HIT

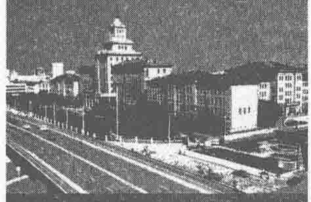
数论经典著作系列

Cohomology of Number Fields

数域的上同调

[德] 尤尔根·诺伊基希 [德] 亚历山大·施密特 [德] 凯·温伯格 著
陶利群 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数论经典著作系列

数域的上同调

Cohomology of Number Fields

[德] 尤尔根·诺伊基希
[德] 亚历山大·施密特
[德] 凯·温伯格 著

陶利群 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08-2016-102 号

内 容 简 介

本书可看作 Jürgen Neukirch 的名著《代数数论》的后续之作，它既可作为数论方向学生的教材，也可作为该领域研究人员的参考书. 本书第一部分的代数理论极为详尽地讨论了射有限群的上同调，为第二部分的算术应用做了充分准备.

本书事实上对代数数论中众多的中心课题进行了完全的讨论，对许多历史文献遗留下来的问题进行了细致的处理，对包括 Piotou-Tate 定理在内的一些重要结果提供了详细的证明.

与其他同主题的著作相比，本书由于内容自封和限于讨论 Galois 上同调和维数不超过 1 的 Galois 模，因而可读性更强. 鉴于本书对细节的完美处理和对数域的上同调理论系统全面的阐述，我们相信它一定会得到广大专家学者的青睐.

Translation from the English language edition:
Cohomology of Number Fields
by Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt and Kay Wingberg

图书在版编目(CIP)数据

数域的上同调/(德)尤尔根・诺伊基希，(德)亚历山大・施密特，(德)凯・温伯格著；陶利群译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 1
ISBN 978-7-5603-6798-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①尤…②亚…③凯…④陶… Ⅲ. ①上同调-研究 Ⅳ. ①O189.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 174743 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 41　字数 1156 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6798-9
定　　价　98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

序　言

作为我们的朋友和老师, Jürgen Neukirch于1997年初逝世了, 留下他关于《数域的上同调》这一著作的构思. 他认为这可以作为他的专著《代数数论》的第二卷. 射有限群的上同调, 以及部分的局部域和整体域的上同调在Jürgen Neukirch与我们通信之前已经出现在初稿中.

在最后两年即接近构思的末期, 面前的这本书产生了, 虽然我们知道这只是Jürgen Neukirch计划的一部分. 所以大家可能会觉得我们的书的主题令人高兴, 还会看到哪些是我们打算做的，而其他则是我们没有计划和意识到的.

Jürgen Neukirch呈现的激励和准确的风格、高水平的数学语言曾经一直是我们的榜样. 遗憾的是, 我们还没有拥有那么高超的技能，但是我们的辛劳结束了, 希望本书对读者还是一样的有益.

Alexander Schmidt, Kay Wingberg

1999年9月于Heidelberg

引言

数论——数学中最漂亮、迷人的领域之一, 在过去的几十年已经取得重大进展, 且仍然在迅速发展. J.Neukirch在他的书《代数数论》(*Algebraic Number Theory*)的前言的开始写道:

“在所有的数学分支中, 数论占有理想化的地位, 这类似于数学在科学中的地位.”

尽管本书的合著者希望重述这一观点, 我们想强调当前数论的强劲发展很大程度上也归功于它与几乎所有的其他数学分支的相互影响. 特别是算术几何的几何(以及随之而来的函子)观点用到来自分析、几何、群论和代数拓扑的技术, 并深受它们的启发. 这种相互影响在20世纪50年代随着在局部、整体类域论中引进群的上同调(由此导致类域论的大量简化和统一)就已经开始了.

本卷书的目的是既为学生提供教科书, 又为在数论中的上同调问题上工作的数学家提供参考书. 它的主要课题是局部和整体域上的Galois模, 这些对象通常与算术概型相联系. 由于素材数量巨大, 我们被迫以某种方式限制题材. 为了让本书的篇幅合理, 我们最终决定将注意力集中于维数小于或等于1的情形, 即限于整体域本身和含于它们的各种子环. 中心定理和常用的定理, 例如G.Poitou与J.Tate的整体对偶定理, 以及有些结果如I.R.Šafarevič关于将可解群实现为整体域上的Galois群的定理, 很长时间以来已经成为代数数论的一部分. 但是这些结论的证明散见于许多原作, 有些包含严重的错误, 有些甚至一直没有发表. 作者的最初动机是填补这些空白, 希望我们努力的结果对读者有用.

自20世纪50年代后的许多年中, 类域论的观点稍微改变了. 经典方法用局部或整体基域的算术不变量描述有限扩张的Galois群. 现代观点的本质特征是代之以考虑无限Galois群, 即通过绝对Galois群G_k同时研究域k的所有有限扩张集. 这些群固有的拓扑即Krull拓扑使它们成为Hausdorff、紧致、全不连通的拓扑群. 暂时忽略它们的数论动机而转向研究这种类型的拓扑群即射有限群这种本身就有趣的对象是有益的. 由于这个原因, 数论专家已经发展了大量的“射有限群的代数”, 不是把它当作目的, 而是总想着将它应用到数论中去. 然而, 许多结果只能用射有限群阐述, 而且它们的模与数论背景无关.

本书的第一部分讨论“射有限代数”, 而算术应用包含在第二部分. 这种划分不应该视为严格的; 但有时对一个给定的结果了解有多少代数, 有多少数论是有好处的.

算术应用的重要特征是经典的互反律反映在相关的无限Galois群的对偶性质中. 例如, 局部域的互反律对应局部上同调的Tate对偶定理. 事实上, 这个对偶性质是如此的强有力, 以致它可能对每个素数p来描述局部域的极大p-扩张的Galois群. 这些群是自由群或是现在被称为Demuškin群的这种有非常特殊结构的群. 这个结果后来成为U.Jannsen和本书的第三作者描述p-进局部域的整个绝对Galois群的基础.

整体情形是截然不同的. 正如J.Tate已经注意到的那样, 整体域的绝对Galois群不是对偶群. 几何的观点解释了这种现象: 对偶来自曲线, 而不是它的广点. 因此自然要去考虑平展(étale)基本

群$\pi_1^{\text{et}}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S}))$, 其中$S$是$k$的位的有限集. 翻译成Galois群的语言, 意思是: $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$的基本群是整个群$G_k$的商群, 即$k$的在$S$外非分歧的极大扩张的Galois群$G_{k,S}$. 若$S$包含所有整除模$M$的挠部分的阶的位, 核心的Poitou-Tate对偶定理提供了维数1和2的局部化核之间的一个对偶. 连同Tate局部对偶, 这也能用9项长序列的形式表示. Poitou-Tate对偶定理对位的无限集S仍然成立, 并且利用局部上同调群的限制乘积拓扑能把长正合列推广到这种情形. $G_{k,S}$在S有限时是否是对偶群的问题由第二作者作出了肯定的回答.

大家从上面的考虑可能已经明白本书使用的基本技术是Galois上同调, 它对类域论是必不可少的. 从更几何的观点来讲, 要是将全部结果也用平展上同调的语言阐述出来就更好了. 但是, 我们决定将它留给读者去做. 首先, 与Grothendieck惯用语相联系的层的上同调的技术在文献中被充分涵盖了(见[6, 143, 234]), 并且无论如何, 在Galois与平展语言之间互译是一个容易完成的练习(至少在维数$\leqslant 1$时是如此). 进一步的原因是涉及位的无限集(当用到Dirichlet密度定理时需要)或者无限扩域的结果用Galois上同调的语言比用射概型的平展上同调的语言来表述要好得多. 但是, 当用几何的观点似乎带来更好的洞察力或直观时, 我们已经加上了相应的注记或脚注. 由于缺少Grothendieck拓扑而带来的一个更严重的缺陷是我们不能用平坦上同调和Artin-Mazur的整体平坦对偶定理. 因此, 我们在第8章用到一个特殊的构造——群B_S, 它度量系数为单位根群的第一平坦上同调群的局部核的大小.

现在让我们更仔细地来看一下各章的内容. 第一部分论述数论应用的代数背景. 第1章包含熟知的基本定义和结果, 它们可以在几本专著中找到. 这种情况对第2章就不全对了: §2.2中Hochschild-Serre谱序列的边缘同态的清晰描述对专家而言当然是熟知的, 但它在文献中却找不到. 此外, §2.3的材料是熟知的, 但它只是包含在原始论著中.

第3章考虑射有限群的抽象对偶性质. 在现存的也论及这些材料的大部分专著中, 我们应该提到J.-P.Serre的名著《Galois上同调》(*Cohomologie Galoisienne*)和H.Koch的书《p-扩张的Galois理论》(*Galoissche Theorie der p-Erweiterungen*). 但是许多细节到目前为止都只见于原始文章中.

第4章考虑射有限群的自由积. 它们对整体Galois群可能分解成非Abel局部Galois群是重要的. 这种现象对整体域的Galois群仅在相当少有的退化情形发生, 而对无限指标子群却很常见. 为了阐述这样的结论(比如第10章中Riemann存在定理的算术形式), 我们在§4.3发展射有限群从的自由积的概念.

第5章讨论Iwasawa理论的代数基础. 我们将不以通常矩阵计算的方式(即使它对一些数学家而言更能接受, 因为这样更具体)证明Iwasawa模的结构定理, 而是基本上采用Bourbaki的《交换代数》(*Commutative Algebra*)中的陈述方式, 目的是让它适用于更一般的情形. 而且我们在同构意义下陈述关于这些模的结构的结果, 就像U.Jannsen陈述的那样, 它们是用群环上模的同伦理论得到的.

算术部分的核心技术性结果是著名的Poitou-Tate整体对偶定理. 我们在第6章以关于Galois上同调的一般事实开始. 第7章讨论局部域, 其前三节大致采用J.-P.Serre在《Galois上同调》中的陈述方式, 接下来的两节用来清楚地决定局部Galois群的结构. 在本书的核心章节第8章中, 我们给出Poitou-Tate定理, 包括它到有限生成模上的推广的完整证明. 我们从收集S-理想元类群的拓扑结构、普范和上同调的基本结果开始, 然后在§8.4和§8.6中给出证明. 我们在证明中应用第3章已经证明了的Nakayama-Tate和Poitou这些群论方面的定理.

我们在第9章收获前面几章努力的回报. 我们证明几个经典数论中的结果, 例如Hasse原理和Grunwald-王定理. 在§9.5考虑嵌入问题并陈述K.Iwasawa定理, 其大意是: $\mathbb{Q}^{\text{ab}}$ 的绝对Galois群的极大射可解因子自由. 在§9.6, 我们给出关于将有限可解群实现为整体域上的Galois群的Šafarevič定

理的完整证明.

第10章主要考虑限制分歧. 从几何上讲, 我们现在考虑曲线Spec($\mathcal{O}_{k,S}$), 与之对比的是我们在第9章主要关注点Spec(k). 不用说, 现在事情变得困难得多. 像S-理想类群或p-进调整子这样的不变量进入舞台并建立起新的算术障碍. 我们的研究由数域与函数域之间的类比引导. 我们从代数几何中对后者知之甚多, 并且我们尽力在数域中建立类似的结果. 例如, 利用第4章的群论技术, 能够证明数论中类似Riemann存在定理的结果. Spec($\mathcal{O}_k$)的基本群, 即数域k的极大非分歧扩张的Galois群是数论中长期未解决的类域塔问题的主题, 它最终由E.S.Golod和I.R.Šafarevič给出否定的回答. 我们在§10.8中介绍它们的证明, 这显示了群论和上同调方法的力量.

第11章讨论Iwasawa理论, 它是数域和函数域之间的类比在概念上的必然延续. 我们专注于p-进局部域和数域的Iwasawa理论的代数方面, 首先陈述大家通常能从标准文献中找到的经典结果, 然后利用Iwasawa模的同伦理论证明关于附于p-进局部域和数域的某些Iwasawa模的结构的更深远的结果. 我们对Iwasawa理论的解析方面仅作描述, 因为有几本专著涉及了这个主题, 例如L.Washington的书[253]. 最后阐述并讨论Iwasawa理论的主猜想, 至于其证明, 请读者参见B.Mazur和A.Wiles的原文[137, 256].

我们在最后一章给出所谓远Abel几何——一个由A.Grothendieck发起的计划的概述. 或许这个理论的第一个结果在该计划存在之前就得到了, 它是J.Neukirch和K.Uchida的定理, 这个定理断言: 整体域的绝对Galois群作为射有限群在同构意义下刻画了这个域. 在前两节, 我们在数域情形下给出这个定理的证明, 在最后一节回顾猜想以及它们的现状.

读者很快就会认识到本书不是完全自封意义下的基础教材. 我们随意用到代数、拓扑和算术中众所周知且包含在标准教科书中的事实. 特别地, 读者应该熟悉基础数论. 尽管只假定读者具有某种极低程度的知识, 我们在下个阶段尽可能做到完整和自封. 我们给出几乎所有主要结果的证明, 并且尽量不使用只能在原始论文中才能找到的参考资料. 这就使得有兴趣的学生可能用本书作为教材, 让他们发现大部分理论组织连贯, 在一个地方很容易理解. 另一方面, 本书打算给职业数学家在局部和整体域方面一个参考.

最后对章节末的习题说几句. 它们中的一些与其说是习题, 不如说是因为不太适合进入正文而作的补充说明. 但是, 它们中大多数还是计划让有兴趣的读者去解答的. 然而它们的提法偶尔可能会有错误. 如果这种情况出现, 读者就把它当作额外的任务去给出正确的表述.

我们要感谢许多朋友和同事在数学上对此书的各个部分进行审查, 特别是Anton Deitmar, Torsten Fimmel, Dan Haran, Uwe Jannsen, Hiroaki Nakamura与Otmar Venjakob. 我们感谢Inge Meier夫人用TEX编辑了大部分手稿, 特别感谢Eva-Maria Strobel的认真校对. 衷心感谢Frazer Jarvis检查全部手稿, 修改我们英语中的错误.

Alexander Schmidt, Kay Wingberg

1999年9月于Heidelberg

第二版前言

现在的第二版是第一版的修订版和扩展版. 我们已经尽力改进阐述并在一定程度上重组内容; 此外, 我们加入了一些新材料. 这样做的不幸结果是第一、二版的页码不相容.

在代数部分, 你将发现关于滤化上链复形, 谱序列的退化, 射有限群的Tate上同调的新章节. 在其他主题中, 算术部分包含一个关于非分歧和顺分歧扩张的对偶定理的新章节, 对实数域的2-扩张的细致分析, 以及关于给定局部条件下可解Galois群的Neukirch定理的一个完整证明.

自第一版出版以来, 许多人给我们送来勘误表、建议或者以其他方式对该版做出贡献. 我们希望对他们所有人表示感谢. 特别地, 我们要感谢Jakob Stix与Denis Vogel对此版新加部分的意见, 以及Frazer Jarvis再次为修改我们的英语问题做出的杰出工作.

Alexander Schmidt, Kay Wingberg

2007年11月于

Regensburg, Heidelberg

目 录

第一部分 代数理论

第二部分 算术理论

第一部分 代数理论

第 1 章　射有限群的上同调

射有限群是拓扑群, 它作为无限域扩张的Galois群或更一般地作为概型的平展基本群自然地出现在代数数论中, 它们的上同调群经常包含重要的算术信息.

在第1章, 我们将研究作为关注对象的射有限群本身, 不涉及它将在本书的第二部分讨论的算术应用.

§1.1　射有限空间与射有限群

我们现在要来描述的射有限群的基础拓扑空间是很具体的一种类型, 为此, 我们利用反向(或射影)极限的概念. 我们请读者参见标准文献(如[82, 143, 164])中极限的定义和基本性质. 所有的指标集都假定为滤化的.

引理 1.1.1　对Hausdorff拓扑空间T, 下述条件等价:

(i) T是有限离散空间的(拓扑)反向极限;

(ii) T是紧的且T的每个点有由既开又闭子集组成的邻域基;

(iii) T是紧的且全不连通.

证明: 要证明蕴含关系(i)⇒(ii), 我们首先回顾: 紧空间的反向极限是紧的(见[16], §1.9, no.6的命题8), 因此T是紧的. 由反向极限拓扑的定义和(i), T的每个点有由形如$f^{-1}(W)$的集合组成的邻域基, 其中W是有限离散空间V的子集, $f: T \to V$为连续映射, 这些集合既开又闭.

对蕴含关系(ii)⇒(i), 我们需要证明每个点$t \in T$的连通分支G_t等于$\{t\}$. 因T紧致, G_t是包含t的所有开集、闭集的交集(见[16], §2.4, no.4的命题6). 因T是Hausdorff的, 我们得到$G_t = \{t\}$.

剩下要证明蕴含关系(iii)⇒(i). 令I为T上使得商空间T/R有限且在商拓扑下离散的等价关系$R \subseteq T \times T$的集合. 集合I由包含关系作成偏序且是正向的, 因为若R_1, R_2在I中, $R_1 \bigcap R_2$也在I中. 我们断言典型映射$\phi: T \to \varprojlim\limits_{R \in I} T/R$是同胚.

首先我们看到映射ϕ是满的, 因为对元素$\{t_R\}_{R \in I} \in \varprojlim\limits_{R \in I} T/R$, 这些集合$(p_R \circ \phi)^{-1}(t_R)$都非空且紧致. 由于$I$是正向的, 这些集合的交集也是非空的, 从而紧致性意味$\phi^{-1}(\{t_R\}_{R \in I}) = \bigcap\limits_{R \in I} (p_R \circ \phi)^{-1}(t_R)$非空.

对于单性, 只要证明$t, s \in T, t \neq s$时, 存在$R \in I$使得$(t, s) \notin R$. 因为s不在t的连通分支中, 存在一个既开又闭子集$U \subseteq T$使得$t \in U, s \notin U$(见[16], §2.4, no.4的命题6). 由"$(x, y) \in R$当且仅当x, y都在U中或都不在U中"定义的等价关系R就是需要的类型. 注意到紧空间之间的连续双射是同胚, 证明完成. □

事实上可以立刻验证我们完全可以选择(i)中的反向系使得所有的转换映射是满射.

定义 1.1.2 空间T称为**射有限空间**, 若它满足引理1.1.1中的等价条件.

紧性的论证说明射有限空间的子集$V \subseteq \varprojlim X_i$既开又闭当且仅当$V$是某个$X_i$中一个(必定是既开又闭的)子集在典型射影$p_i : X \to X_i$下的原像. 射有限空间的每个连续映射能实现为有限离散空间之间的映射的射影极限. 我们不给出确切的定义, 值得注意的是带连续映射的射有限空间的范畴是有限离散空间范畴的射-范畴.

回顾: 拓扑群是一个赋予拓扑空间结构的群G, 使得群运算$G \to G, g \mapsto g^{-1}$和$G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh$连续. 读者可以立刻验证拓扑群的反向系的反向极限正是群的反向极限并且在基础拓扑空间上带有反向极限拓扑.

命题 1.1.3 对Hausdorff拓扑群G, 下面的条件等价:

(i) G是有限离散群的(拓扑)反向极限;

(ii) G是紧的且单位元有由既开又闭的正规子群组成的邻域基;

(iii) G是紧的且全不连通.

证明: (i)⇒(iii): 紧且全不连通空间的反向极限是紧且全不连通的.

(ii)⇒(i): 假定U过单位元$e \in G$的由开的正规子群组成的邻域系, 则典型同态$\phi : G \to \varprojlim_U G/U$是同构:

首先因G是Hausdorff的, ϕ是单射. 要证满性, 令$x = \{x_U\}_U \in \varprojlim_U G/U$. 记$\phi_U : G \to G/U$为典型射影, 我们有等式

$$\phi^{-1}(x) = \bigcap_U \phi_U^{-1}(x_U).$$

右边的交集取遍非空紧空间, 它们的有限交非空, 因此$\phi^{-1}(x)$非空, 从而ϕ为满射. 此外, ϕ为开映射, 因此是同胚. 最后, 对每个这样的U, 群G/U是离散且紧的, 故有限.

(iii)⇒(ii): 由引理1.1.1, G的基础拓扑空间是射有限的, 因此每个点有由既开又闭子集组成的邻域基. 注意开子群自动为闭的, 因为它是它的非平凡(开)陪集的并的补集. 令U为任选的单位元$e \in G$的既开又闭邻域. 设

$$V := \{v \in U | Uv \subseteq U\}, H := \{h \in V | h^{-1} \in V\}.$$

我们断言$H \subseteq U$是G中开(且闭的)子群. 我们首先证明V是开的. 固定点$v \in V$, 则对每个$u \in U$, $uv \in U$, 因此存在u的邻域U_u和v的邻域V_u使得$U_u V_u \subseteq U$. 开集U_u覆盖紧空间U, 因此存在有限子覆盖, 比如$U_{u_1}, \ldots, U_{u_n}$, 故

$$V_v := V_{u_1} \bigcap \cdots \bigcap V_{u_n}$$

是v的含于V中的开邻域. 所以V是开的, 从而$H := V \bigcap V^{-1}$也是开的, 取逆元的映射是同胚. 剩下要去证明H是子群. 由构造显然$e \in H, H^{-1} = H$. 我们现在验证: 若$x, y \in H$, 则$xy \in H$. 首先我们有$Uxy \subseteq Uy \subseteq U$, 所以$xy \in U$. 同理我们得到$y^{-1}x^{-1} \in V$, 因此$xy \in H$. 这就证明$H$是$G$的含于$U$中的开子群. 特别地, H在G中指标有限, 故H只有有限个不同的共轭子群. 这些有限个共轭子群的交是G的含于U的开、闭正规子群. □

定义 1.1.4 满足命题1.1.3的等价条件的Hausdorff拓扑群G称为**射有限群**.

如果没有进一步提及, 射有限群的同态总假定为连续的, 而子群总假定为闭的. 因为子群是它的所有非平凡陪集的补集, 由G的紧性, 我们知道开子群是闭的, 且闭子群是开的当且仅当它有有限指标. 若H为射有限群的(闭)子群, 则陪集类的集合G/H赋予商拓扑后成为射有限空间. 若H正规, 则商群G/H以自然的方式成为射有限群.

原则上, 有限群论的所有对象和结论在射有限群论中有它们的拓扑模拟. 例如, Sylow定理的射有限模拟是对的(见§1.6). 我们作下面的

定义 1.1.5 **超自然数**是形式积

$$\prod_p p^{n_p},$$

其中p过所有素数, 并且对每个p, 指数n_p是非负整数或符号∞.

通过唯一分解为素数幂, 我们能将任何自然数视为超自然数. 通过将指数相加, 我们将若干个(甚至无限多个)超自然数相乘. 按惯例, 如果有无限多个非零求和项或者有一个求和项为∞, 则指数和为∞. 我们也有任意超自然数族的最小公倍数(l.c.m.)和最大公因子(g.c.d.)的概念. 特别地, 任何自然数族有最小公倍数, 一般来说, 这是个超自然数.

定义 1.1.6 令G为射有限群, A为Abel挠群.

(i) 闭子群H在G中的**指标**为超自然数

$$(G:H) = \text{l.c.m.}(G/U : H/H\bigcap U),$$

其中U过G的所有开正规子群.

(ii) G的**阶**定义为

$$\#G = (G:1) = \underset{U}{\text{l.c.m.}}\,\#(G/U).$$

(iii) A的**阶**定义为

$$\#A = \text{l.c.m.}\,\#B,$$

其中B过A的所有有限子群.

给定闭子群$N \subseteq H \subseteq G$, 我们有

$$(G:N) = (G:H)(H:N).$$

此外, Abel挠群A的阶$\#A$就是射有限群$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$的阶.

定义 1.1.7 令G为射有限群. 一个**抽象G-模**M是一个Abel群M连同作用

$$G \times M \longrightarrow M, (g, m) \longmapsto g(m),$$

使得对所有$g, h \in G, m, n \in M$有$1(m) = m, (gh)m = g(h(m)), g(m+n) = g(m) + g(n)$.

一个**拓扑G-模**M是一个赋予抽象G-模结构的Abel、Hausdorff拓扑群M, 使得作用$G \times M \to M$连续.