

大学数学信息化教学丛书

线性代数及其应用

(第四版)

李小刚 刘吉定 罗进 主编



科学出版社

大学数学信息化教学丛书

线性代数及其应用

(第四版)

李小刚 刘吉定 罗进 主编

科学出版社

北京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 简 介

线性代数是高等学校理工科和经管类学生的必修课程,在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着非常重要的作用.本书以线性方程组为出发点,逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念,并引入许多实例,供读者了解线性代数在实际应用中的独特作用,每章后还附有 MATLAB 实验,供读者学习使用数学软件解决线性代数问题.

在第三版的基础上,第四版主要对部分章节的内容进行了适量地调整和补充,对第三版编写与排版中的不足与疏漏进行了修正,使本书更趋于完善.

本书可作为高等学校理工科和经管类各专业线性代数课程教材,同时也可供教师、考研人员及工程技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/李小刚,刘吉定,罗进主编.—4版.—北京:科学出版社,2017.6

(大学数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-053886-4

I. ①线… II. ①李… ②刘… ③罗… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 142262 号

责任编辑:王雨舸 / 责任校对:董艳辉

责任印制:彭超 / 封面设计:苏波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2017 年 6 月第 四 版 印张:14 3/4

2017 年 6 月第一次印刷 字数:330 000

定价:39.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“大学数学信息化教学丛书”序

高等学校非数学专业学生毕业多年后时常感言,数学知识很多似乎没有派上用处,但数学训练、数学思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要因素之一。

数学是一门高度抽象的学科,但是它非人类精神纯粹自由创造和想象,而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是大学数学教学的基本任务与责任,同时,掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论,显示出无穷无尽的威力.大学数学创新教学,增强数学应用背景的讲授,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口等,能培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到大学数学教学的目的。

“大学数学信息化教学丛书”的编写与成熟,在开放的视野与背景下,得到认同,自然成为纸质教材与数字出版的精品,从而得到广泛认可和使用。

在学会、领导和专家的关怀和指导下,本区域若干所全军重点、一本和省重点高校,其大学数学教材,在科学出版社出版和再版.10余年以来,教学和教材理念从素质教育,到分类分层教学改革,到数学思想、方法与创新教育,历经各校几届班子和责任教授的共同努力,逐渐成熟,成为具有较高质量的核心精品。

教材转型与数字出版赫然在前,教材又重新经历新的考验.“大学数学信息化教学丛书”正是按此理念和要求,直面开放的视野与背景,将改革与创新的成果汇集起来,重新审视和操作,精益求精,修订版和新编教材均是如此。

修订和新编的核心理念,一是体现数学思维,将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用;二是深化改革与创新,面向开放和数字出版的大平台,赢得内容先机,营造精品。

“大学数学信息化教学丛书”为大学数学课程教材:高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程,对应教材为相应的一、二级获奖教材。

丛书注重质量,讲究适用和教学实践性,体系相对完整与系统,加强应用性,按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容。

丛书具有明确的指导思想:

(1) 遵循高等学校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂。

(2) 注重教学创新,加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思

维与素养,真正达到大学数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Spss 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

“大学数学信息化教学丛书”编委会

2017年1月

第四版前言

本书是在《线性代数及其应用》(第三版)的基础上修订而成.从第三版教材使用的反馈情况来看,普遍认为本书具有通过逐步剖析实例而引入线性代数基本原理的特点,注重引导学生在应用的背景下,逐步掌握基本概念,学会使用这些理论解决实际问题,没有过分强调抽象而严格的逻辑体系,也不过分追求计算技巧,而是通过对 MATLAB 计算方法的掌握达到实用的计算目的.因此,第四版的内容与结构体系,较第三版未有大的变动,此次再版,主要对部分章节的内容进行了适量地调整和补充,并对第三版编写与排版中的疏漏进行了修正,使得本书更趋于完善.

本次再版工作由李小刚、刘吉定、罗进、杨建华完成.全书由刘吉定统稿.在本书的编写过程中,得到了相关教学管理部门的大力支持,科学出版社的编辑为本书的出版给予了热情的支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢!

限于编者水平,书中难免存在缺点和不足,恳请读者批评指正.

编者
2017年3月

第三版前言

本书按照《工科数学精品丛书》的指导思想,在《线性代数及其应用》(第二版)的基础上修订而成.从第二版教材使用的反馈情况来看,普遍认为本书具有通过逐步剖析实例而引入线性代数基本原理的特点,注重引导学生在应用的背景下,逐步掌握基本概念,学会使用这些理论解决实际问题,没有过分强调抽象而严格的逻辑体系,也不过分追求计算技巧,而是通过对 MATLAB 计算方法的掌握达到实用的计算目的.因此,第三版的内容与结构体系,较第二版未作大的变动,此次修订,主要对部分章节的内容作了适量的调整和补充,对第二版编写与排版中的疏漏进行了修正,使得本书更趋于完善.

参加本次修订工作的有李小刚、刘吉定、罗进、杨建华.全书由刘吉定统稿.本书的编写和出版过程,得到了相关教学管理部门的大力支持,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免还存在缺点和不足,恳请读者批评指正.

编者
2015年3月

第二版前言

本书是在第一版的基础上修订而成。第一版经过几年的教学实践,在线性代数课程的教学中发挥了积极作用,也积累了不少新经验,许多任课教师与读者提出了很好的意见。为了使本书更好地适应新形势下教材改革精神,体现创新理念,打造精品课程教材,在科学出版社的大力支持下,我们对它作了一次全面地修订。

这次修订,保持了第一版中通过逐步剖析实例而引入线性代数的基本原理的特点,书中注重引导学生在应用的背景下,逐步掌握基本概念,学会使用这些理论解决实际问题,没有过分强调抽象而严格的逻辑体系,也不过分追求计算技巧,而是通过对 MATLAB 计算方法的掌握达到实用的计算目的。第二版对第一版书中的内容进行了修改与完善,改正了某些不妥之处,强化了基础知识和重点内容,其中部分章节作了较大的修改,将第一版附录中的研究生入学考试题编入了各章。

参加本次修订工作的有李小刚、刘吉定、罗进、杨建华,全书由刘吉定统稿。本书的编写得到了相关教学管理部门的大力支持,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请读者批评指正。

编者
2012年3月

第一版前言

线性代数是大学理工科和经管类学生的必修课程,它在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用.本教材的编写,借鉴和吸收了国内外同类型优秀教材的长处,结合编者多年的教学经验,在内容组织上,依据教育部全国高等学校工科数学课程指导委员会对线性代数课程提出的基本要求,本着加强基础,注重计算与应用的原则,安排了一些选学内容,供教师和读者灵活选用.

对线性代数课程,学生普遍感到内容抽象、计算复杂,加上非数学专业的线性代数课程的学时数偏少,学习这门课程较为吃力,而学习后又不知道如何应用.其实,多数抽象的概念,是来源于一些简单的实例,本书通过逐步剖析实例中所包含的普遍原理,引导和建立矩阵、向量、线性方程组及线性问题的一些基本概念,让学生掌握和了解这些理论,学会使用这些理论解决实际问题,因此,我们不宜过分强调抽象而严格的逻辑体系,应该引导学生在应用的背景下,逐步掌握基本概念.本书将以线性方程组为出发点,逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念,还引入了许多应用实例,让读者了解线性代数在解决实际问题中的独特作用,另外还安排了一个应用章节,供有关专业的学生选学.每章都附有实验内容,目的是让读者学会用 MATLAB 软件做线性代数的计算.因为在实际问题中,所面临的数据往往是大量的,单靠做练习的笔头功夫是难以解决实际问题的, MATLAB 软件在解决线性代数的计算问题上,具有独特的优越性,花一点时间粗略了解这个软件将会受益匪浅.

本书的主要内容及主要特点:

第 1 章 介绍解线性方程组的高斯消元法,以此初步引入了线性方程组、矩阵及初等变换的概念,为以后的进一步理论学习建立了一个基础.

第 2 章 对矩阵作了比较详尽的讨论.矩阵是线性代数的核心内容,较早建立矩阵的理论,有利于利用矩阵的概念引入线性代数中其他的概念.

第 3 章 用递归的方法定义了 n 阶行列式,这比用逆序方法定义行列式更便于学生理解和掌握.本章还介绍了利用行列式解线性方程组的克拉默法则.

第 4 章 介绍矩阵的秩和 n 维向量及 n 维向量空间.向量组的线性相关性是一个难点,通过向量组合成的矩阵进行初等变换可求得矩阵的秩,从而较好地解决了向量组的线性相关性的判断.

第 5 章 讨论了线性方程组的可解性及解的结构.本书将线性方程组视为一个向量被另一组向量线性表示的问题,利用上一章的结论,能很容易地建立线性方程组的基本理论.

第 6 章 建立了特征值与特征向量的理论,介绍矩阵对角化的方法,并介绍如何应用这些方法将二次型化为标准形.

第 7 章 为选学内容,介绍了线性空间与线性变换理论,对这些抽象理论的掌握,有

利于将前面章节中的理论在更广泛的领域里得到应用.

第8章是为某些专业的学生编写的选学内容,介绍了最小二乘法与线性规划这两个应用十分广泛的概念.

本书每一章都配置了大量的习题,习题分(A)、(B)两类,(A)类为基础题,(B)类的题较难,供读者选做.

附录中的1987~2006年历届研究生入学考试题可供读者选做,读者可通过做这些题目来测试自己的水平.

本教材由李小刚主编,参编者有刘吉定、杨建华、罗进.第1章、第3章及每章的实验部分由李小刚编写,第2章,第4章由刘吉定编写,第5章,第6章由杨建华编写,第7章,第8章由罗进编写.全书由李小刚统稿.本书的编写得到了相关教学管理部门的大力支持,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和错误,恳请读者批评指正.

编者
2006年5月

目 录

第 1 章 线性方程组的消元法	1
1.1 二元和三元线性方程组的求解	1
1.2 n 元线性方程组简介	2
1.3 高斯消元法解方程组的 MATLAB 实验	5
习题 1	8
第 2 章 矩阵	9
2.1 矩阵的基本概念	9
2.1.1 矩阵的定义	9
2.1.2 几种特殊矩阵	10
2.2 矩阵的运算	11
2.2.1 矩阵的线性运算	11
2.2.2 线性变换与矩阵的乘法	13
2.2.3 矩阵的转置	16
2.2.4 共轭矩阵	18
2.3 矩阵的逆	18
2.4 分块矩阵	19
2.5 矩阵的初等变换	23
2.6 初等矩阵	24
2.7 矩阵运算的 MATLAB 实验	29
习题 2	33
第 3 章 行列式	41
3.1 行列式的概念	41
3.1.1 二阶、三阶行列式	41
3.1.2 n 阶行列式	43
3.2 行列式的性质	44
3.3 行列式的计算	49
3.4 逆阵公式	54
3.5 克拉默法则	56
3.6 行列式计算的 MATLAB 实验	59
习题 3	61

第 4 章 矩阵的秩与 n 维向量空间	69
4.1 矩阵的秩	69
4.2 n 维向量	73
4.3 向量组的线性相关性	75
4.4 向量组的秩	77
4.5 向量空间	79
4.6 向量的内积与正交矩阵	81
4.7 秩的计算、向量的正交化的 MATLAB 实验	84
习题 4	87
第 5 章 线性方程组	98
5.1 线性方程组的可解性	98
5.2 线性方程组解的结构	100
5.2.1 齐次线性方程组解的结构	100
5.2.2 非齐次线性方程组解的结构	103
5.3 解线性方程组的 MATLAB 实验	105
习题 5	109
第 6 章 特征值与特征向量及二次型	122
6.1 矩阵的特征值与特征向量	122
6.2 相似矩阵与矩阵的对角化	127
6.3 实对称矩阵的对角化	130
6.4 二次型	132
6.5 正定矩阵	142
6.6 特征值、特征向量的计算与矩阵对角化的 MATLAB 实验	144
6.6.1 求矩阵的特征值与特征向量	144
6.6.2 矩阵的对角化	145
6.6.3 求二次型的标准形	147
习题 6	148
第 7 章 线性空间与线性变换	159
7.1 线性空间的定义与性质	159
7.1.1 线性空间的定义	159
7.1.2 线性空间的性质	161
7.1.3 线性空间的子空间	162
7.2 线性空间的维数、基与坐标	163
7.2.1 线性空间的维数、基	163
7.2.2 向量的坐标	163
7.3 基变换与坐标变换	164

7.3.1 基变换	165
7.3.2 坐标变换	165
7.4 线性空间的同构	167
7.4.1 同构的概念	167
7.4.2 同构映射的性质	168
7.5 线性变换	170
7.5.1 线性变换的定义与性质	170
7.5.2 线性变换的运算	171
7.5.3 线性变换的矩阵	174
7.6 线性变换的 MATLAB 实验	177
习题 7	178
第 8 章 线性代数的应用	184
8.1 最小二乘法	184
8.1.1 预备知识	184
8.1.2 最小二乘法问题及其求解	185
8.2 线性规划	187
8.2.1 线性规划问题的数学模型	187
8.2.2 线性规划问题的标准形式	190
8.2.3 线性规划问题解的概念	191
8.2.4 单纯形法	192
8.2.5 大 M 法	194
8.2.6 两阶段法	196
8.3 最小二乘法与线性规划求解的 MATLAB 实验	197
习题 8	202
习题答案	206

第 1 章 线性方程组的消元法

求解线性方程组是线性代数的一个核心内容,线性代数的许多理论来源于解线性方程组,在初等数学中,求解二元、三元线性方程组采用方程组之间的运算消元法,对于多个变元的情况这种方法就显得烦琐而不好操作.本章将介绍用高斯消元法求解线性方程组,初步引入矩阵概念,将方程组与矩阵一一对应,通过对矩阵的初等变换,达到方程组消元的目的,其方法对求解一般 n 元线性方程组具有普遍的意义并切实可行.

1.1 二元和三元线性方程组的求解

对于二元和三元线性方程组,我们通常用消元法求解.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ x - 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

解 由式(1) - 式(2),得 $4y = 4$, 即 $y = 1$. 再将 $y = 1$ 代入式(1),得 $x + 1 = 3$, 解得 $x = 2$. 所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

例 1.2 解方程组

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -1 & (3) \\ 3x + 2y + 2z = 9 & (4) \\ 2x - 3y - 3z = 6 & (5) \end{cases}$$

解 由式(4) - 式(3) $\times 3$, 得 $8y - 4z = 12$, 化简为

$$2y - z = 3 \quad (6)$$

由式(5) - 式(3) $\times 2$, 得

$$y - 7z = 8 \quad (7)$$

由式(7) $\times 2$ - 式(6), 得

$$-13z = 13 \quad (8)$$

解得 $z = -1$, 代入式(7), 解得 $y = 1$. 再将 $y = 1, z = -1$ 代入式(3), 解得 $x = 3$, 所以方程组的解为

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

以上两例,均是将方程组进行变形,逐步消去方程中未知变元的个数.当方程中未知变元只剩一个时,便可直接得到解,再将解依次代入方程,从而求得其他变元的解.

1.2 n 元线性方程组简介

对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1-1)$$

是否同样可以用消元法求解?

如果 n 元线性方程组具有如下的形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1-2)$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 均不为零,则可以由下到上依次得到方程组的解

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n \\ &\cdots \\ x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \end{aligned}$$

形如式(1-2)的方程组称为三角形方程组,这是 n 元线性方程组的一种特殊形式,求解比较容易;但对一般的形如式(1-1)的 n 元线性方程组,是否可以化为三角形方程组?在例 1.2 中,把一个三元线性方程组化成了三角形方程组,从而得到了方程组的解,这种方法启发我们用某些变换将方程组化为三角形方程组以便于求解.但必须保证,对方程组进行变换所得到的新方程组,必须和原方程组有同样的解.以下的变换能保持方程组的解不变(由读者证明):

- (1) 将第 i 个方程与第 j 个方程交换位置.
- (2) 将第 i 个方程乘以一个非零常数 k .
- (3) 将第 j 个方程加上第 i 个方程乘以一个非零常数 k .

对方程组实施上述变换时,方程组改变的仅仅是未知量 x_1, x_2, \cdots, x_n 的系数与常数项.因此,可以把方程组(1-1)的系数与常数项列一个表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这个表和方程组(1-1)是对应的,称为对应方程组(1-1)的矩阵,方程组的特性都可

以在这个矩阵中得到体现. 当对方程组做出以上三种变换时, 方程组所对应的矩阵也会有相应的变换. 变换(1) 相当于矩阵第 i 行与第 j 行对换, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$; 变换(2) 相当于矩阵第 i 行的每一个元都乘以 k , 记为 kr_i ; 变换(3) 相当于矩阵第 j 行的所有元都加上第 i 行相应元的 k 倍, 记为 $r_j + kr_i$. 矩阵的这三种变换称为矩阵的行初等变换, 对方程组进行的三种变换就可视为对矩阵做行初等变换, 而矩阵通过有限次行初等变换得到的矩阵所对应的方程组, 与原矩阵所对应的方程组是同解方程组. 我们只需解变换后的较为简单的方程组, 就可得到原方程组的解.

方程组(1-2) 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 均不为零. 这种矩阵所对应的方程组是很容易求解的. 由此推想, 一般线性方程组所对应的矩阵, 能否通过初等变换化为上面的矩阵形式? 或者得到其他所对应的方程组容易求解的矩阵形式? 用高斯消元法, 我们可以将方程组化为最简形式. 下面通过例题介绍高斯消元法.

例 1.3 用高斯消元法求解方程组
$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 20, \\ 2x + 4y - 3z = -1, \\ -3x + 7y + 2z = 7. \end{cases}$$

解 方程组对应的矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} &\xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3+\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & 0 & \frac{98}{5} & \frac{294}{5} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \\ &\xrightarrow{\frac{5}{98}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+17r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{10}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1-7r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \end{aligned}$$

变换所得的矩阵对应的方程组为
$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$
 这就是方程组的解.

例 1.3 中形如 A_1 的矩阵,称为行阶梯形矩阵,其特点是:可画出一条阶梯线,线的下方全为 0;每个台阶只有一行,台阶数即是非零行的行数,阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元,也就是非零行的第一个非零元.形如 A_2 的矩阵称为行最简形矩阵,其特点是非零行的第一个非零元为 1,所在列的其他元素都为零.

用高斯消元法解线性方程组,就是用行初等变换将方程组所对应的矩阵化为行最简形矩阵,从而得到方程组的解.

事实上,对于线性方程组(1-1),我们并不能保证它一定有解,即使有解,也不能保证解是唯一的.

例 1.4 解下列方程组.

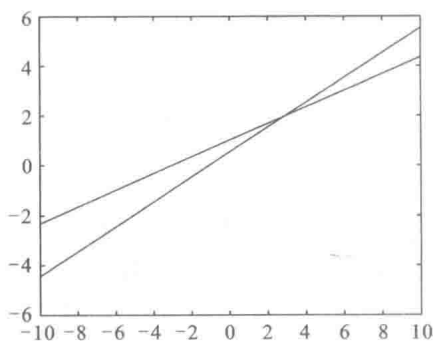
$$(1) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

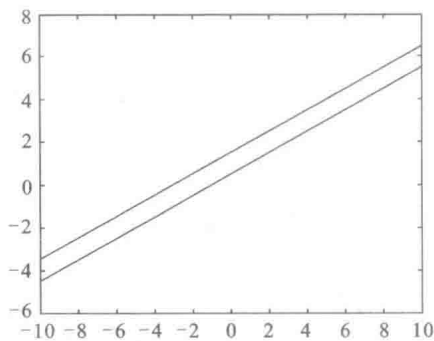
$$(3) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

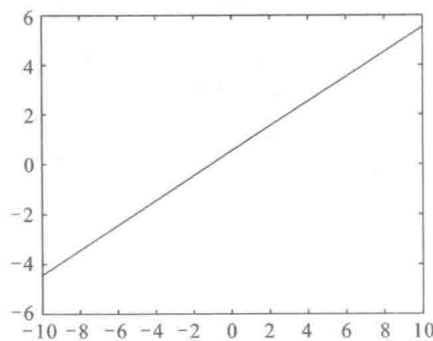
解 二元方程组的解的几何意义是直线的公共交点,分别绘出 4 个方程的直线图(图 1-1).



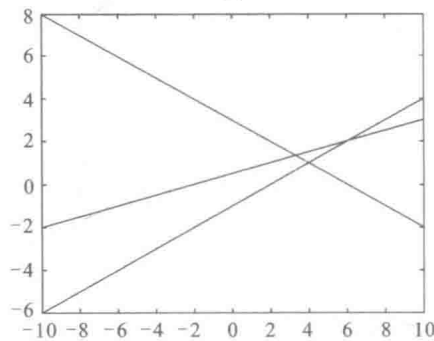
(1)



(2)



(3)



(4)

图 1-1