智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学二18套模拟试卷高分专项精解

仲毅　方浩　主编

超值赠送：

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学二18套模拟试卷高分专项精解

仲毅　方浩　主编

超值赠送：

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学二18套模拟试卷高分专项精解 / 仲毅主编. --北京:中国石化出版社, 2017. 3
ISBN 978-7-5114-3545-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①仲… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 046074 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市朝阳区吉市口路 9 号
邮编:100020 电话:(010)59964500
发行部电话:(010)59964526
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 9.75 印张 236 千字
2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷
定价:26.00 元

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学一18套模拟试卷高分专项精解》
《考研数学二18套模拟试卷高分专项精解》
《考研数学三18套模拟试卷高分专项精解》

本书的编写特点如下：

1．**18套标准模拟试卷，反映最新考试大纲变化**

本书共包含18套标准模拟试卷，试卷严格按照最新考试大纲编写，采用大纲最新题型，难度无限接近研究生入学考试试题，重点针对大纲中的重点、难点、核心考点精心编写，保证试题的高质量、高标准，提高考生复习效率。

2．**注重考试技巧，高效突破难关**

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，

引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编写。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

4. 超值赠送三重好礼

本书超值赠送三重好礼：①赠送智课网价值 199 元、75 课时的 2018 数学基础班线上课程；②扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划；③另有北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊，助广大考研学子一臂之力。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

北京大学状元考研数学备战锦囊

一、复习心得

在考研各科中，我花费了大量时间和精力在数学上。英语中得阅读者得天下，而在理工科中得数学者不一定得天下，但是失数学者绝对失天下！所以一定要在数学上下足功夫，打牢基础。在整个复习过程中，一定要重视基础知识的掌握和理解。经过努力，我数学获得了不错的成绩。

整体计划说明：高等数学教材我用的是同济大学第六版，这本教材很不错。线性代数用的是同济大学出版的第五版。我当时给自己定的做法是，先把书本老老实实过一遍，后面的习题也都做一遍；然后就开始看复习全书，做三遍；最后是猛做真题和模拟题。

大家一般可以把自己的复习分为基础复习阶段（看书本，做习题），中级阶段（做复习全书），临考模拟阶段（做真题、模拟题）。下面我说一下我在这三个阶段中的时间安排以及复习策略。

首先是基础复习阶段，因为我之前学高数的时候学得并不是非常好，于是在高数上面花费了很多时间与精力，先看引理定理和例题，然后做后面的习题，基本每题都做！线性代数对于我来说是比较简单的，在初次学的时候就已经把后面的习题基本都做了，所以基础复习阶段在线性代数上面并没有花费太多时间，只是看了看定理，做了一下例题（注意是例题，不是后面的习题）。我是七月份开始复习的，高数当时看得比较仔细，加上做习题，直到八月初才把高数看完，又花了半个月的时间把线性代数看完。

八月下旬开始中级阶段，中级阶段就一件事：复习全书（李永乐）！我觉得复习全书相当不错。前面的定理要再过一遍，针对定理的习题也一定要做，后面的习题也要做。我前前后后做了三遍，第一遍比较仔细，也比较慢，后面再做就比较快了。大致到了十一月才做完。

十一月左右开始做真题和模拟题，做一套少一套，所以要认真做，要掐时间做。然后评分，总结，记没记牢的知识点。真题和模拟题第一遍做完之后，根据自己平时的得分，你也就大致知道了自己考试中的分数了。接着就是一直不停地做真题和模拟题，一直做到考研那一天。

我在复习过程中遇到的最大困难就是：自己——果然自己才是最大的敌人。每天二事不做，就只是读书、读书，内心十分烦躁，所以一定要克服内心的浮躁。现在回想起来每天只为一个目标而奋斗，反倒是比较幸福的。

复习那么久，大家都摩拳擦掌，想要上战场一展拳脚。但是，数学是比较灵活的，遇到不会做的题目也极有可能，所以在考前一定要有心理准备，如果在考场上心理防线崩塌那就功亏一篑了。如果遇到难题做不出来，可以先跳过，做完所有题目之后，再回头来做，一定要记住一句话：不到最后一刻，决不放弃！

二、考试中的解题技巧

1. 已知 $y = f(x)$ 是由方程 $\cos(xy) - \ln y + x = 1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{2}{n}) - 1) = ($　　$)$

(A)2　　　(B)1　　　(C) -1　　　(D) -2

详解：将 $x=0$ 代入方程 $y=f(0)=1$，在方程两边求导，得到 $-\sin(xy)(y+xy') - \frac{y'}{y} + 1 = 0$，代入 $x=0, y=1$，知 $y'(0) = f'(0) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} n(f(\frac{2}{n}) - 1) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n}) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2$$，故应选(A)

技巧分析：这类题有代表性，后边所求一般要用到前面表达式的导数。注意往导数定义或者洛必达法则上靠。

2. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则(　　)

(A)矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B)矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C)矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D)矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

详解：把矩阵 A,C 列分块如下：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n)$，$C=(r_1,r_2,\Lambda,r_n)$，由于 $AB = C$，则可知 $r_i = b_{i1}\alpha_1 + b_{i2}\alpha_2 + \Lambda + b_{in}\alpha_n(i=1,2,\Lambda,n)$，得到矩阵 C 的列向量组可用矩阵 A 的列向量组线性表示。同时由于 B 可逆，即 $A=CB^{-1}$，同理可知矩阵 A 的列向量组可用矩阵 C 的列向量组线性表示，所以矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价。应该选(B)

技巧分析：题型固定，且可以当作结论记住。

3. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$，$y_2 = e^x - xe^{2x}$，$y_3 = -xe^{2x}$ 是某个二阶常系数线性微分方程三个解，则满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解为：______

详解：显然 $y_1 - y_2 = e^{3x}$ 和 $y_2 - y_3 = e^x$ 是对应的二阶常系数线性齐次微分方程两个线性无关的解，由解得结构定理，该方程的通解为 $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$，其中 C_1, C_2 为任意常数。把初始条件代入可得 $C_1 = 1, C_2 = -1$。所以答案为：$e^{3x} - e^x - xe^{2x}$

技巧分析：这类题，首先要理解微分方程的解的构成。还要看清题，是几阶微分方程。题型也固定，知道方法了就不难了。

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$. 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

(2)若 α,β 正交且为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$

解析：$f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

$$= 2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3)(2\alpha\alpha^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3)(\beta\beta^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3)(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

所以二次型f对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

(2)证明:设$A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$,由于$|\alpha| = 1, \beta^T\alpha = 0$

则$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha|\alpha|^2 + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$,所以$\alpha$为矩阵对应特征值$\lambda_1 = 2$的特征向量;$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta|\beta|^2 = \beta$,所以$\beta$为矩阵对应特征值$\lambda_2 = 1$的特征向量;而矩阵$A$的秩$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leqslant r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$,所以$\lambda_3 = 0$也是矩阵的一个特征值。故$f$在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$

技巧分析:第二问中化为标准形,并不只有上述一种方法,对于一些抽象矩阵,要理解标准形的性质,利用这些性质侧推,这对证明题很有用。平时多练习,才能把握所考知识点,临场不乱。

三、总结一下,赠送考生3个锦囊!

锦囊一:重视基础,大胆细心

考研数学注重对基础知识的掌握,所以复习的时候一定要把基础知识掌握牢固。基础题也很容易出错,所以在做题的过程中要细心,不然再简单,你做错了还是枉然!

锦囊二:多做真题和模拟题

真题和模拟题很重要,一定要多做,考过的知识点会反复考的。其实,数学难就难在知识点太多了,你不一定都能掌握,但是你如果知道了要考的知识点,有针对地突破,就很好办了。

锦囊三:提高做题速度

数学考试时间对于我来说总是不够,我相信对于大多数考生也是这样!所以一定要提高做题速度。提高做题速度的一个方法就是:掌握一些快速解题技巧,多做题,做到熟能生巧。

北京大学2013级城市与环境学院　姚亚飞

清华大学状元考研数学备战锦囊

一、复习心得

数学是理工经管类专业必考的公共课之一，除了某些专业选择考两门专业课而不考数学外，其他基本都需要考数学，考研总分是500分，其中政治和英语的满分都是100分，数学和专业课的满分都是150分，从分值上就可以看出，数学成绩是非常重要的，也是历届考生考研成绩存在最大差距的一门公共课，数学成绩的高低在很大程度上决定了考研的成败。一般数学都是国家统一出题，我们可以查到考点，买到历年真题，相对来说也是比较好复习的一门课，只要我们努力认真扎实地复习了，一般能考出好成绩。

我报考的专业是环境工程，我们考的是数学二，数学二包含两门科目，高等数学(78%)和线性代数(22%)。复习的第一步是选择一套合适的复习资料，考研数学并没有大家想象中的那么难，它不是数学竞赛，而是研究生入学考试，我选择的考研教材是同济大学的高等数学和线性代数，版本无所谓，内容基本没变，最好是用自己大学上课的教材，这样自己用的比较习惯，有亲切感，而且上面可能还有自己的笔记，能更好更快地理解各个知识点，进入备战状态。

选好了教材之后，接下来就是要有一个“扫盲”的过程，即对着考试大纲上面的考点，将整套教材全部看一遍，同时也要适当地看些例题，来加深对这些知识点的理解。每一个考点都必须认真复习，切记不要留下盲点，这个过程的时间可以自己把握，基础不同的同学可能花的时间也不一样，根据自己的实际情况来进行时间的把握。这是最基础的一步，无论是否报考研辅导班，都需要经历这个过程，也可以叫作初级复习阶段。

对于不报班的同学来说，当考点全部看完之后，接下来就是要培养我们对这些知识点的灵活运用的能力了，就是要掌握考研题型，将初级的基础知识升华到考研的层次上来。先梳理每一章的知识要点，然后根据每一个点来进行展开，针对历年考题中与这个知识点相关的一些考题，一定要十分注意，要吃透，融会贯通地理解考题的实质，因为很多考点都是每年必考，只是会换个形式而已，最好是做完例题，再要找一些类似的题目来巩固一下，确保自己对这个知识点真正地理解了。在整个过程中，我们需要准备一个笔记本，记录我们不会和不熟悉的考点，并把对应该考点的典型题目记录下来，这是我们的软肋，一定要反复强化记忆，否则他们将会成为我们的失分点。

而对于上考研辅导班的同学来说，最重要的是上课记笔记，有经验的老师会把重点的知识点、技巧、题型融会在课堂内容中，他们会在备课的过程博采各家之长。所以课堂上记笔记就显得尤为重要了，自己的笔记一定要反复看，切记把笔记丢在一边睡大觉，虽然你把重点记在本子上了，但它并没有进入你的大脑。同样例题也需要反复做，从而达到吃透笔记的效果，这样才能不浪费时间。不愿意反复看笔记也是我们在考研中常常遇到的一个问题，总以为抄了一遍，自己就记住了，其实不是，需要反复地强化训练。确实也有一些人，他们可能有些过目不

忘的能力,但是一般人而言,还是要反复地看,我们可以把笔记本随身携带,随时看,随时记。

接下来进入到做真题阶段。对于真题,我觉得应该是像正常考试一样,卡好时间,最好是与考试时间对应的时间点来做,一方面能训练我们的做题速度,另一方面能更好地把我们的兴奋点调到与考试时一致。做完真题,我们都要对答案,给自己判个分数,判分是对自己复习结果的一个量化展示,同时不要因为分数高而沾沾自喜,也不要因为分数低就妄自菲薄,一定要客观地对待这个分数,然后把真题中失分的题目好好地研究,在笔记本中做好记录,在后面的复习中反复强化,确保考试中不会再失分,你会发现我们的真题会越做越好,因为盲点都在被一一扫除。当我们做完了真题以后,千万不要以为万事大吉了,一定要做好最后的冲刺,那就是做模拟题。

做模拟题跟做真题一样,限时做完试题,然后自己批改,在这个过程中,刚开始可能会有点不适应,因为模拟题基本都是新题,所以需要一点时间来适应。做模拟题这个过程就是一个实战演练的过程,让我们提前适应考试的状态。我觉得无论真题做得好或者不好,最后的模拟题一定要做,这个过程也是对心态的一个训练,遇到之前没有做过的题目,该如何应对,非常重要。

在考研的过程中,我们也会迷茫和困惑甚至懈怠,在这个时候,不妨看看历届考研同学写的考研心得来鼓励自己,学习要抓紧时间,但同时要注意劳逸结合,在自己表现不错的时候,适当奖励一下自己,买点好吃的,看一部好看的电影等等。如果考研过程中能很好完成上述的几个过程,在考试过程中保持一个好的心态,那么一定会取得好成绩。

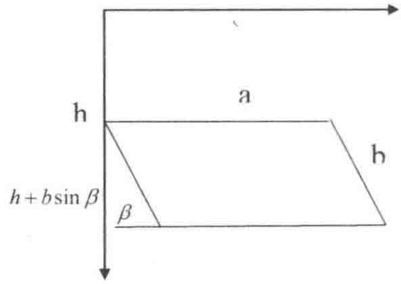
二、考试中的解题技巧

对于考试技巧,可能不同的人有不同的方法,我就简单说一下我自己的经验,一般拿到试卷,都按照题目顺序往下做,或者也可以根据自己平时做题的习惯(有人喜欢先做大题)。一般出题都是有一个难度梯度的,都是难度不断增加的一个过程,但是填空和选择题不一定完全按照这个顺序,很多时候最难的那个题不是最后的一个,而是倒数第二、三题,所以按照顺序做,一方面可以增加自己的信心(前面题目相对简单),如果你的选择题做到倒数第三个,你花了五分钟还是不会,那么就可以直接跳过往下做了,可以回头再来思考这个题目。还有就是打草稿一定要注意清楚,这样能方便我们后面有时间来检查自己的试卷。对于选择填空题,一定学会用图来解决问题,有的题目画图一眼就能看出答案,比计算来得更直接。能画图的题目一定要习惯性地在草稿纸上作图,进行分析,可以节省时间,提高效率。例如:

边长为 a 和 b 的矩形薄板与页面呈 β 角斜沉于液体中,长边平行于液面位于深 h 处,设 $a>b$,液体的比重为 γ,求薄板受到的液体压力。

这是一个典型的一元函数积分学的应用,遇到这个题目,我们首先要画出示意图,建立坐标系,为了方便,我们可以将坐标系的 X 轴铅直向下,其次,我们要迅速联想到物理学中关于物体在液体内部压力计算公式,从图中可以看出,一边长的深度为 h, 另一边长的深度为 $h+b\sin\beta$,在 $[h, h+b\sin\beta]$ 中任取 $[x,x+\mathrm{d}x]$,相应的薄板上一小横条,长 a, 宽 $\mathrm{d}x/\sin\beta$,遇事所受到的压力为 $\mathrm{d}P=\frac{\gamma xa}{\sin\beta}\mathrm{d}x$,则整块板受到的压力为:

$$P = \int_{h}^{h+b\sin\beta} \frac{a\gamma x}{\sin\beta} dx = ab\gamma(h + \frac{b\sin\beta}{2})$$



这种题目可能出现在选择或者填空题中,所以图文并用是一个比较好的解决问题的方法,能够快速准确地解决问题。

对于一些选项比较相似的选择题,我们可以根据选项的微小差异通过排除法加计算来快速解答。

如:设 $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\ dx, N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\ dx$,则有(　　)

A. $M<1<N$.　　B. $M<N<1$.　　C. $N<1<M$　　D. $1<M<N$.

对于这个题,我们对四个答案进行比较,发现 A,B 表示 M 是小于 1,C 和 D 则是 M 大于 1,我们可以先比较 M 与 1 的大小关系,就能排除掉其中的两个答案。

$\sin(\sin x)$, $\cos(\cos x)$ 均在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续,由 $\sin x \leqslant x$ 推出 $\sin(\sin x) \leqslant \sin x$ 且不恒等于 x,$(x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right])$,从而推出$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\ \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = 1$,即 $M < 1$,从而排除掉答案 C 和 D,然后我们只需要比较 N 和 1 的大小关系,$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x$ 将 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 带入得,$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)\mathrm{d}t > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t = 1$,从而 $N > 1$,因此答案选 A。

对于线性代数部分,其实是比较容易得分的地方,我们在复习时一定要对着考试大纲弄清楚每一个知识点,基本上考试拿满分是没有问题的。对于看起来无从下手的题目,例如涉及 n 次计算的题目,我们可以从一次二次,先算几个有限的次数,找找规律,例如已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$求 A^n

看到这个题目,我们首先将这个矩阵进行分块,分块为$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$,则 $A^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$,$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$。则 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$,$B = 3E + J, J^3 = J^4 = \ldots = 0$,于是

$B^n = 3^n E + C_n^1 3^{n-1} J + C_n^2 3^{n-2} J^2$,

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}(3, -1), C^2 = 6C, \cdots, C^n = 6^{n-1}C$,

$$
\text{则 } A^n = \begin{bmatrix} 3^n & C_n^1 3^{n-1} & C_n^2 \cdot 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & C_n^1 \cdot 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 6^{n-1} & -6^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -9 \cdot 6^{n-1} & 3 \cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}
$$

而当我们遇到一些难题时，只要认真地思考学过的基本知识，就会有思路，例如 2010 年的考研真题的 21 题：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

看到这个题目，很多人可能就会有点不知道从哪儿下手，其实，很容易，仔细联想一下，一阶导数，连续，可导可能跟中值定理有关，我们就可以根据题干的意思来构造一个函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，这样构造函数，是根据已知条件 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{3}$，同时为了能与最后要证明的式子靠近，当两边同时求导数，就会出现我们要的结果。

对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)$，

对于 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},0\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right), F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)$

两式相加得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

三、赠送考生的 3 个锦囊

锦囊 1：给自己一个坚定的考研理由，找一个学习伙伴，做好破釜沉舟的准备。考研切记打酱油心态，一定要目标明确，不能三心二意，不要羡慕周围保研和找工作同学的生活，找一个跟自己目标一致的同学一起复习，互相鼓励，互相监督，效果还是很明显的。考研是一个自主性比较强的过程，不同于高考，因为所有的事情都由自己来安排，没有老师和家长的监督和跟踪。不能一边考研一边找工作，专心考完之后，再做下一步的打算，否则两者都会受到影响。

锦囊 2：数学一定要天天练习，一天不练很容易生疏才能，制订一个完善的复习计划，复习过程按照复习计划按部就班地进行，作息规律，只有静下心来复习，效率才会高。懈怠时，看一些励志的考研故事，当复习成果不错时，适当给自己一些奖励。

锦囊 3：考试过程中保持好心情和好心态。考试时用自己常用的文具，穿自己喜欢的衣服，这样一方面保持好心情，同时在遇到难题时，看着自己熟悉文具会有种亲切感，能帮助我们更好地面对难题。遇到不会的题思考一下，如果还是不会，可以暂时跳过，回头再来做，可能做后面的题目会给你一些灵感来帮助思考前面的问题。当遇到问题的时候，心里告诉自己你不会别人也未必会，然后静下心来认真思考，不能着急，人在着急的时候智商将严重降低，不利于解决问题。

清华大学环境学院（2013 级）研究生　赵云云

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，$\varphi(x)=\int_0^{\sin x}f(tx)\,\mathrm{d}t$，则在 $x=0$ 处，下列正确的是(　　).

(A) $\varphi'(x)$ 无界　　(B) $\varphi'(x)$ 为无穷大量

(C) $\varphi'(x)$ 连续　　(D) $\varphi'(x)$ 不连续

3. 设 $f(x,y)$ 为区域 D 内的函数，则下列各种说法中不正确的是 (　　).

(A) 若在 D 内，有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数

(B) 若在 D 内，$\dfrac{\partial f}{\partial x}x^2+\dfrac{\partial f}{\partial y}y^2=0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数

(C) 若在 D 内，有 $\mathrm{d}f(x,y)\equiv 0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数

(D) 若在 D 内，有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}y=0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数

4. 设平面区域 D: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$，$f(x,y)$ 是区域 D 上的连续函数，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 (　　).

(A) $2\pi\int_1^3 rf(r)\,\mathrm{d}r$　　(B) $2\pi\left[\int_1^3 rf(r)\,\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r)\,\mathrm{d}r\right]$

(C) $2\pi\int_1^3 rf(r^2)\,\mathrm{d}r$　　(D) $2\pi\left[\int_1^3 rf(r^2)\,\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r^2)\,\mathrm{d}r\right]$

5. 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于(　　).

(A) $\ln 3-1$　　(B) $-\ln 3-1$　　(C) $-\ln 2-1$　　(D) $\ln 2-1$

6. 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在(　　).

(A) x_0 的某个邻域内单调增加　　(B) x_0 的某个邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值　　(D) x_0 处取得极大值

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有 (　　).

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$　　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

10. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$________.

11. $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$________.

12. $\displaystyle\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x\pi}t|\sin t|dt}{x^2}=$________.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{\arctan x/3}, & x>0\\ ae^{x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

14. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^T$，$a>0$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

16.（本题满分 10 分）

曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 α. 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少，$f(0)=0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式：$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$，其中常数 a，b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

18.（本题满分 10 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$. 求：

（Ⅰ）$g(x)=\displaystyle\lim_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（Ⅱ）$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}g(x)$.

19.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，D 为区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$，证明：$\displaystyle\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\geqslant(b-a)^2$.

20.（本题满分 10 分）

设 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^t f(u^2)du\\ y=[f(t^2)]^2\end{cases}$，其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

21.(本题满分 11 分)

一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 个小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时?

22.(本题满分 11 分)

k 为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$有唯一解、无解、有无穷多组解? 在有解的情况下，求出其全部解.

23.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一，试求

(Ⅰ) a 的值;

(Ⅱ) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

模拟试卷(一)参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】极限、间断点

【解题分析】由已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=0$;

当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=1+x$; 当 $x=1$ 时，$f(x)=1$; 当 $x>1$ 时，$f(x)=0$.

所以 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -1, \\ 1+x, & -1<x<1, \\ 1, & x=1, \\ 0, & x>1, \end{cases}$，不难确定在 $x=1$ 点处 $f(x)$ 间断，选(B).

2.【考点提示】函数的有界性、无穷小及连续性

【解题分析】$x=0\Rightarrow\varphi(0)=0$，$x\neq 0\Rightarrow\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{tx=u} =\frac{1}{x}\int_0^{x\sin x} f(u)\,\mathrm{d}u$,

$$\Rightarrow\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^{x\sin x} f(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{x}f(x\sin x)(\sin x+x\cos x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varphi'(x)&=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\int_0^{x\sin x} f(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{x}f(x\sin x)(\sin x+x\cos x)\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\int_0^{x\sin x} f(u)\,\mathrm{d}u\right]+2f(0)\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}f(x\sin x)(\sin x+x\cos x)+2f(0)=-f(0)+2f(0)=f(0)\end{aligned}$$