后两节附录分别为确定性实现理论的基础知识以及线性代数和 Hilbert 空间简介.

本书的主要特点: 从内容的完整性看, 涵盖了线性随机系统建模、辨识和滤波等主要方面; 从视角的独特性看, 以 Hilbert 空间和 Hardy 空间的基本理论为出发点, 从几何性角度入手, 全面阐述了线性随机系统的相关结论, 体现了作者写作的用心和内容的新颖; 从本书的体系架构看, 阅读本书需要动态系统、线性代数、随机过程以及 Hilbert 空间、Hardy 空间等知识, 这些知识在本书中均有介绍, 从而使本书构成从几何角度阐释随机系统相关理论的一本自洽的专著; 本书所引用的参考文献丰富, 几乎涵盖了随机系统领域的重要研究成果和重要原始文献. 本书适合于控制理论学者、研究生以及自动化工程技术人员参考.

本书的翻译第 1-5、13-17 章以及附录 A 和 B 由赵延龙执笔, 第 6-12 章由赵文虢执笔, 并得到了冯文辉、何雁羽、王西梅、张杭、王梓、谭建伟、李爽、彭程等人的帮助. 感谢田廷彦、龙静、钮凯福、杨凤霞等人的细致和专业的编辑与校对! 此外, 感谢中国科学院数学与系统科学研究院系统控制重点实验室和中国科学院大学对本书翻译的支持! 由于译者学识浅薄, 错误和疏漏在所难免, 恳请专家和读者批评指正.

中国科学院数学与系统科学研究院

赵延龙 赵文虢

2017 年 8 月

# 前 言

本书旨在论述二阶平稳过程的理论和模型,并给出一些我们所认为的在工程和实践过程中的重要应用.在本书开始处讨论的平稳过程基本问题由来已久,自 20 世纪 40 年代,因包括 Kolmogorov、Wiener、Cramèr 及其学生,特别是 Wold 等人在内的工作而有所发展,同时也有其他人的再定义和完善.从 20 世纪 60 年代开始,在现代数字计算机以及 Kalman 等人工作的基础上,平稳随机信号和系统的滤波及建模问题也随之能得到处理研究和深入.但关于随机过程的经典书籍没有讨论前面的问题,特别是对特定状态空间的建模问题,而建模问题在应用中又是极其重要的.

几十年前,当我们第一次打算写这本书时,激励我们的正是我们坚信文献中关于建模、估计和辨识的结果是散乱且不完整的,有时湮没在各种公式中.在我们看来,主要原因是缺少了将不同问题联系起来的概念索链.很多经常遇到的细节和技术总是被习惯性地忽略,即使到了今天依然如此.所以,对于建模问题,我们希望借助 Hilbert 的空间几何和坐标自由思想,提供一些统一的、逻辑上自洽的看法.在这个框架下,基于与过去和将来信息流条件独立的随机状态空间和状态空间建模的概念构成了统一性的基础.

尽管已有 P.E. Caines 和 Gy. Michaletzky 及其他人的书讨论过这些概念中的一部分,但中心要点仍与我们所设想的不同.随着问题的发展,新的理论和应用不断出现.很多在本书中的内容已经发表在期刊论文中,但仍有一些新的结果在本书中第一次出现.

由于数十年的共同努力的结果,本书并不希望成为一本用于“季节性消费”的书.很不谦虚地说,我们期待(至少希望)它能够成为对应用数学中这个重要又美妙问题感兴趣的学生和研究者们的长期参考书.我们感谢很多提出本书中理论的

共同作者们, 特别是 G. Ruckebusch、M. Pavon、F. Badawi、Gy. Michaletzky、A. Chiuso 和 A. Ferrante, 也包括 C.I. Byrnes、S.V. Gusev、A. Blomqvist、R. Nagamune 和 P. Enqvist. 也感谢包括 O. Staffans、J. Malinen、P. Enqvist、Gy. Michaletzky、T.T. Georgiou、J. Karlsson 和 A. Ringh 在内的诸多同行对于手稿的审阅和提出的宝贵建议. 此外, 我们对赵延龙教授、赵文虢教授及其团队专业的中文翻译和编辑表示感谢.

林德奎斯特  
皮奇

# 目 录

|       |                     |    |
|-------|---------------------|----|
| 第 1 章 | 导言                  | 1  |
| § 1.1 | 随机实现的几何理论           | 2  |
| 1.1.1 | Markov 分裂子空间        | 3  |
| 1.1.2 | 可观测性、可构造性以及极小性      | 4  |
| 1.1.3 | 基本表示定理              | 5  |
| 1.1.4 | 预测空间和偏序             | 7  |
| 1.1.5 | 框架空间                | 9  |
| 1.1.6 | 推广                  | 9  |
| § 1.2 | 谱分解和基的一致选择性         | 10 |
| 1.2.1 | 线性矩阵不等式以及 Hankel 分解 | 10 |
| 1.2.2 | 极小性                 | 12 |
| 1.2.3 | 有理协方差扩张             | 12 |
| 1.2.4 | 基的一致选择性             | 13 |
| 1.2.5 | 矩阵 Riccati 公式       | 14 |
| § 1.3 | 应用                  | 14 |
| 1.3.1 | 平滑                  | 14 |
| 1.3.2 | 插值法                 | 16 |
| 1.3.3 | 子空间辨识               | 16 |
| 1.3.4 | 平衡模型降阶              | 17 |

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| § 1.4 本书简介 .....                   | 19        |
| § 1.5 相关文献 .....                   | 21        |
| <b>第 2 章 二阶随机过程的几何结构 .....</b>     | <b>22</b> |
| § 2.1 二阶随机变量的 Hilbert 空间 .....     | 22        |
| 2.1.1 符号和约定 .....                  | 23        |
| § 2.2 正交投影 .....                   | 23        |
| 2.2.1 线性估计和正交映射 .....              | 25        |
| 2.2.2 关于正交投影的事实 .....              | 28        |
| § 2.3 夹角和奇异值 .....                 | 29        |
| 2.3.1 典型相关分析 .....                 | 31        |
| § 2.4 条件正交性 .....                  | 33        |
| § 2.5 二阶过程和移位算子 .....              | 36        |
| 2.5.1 平稳性 .....                    | 38        |
| § 2.6 条件正交以及建模 .....               | 39        |
| 2.6.1 Markov 性质 .....              | 40        |
| 2.6.2 随机动态系统 .....                 | 42        |
| 2.6.3 因子分析 .....                   | 44        |
| 2.6.4 条件正交性和协方差选择 .....            | 49        |
| 2.6.5 因果关系以及自由反馈过程 .....           | 52        |
| § 2.7 倾斜投影 .....                   | 52        |
| 2.7.1 有限维情况下倾斜投影的计算 .....          | 55        |
| § 2.8 连续时间平稳增量过程 .....             | 56        |
| § 2.9 相关文献 .....                   | 57        |
| <b>第 3 章 平稳过程的谱表示 .....</b>        | <b>59</b> |
| § 3.1 正交增量随机过程及 Wiener 积分 .....    | 59        |
| § 3.2 平稳过程的调和分析 .....              | 63        |
| § 3.3 谱表示定理 .....                  | 65        |
| 3.3.1 与随机 Fourier 变换的经典定义的联系 ..... | 67        |
| 3.3.2 连续时间谱表示 .....                | 69        |

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| 3.3.3 关于离散时间白噪声的注 .....               | 69        |
| 3.3.4 实值过程 .....                      | 70        |
| § 3.4 向量过程 .....                      | 71        |
| § 3.5 白噪声泛函 .....                     | 73        |
| 3.5.1 Fourier 变换 .....                | 75        |
| § 3.6 平稳增量过程的谱表示 .....                | 78        |
| § 3.7 重数与 $H(y)$ 的模块结构 .....          | 80        |
| 3.7.1 重数及 $H(y)$ 模块结构的定义 .....        | 82        |
| 3.7.2 基与谱因子分解 .....                   | 84        |
| 3.7.3 绝对连续分布矩阵过程 .....                | 87        |
| § 3.8 相关文献 .....                      | 89        |
| <b>第 4 章 新息、Wold 分解及谱因子分解 .....</b>   | <b>90</b> |
| § 4.1 Wiener-Kolmogorov 滤波及预测理论 ..... | 90        |
| 4.1.1 Fourier 变换与谱表示的作用 .....         | 91        |
| 4.1.2 非因果与因果 Wiener 滤波器 .....         | 91        |
| 4.1.3 因果 Wiener 滤波 .....              | 94        |
| § 4.2 可正交化过程与谱因子分解 .....              | 96        |
| § 4.3 Hardy 空间 .....                  | 100       |
| § 4.4 解析谱因子分解 .....                   | 103       |
| § 4.5 Wold 分解 .....                   | 104       |
| 4.5.1 可反转性 .....                      | 111       |
| § 4.6 外谱因子 .....                      | 113       |
| 4.6.1 不变子空间与因子分解定理 .....              | 115       |
| 4.6.2 内函数 .....                       | 119       |
| 4.6.3 外函数的零点 .....                    | 120       |
| § 4.7 Toeplitz 矩阵与 Szegö 公式 .....     | 121       |
| 4.7.1 Toeplitz 矩阵的代数性质 .....          | 128       |
| § 4.8 相关文献 .....                      | 132       |

|        |                        |     |
|--------|------------------------|-----|
| 第 5 章  | 连续时间情形的谱因子分解           | 134 |
| § 5.1  | 连续时间 Wold 分解           | 134 |
| § 5.2  | 半平面的 Hardy 空间          | 135 |
| § 5.3  | 连续时间下的解析谱因子分解          | 139 |
| 5.3.1  | $W^2$ 中的外谱因子           | 140 |
| § 5.4  | 广义半鞅                   | 143 |
| 5.4.1  | 平稳增量半鞅                 | 146 |
| § 5.5  | 谱域中的平稳增量半鞅             | 147 |
| 5.5.1  | 定理 5.4.4 的证明           | 150 |
| 5.5.2  | 退化平稳增量过程               | 151 |
| § 5.6  | 相关文献                   | 152 |
| 第 6 章  | 有限维线性随机系统              | 153 |
| § 6.1  | 随机状态空间模型               | 153 |
| § 6.2  | 反因果状态空间模型              | 157 |
| § 6.3  | 生成过程和结构函数              | 160 |
| § 6.4  | 状态空间和不依赖坐标选取的表示        | 163 |
| § 6.5  | 可观性, 可构造性和最小性          | 165 |
| § 6.6  | 向前和向后预测空间              | 168 |
| § 6.7  | 谱密度和解析谱因子              | 172 |
| 6.7.1  | 反问题                    | 175 |
| § 6.8  | 正则性                    | 179 |
| § 6.9  | Riccati 方程和 Kalman 滤波  | 183 |
| § 6.10 | 相关文献                   | 187 |
| 第 7 章  | 分裂子空间的几何性质             | 189 |
| § 7.1  | 确定性实现理论回顾: 状态空间构造的抽象想法 | 189 |
| § 7.2  | 垂直相交                   | 191 |
| § 7.3  | 分裂子空间                  | 193 |
| § 7.4  | Markov 分裂子空间           | 198 |

|                                           |            |
|-------------------------------------------|------------|
| § 7.5 Markov 半群 .....                     | 205        |
| § 7.6 最小性和维数 .....                        | 206        |
| § 7.7 最小分裂子空间的偏序 .....                    | 210        |
| 7.7.1 基底的一致选择 .....                       | 212        |
| 7.7.2 排序和分散对 .....                        | 214        |
| 7.7.3 最紧的内部界 .....                        | 217        |
| § 7.8 相关文献 .....                          | 221        |
| <b>第 8 章 Markov 表示 .....</b>              | <b>222</b> |
| § 8.1 基本表示定理 .....                        | 223        |
| § 8.2 标准, 正常和 Markov 半群 .....             | 228        |
| § 8.3 向前和向后系统 (有限维情形) .....               | 232        |
| § 8.4 可达性, 可控性和确定子空间 .....                | 236        |
| § 8.5 纯确定过程的 Markov 表示 .....              | 245        |
| § 8.6 有限维模型的最小性和非最小性 .....                | 250        |
| § 8.7 有限维最小 Markov 表示的参数化 .....           | 253        |
| § 8.8 Markov 表示的正规性 .....                 | 258        |
| § 8.9 无观测噪声模型 .....                       | 262        |
| § 8.10 向前和向后系统 (一般情形) .....               | 265        |
| 8.10.1 状态空间同构和无穷维正实引理方程 .....             | 273        |
| 8.10.2 更多关于正规性的内容 .....                   | 275        |
| 8.10.3 无观测噪声模型 .....                      | 276        |
| § 8.11 相关文献 .....                         | 277        |
| <b>第 9 章 Hardy 空间中的正规 Markov 表示 .....</b> | <b>278</b> |
| § 9.1 Markov 表示的泛函形式 .....                | 278        |
| 9.1.1 谱因子和结构性泛函 .....                     | 280        |
| 9.1.2 Markov 表示的内部三元组 .....               | 282        |
| 9.1.3 状态空间的构造 .....                       | 284        |
| 9.1.4 受限移位算子 .....                        | 287        |

|        |                                     |     |
|--------|-------------------------------------|-----|
| § 9.2  | 最小 Markov 表示 .....                  | 290 |
| 9.2.1  | Hankel 算子的谱表示 .....                 | 292 |
| 9.2.2  | 严格非循环过程和正规性 .....                   | 294 |
| 9.2.3  | 最小 Markov 表示的结构函数 .....             | 297 |
| 9.2.4  | 最小性的一个几何条件 .....                    | 300 |
| § 9.3  | 退化性 .....                           | 302 |
| 9.3.1  | 误差空间的正则性、奇异性和退化性 .....              | 303 |
| 9.3.2  | 退化过程 .....                          | 305 |
| 9.3.3  | 例子 .....                            | 308 |
| § 9.4  | 强制性再议 .....                         | 311 |
| § 9.5  | 无观测噪声模型 .....                       | 313 |
| § 9.6  | 相关文献 .....                          | 315 |
| 第 10 章 | 连续时间情形的随机实现理论 .....                 | 317 |
| § 10.1 | 连续时间随机模型 .....                      | 317 |
| 10.1.1 | 模型的最小化和非最小化 .....                   | 318 |
| 10.1.2 | 状态空间和 Markov 表示的基本思想 .....          | 320 |
| 10.1.3 | 平稳过程建模 .....                        | 322 |
| § 10.2 | Markov 表示 .....                     | 323 |
| 10.2.1 | 状态空间的构造 .....                       | 325 |
| 10.2.2 | 谱因子与结构函数 .....                      | 330 |
| 10.2.3 | 谱因子到 Markov 表示 .....                | 334 |
| § 10.3 | 有限维 Markov 表示的前向和后向实现 .....         | 336 |
| § 10.4 | 谱分解与 Kalman 滤波 .....                | 346 |
| 10.4.1 | 基底的一致选择 .....                       | 346 |
| 10.4.2 | 谱分解, 线性矩阵不等式和集合 $\mathcal{P}$ ..... | 348 |
| 10.4.3 | 代数 Riccati 不等式 .....                | 352 |
| 10.4.4 | Kalman 滤波 .....                     | 353 |
| § 10.5 | 一般情形下的前向和后向随机实现 .....               | 356 |
| 10.5.1 | 前向状态表示 .....                        | 357 |
| 10.5.2 | 后向状态表示 .....                        | 361 |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 10.5.3 平稳过程的随机实现 .....           | 364        |
| 10.5.4 平稳增量过程的随机实现 .....         | 367        |
| § 10.6 相关文献 .....                | 369        |
| <b>第 11 章 随机均衡和模型降阶 .....</b>    | <b>370</b> |
| § 11.1 典型相关分析与随机均衡 .....         | 371        |
| 11.1.1 可观性与可构造性 Gram 算子 .....    | 373        |
| 11.1.2 随机均衡 .....                | 376        |
| 11.1.3 均衡的随机实现 .....             | 378        |
| § 11.2 基于 Hankel 矩阵的随机均衡实现 ..... | 381        |
| § 11.3 随机模型降阶的基本原理 .....         | 385        |
| 11.3.1 随机模型近似 .....              | 388        |
| 11.3.2 与极大似然准则的联系 .....          | 392        |
| § 11.4 受限模型类中的预报误差近似 .....       | 393        |
| § 11.5 $H^\infty$ 中相对误差极小化 ..... | 395        |
| 11.5.1 Hankel 范数近似的简短回顾 .....    | 395        |
| 11.5.2 极小化相对误差 .....             | 400        |
| § 11.6 随机均衡截断 .....              | 405        |
| 11.6.1 连续时间情形 .....              | 406        |
| 11.6.2 离散时间情形 .....              | 408        |
| 11.6.3 离散时间模型的均衡截断 .....         | 412        |
| § 11.7 相关文献 .....                | 414        |

## 第 1 章

# 导言

在本书中,我们考虑如下的反问题:对给定一个平稳随机向量的过程,找到一个由白噪声驱动并且以给定的过程作为其输出的线性随机系统.这个随机实现问题实际上是一个状态空间建模的问题,与其他大多数反问题类似,该问题一般来说有无穷多个解.从应用的角度看,参数化该问题的解并从系统理论的角度来描述它是非常重要的.

我们对该随机实现问题提出了完整的几何理论.其建模问题被归结为 Hilbert 空间的一个几何问题.从概念的角度来看,这样的转换策略有几个优点:首先,没有必要限制在有限维系统中分析,因为几何性质是一般(但不总是)独立于系统维度的;其次,由于几何性质独立于系统维度,所以我们能够分解出仅依赖于坐标选择的模型的属性和算法,实际上,几何方法还是坐标自由的.看起来非常复杂的、依赖于坐标形式的结构特征性质的问题我们都给出简单的几何描述.最后,系统理论的概念,如极小性、可观察性、可构造性等,都可以用几何术语进行定义分析.

这里提出的建立线性随机系统理论的方法应该是自然的、符合逻辑一致性的.传统的理论很少关注线性随机系统的结构概念,即使是最基本的结构概念,比如极小性.这就导致根据公式推导出的滤波算法没有帮助更深入地了解为什么估计会满足递推公式,算法是否具有极小的复杂性等.实际上,在动态估算中许多重要的结构属性,比如递归(微分或差分方程)解的存在性、滤波算法的极小性,以及具体的观测信号处理过程(这个观测信号可能伴随非因果的信息模式)等属性都可以用几何语言在 Hilbert 空间理论下以坐标自由的形式完美地表达和理解.坐标的使用可能使问题模糊化.看来其完全不同的算法,当去掉坐标后实际上可能是等价的.对基于在观测数据上构建的各种子空间上的几何运算的子空间辨识方法,