“十三五”国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

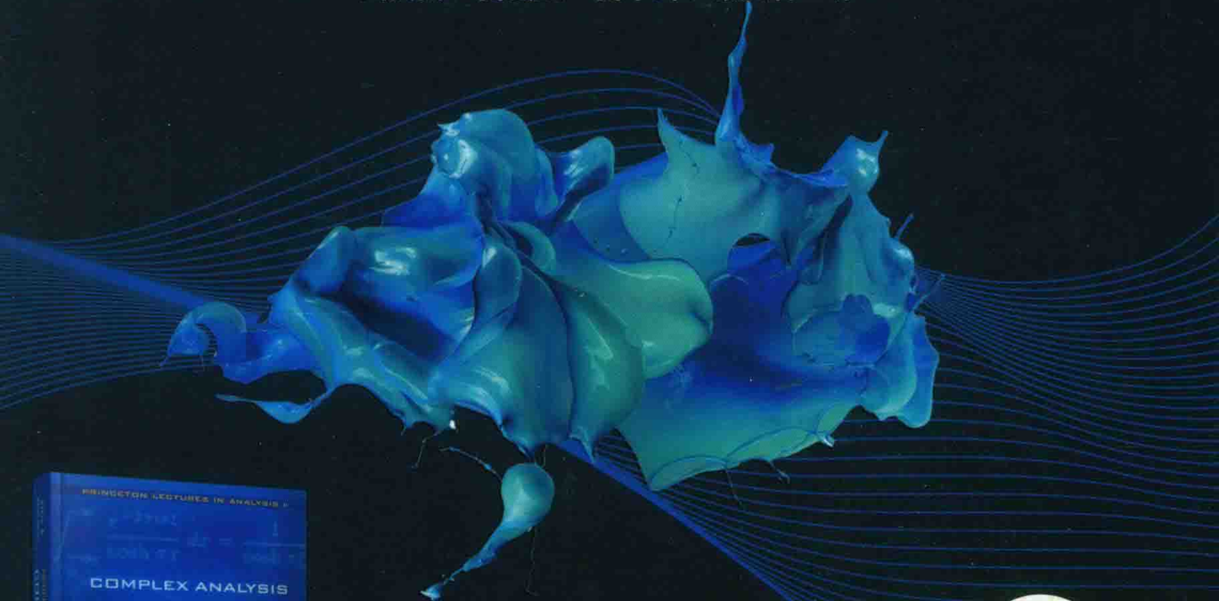
普林斯顿分析译丛

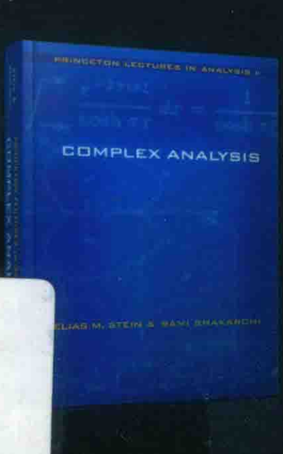
Complex Analysis

复分析

[美] 伊莱亚斯 M. 斯坦恩 (Elias M. Stein)
拉米 · 沙卡什 (Rami Shakarchi) 著

刘真真　夏爱生　夏军剑　索文莉　译





机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

普林斯顿分析译丛

复 分 析

[美] 伊莱亚斯 M. 斯坦恩 (Elias M. Stein)

拉米·沙卡什 (Rami Shakarchi) 著

刘真真 夏爱生 夏军剑 索文莉 译

机 械 工 业 出 版 社

《复分析》是一部为数学及相关专业大学二年级和三年级学生编写的教材，理论与实践并重。为了便于非数学专业的学生学习，全书内容简明、易懂，读者只需掌握微积分和线性代数知识即可阅读。

本书共十章内容，分别为：复分析预备知识、柯西定理及其应用、亚纯函数和对数、傅里叶变换、整函数、Gamma 函数和 Zeta 函数、Zeta 函数和素数定理、共形映射、椭圆函数、Theta 函数的应用。最后还有附录 A 和附录 B，分别介绍了渐近理论和单连通与 Jordan 曲线定理。附录 A 主要内容包括 Bessel 函数、Laplace 方法、Stirling 公式、Airy 函数和分割函数等；附录 B 中介绍了单连通、卷绕数和 Jordan 曲线定理等内容。

本书每个章节都引用了大量的例子，使读者能很好地理论联系实际。此外，每章最后还附有大量的练习和问题，让读者在掌握知识的同时能举一反三，将问题推广。一些问题甚至是超出本书范围的，这些问题用星号标记，这给读者的深入钻研留出了足够的空间。

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2013-3818 号。

图书在版编目（CIP）数据

复分析/(美)伊莱亚斯 M. 斯坦恩(Elias M. Stein),(美)拉米 · 沙卡什(Rami Shakarchi)著;刘真真等译.—北京:机械工业出版社,2017.4

"十三五"国家重点出版物出版规划项目　世界名校名家基础教育系列

书名原文：Complex Analysis（Princeton Lectures in Analysis, No. 2）

普林斯顿分析译丛

ISBN 978-7-111-55297-0

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①伊…②拉…③刘…　Ⅲ. ①复分析　Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 261637 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　王　芳　姜　凤

责任校对：张晓蓉　封面设计：张　静

责任印制：常天培

涿州市京南印刷厂印刷

2017 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 17.75 印张 · 2 插页 · 358 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-55297-0

定价：78.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	金　书　网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

译者的话

这是我翻译的第一本书，而本书的难度又特别高，所以，对我来说真是一个挑战. 还好有几位朋友相助，帮我校正译稿，为本书增色不少. 其中最感谢的是夏爱生，他在忙碌的全职工作之余，特别抽空为我校稿，我从他专业的翻译过程中学到了不少技巧.

本书如果在翻译上还有未尽人意之处，那是本人的疏忽，欢迎各界朋友不吝赐教. 为了让大家能够更加理解原书的本意，我在此列举出一些翻译时我斟酌再三而定的翻译方式，可能在别的书中翻译会不一样，所以把原文也列出来供大家参考.

toy contour，英文直译是“玩具，周线”，本书中有时没有出现 toy 而只是 contour，我都翻译成“周线”，是指曲线积分的封闭曲线.

keyhole，英文直译是“锁眼”，在本书中是一种曲线的类型，如 the keyhole contour，因为周线形似锁眼，所以我翻译成“锁眼周线”，再如 the multiple keyhole 和 Rectangular keyhole，我分别翻译成“多锁眼”和“矩形锁眼”.

moderate decrease，英文直译是“适当地减少”，在本书中我翻译成“微减”，表示函数较慢的递减速度，它的具体意思在原书的 112 页脚注中给出.

本书第 9 章最后出现的“forbidden Eisenstein series”是第 10 章中用于证明四平方定理的重要方法. 我翻译成“禁止 Eisenstein 级数”，forbidden，英文直译就是“严禁的或禁止的”，查阅了一些参考资料还是不知道该如何翻译，所以只好直译.

最后，特别感谢李升老师、陈宝琴老师对本书的修改意见，由于我们水平有限，译文错误及不妥之处再次恳请读者指正.

刘真真

前　言

从 2000 年春季开始，四个学期的系列课程在普林斯顿大学讲授，其目的是用统一的方法去展现分析学的核心内容. 我们的目的不仅是为了生动说明存在于分析学各个部分之间的有机统一，还是为了阐述这门学科的方法在数学其他领域和其他自然科学的广泛应用. 本书是对讲稿的一个详细阐述.

虽然有许多优秀教材涉及我们覆盖的单个部分，但是我们的目标不同：不是以单个学科，而是以高度的互相联系来展示分析学的各种不同的子领域. 总的来说，我们的观点是观察到的这些联系以及所产生的协同效应将激发读者更好地理解这门学科. 记住这点，我们专注于形成该学科的主要方法和定理（有时会忽略掉更为系统的方法），并严格按照该学科发展的逻辑顺序进行.

我们将分析学的内容分成四册，每一册反映一个学期所包含的内容，这四册的书名如下：

Ⅰ. 傅里叶分析导论.

Ⅱ. 复分析.

Ⅲ. 实分析：测度论、积分以及希尔伯特空间.

Ⅳ. 泛涵分析：分析中的几个论题.

但是这个列表既没有完全给出分析学所展现的许多内部联系，也没有完全呈现出分析学在其他数学分支中的显著应用. 下面给出几个例子：第一册中所研究的初等（有限的）Fourier 级数引出了 Dirichlet 特征，并由此使用等差数列得到素数有无穷多个；X-射线和 Radon 变换出现在第一册的许多问题中，并且在第三册中对理解二维和三维的 Besicovitch 型集合起着重要作用；Fatou 定理断言单位圆盘上的有界解析函数的边界值存在，并且其证明依赖于前三册书中所形成的方法；在第一册中，θ 函数首次出现在热方程的解中，接着第二册使用 θ 函数找到一个整数能表示成两个或四个数的平方和的个数，并且考虑 ζ 函数的解析延拓.

对于这些书以及这门课程还有几句额外的话. 一学期使用 48 个课时，在很紧凑的时间内结束这些课程，每周习题具有不可或缺的作用，因此，练习和问题在我们的书中有同样重要的作用. 每个章节后面都有一系列“练习”，有些习题简单，而有些则可能需要更多的努力才能完成. 为此，我们给出了大量有用的提示来帮助读者完成大多数的习题. 此外，也有许多更复杂和富于挑战的“问题”，特别是用星号标记的问题是最难的或者超出了正文的内容范围.

尽管不同的分册之间存在大量的联系，但是我们还是提供了足够的重复内容，以便只需要前三本书的极少的预备知识：只需要熟悉分析学中初等知识，例如极

限、极数、可微函数和 Riemann 积分，还需要一些有关线性代数的知识. 这使得对不同学科（如数学、物理、工程和金融）感兴趣的本科生和研究生都易于理解本系列丛书.

我们怀着无比喜悦的心情对所有帮助本系列丛书出版的人员表示感谢. 我们特别感谢参与这四门课程的学生. 他们持续的兴趣、热情和奉献精神所带来的鼓励促使我们有可能完成这项工作. 我们也要感谢 Adrian Banner 和 Jose Luis Rodrigo，因为他们在讲授本系列丛书时给予了特殊帮助并且努力查看每个班级的学生的学习情况. 此外，Adrian Banner 也对正文提出了宝贵的建议.

我们还特别感谢以下几个人：Charles Fefferman，他讲授第一周的课程（成功地开启了这项工作的大门）；Paul Hagelstein，他除了阅读一门课程的部分手稿，还接管了本系列丛书的第二轮教学工作；Daniel Levine，他在校对过程中提供了有价值的帮助. 最后，我们同样感谢 Gerree Pecht，因为她很熟练地进行排版并且花了时间和精力为这些课程做准备工作，诸如幻灯片、笔记和手稿.

我们还要感谢普林斯顿大学的 250 周年纪念基金和美国国家科学基金会的 VIGRE 项目的资金支持.

伊莱亚斯 M. 斯坦恩

拉米 · 沙卡什

于普林斯顿

2002 年 8 月

引　言

> 事实上，如果通过在论证中引入复值来拓展这些函数的范畴的话，那么就会产生一种以前一直隐而未现的和谐与规律.
>
> B. Riemann, 1851

研究复分析时，我们进入了一个充满智慧的神奇的世界. 定理的描述像魔法一样，甚至可以说是奇迹般地深深吸引着我们；还有它所追求的目标，即结论的简明和深远也让我们惊叹不已.

研究的出发点是当研究的主题是复数时，如何将最初的实值函数延拓过来. 因此，这里的主要研究对象是复平面到其本身的函数

$$f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C},$$

或者更一般地，是定义在复数集 $\mathbf{C}$ 的开子集上的复值函数. 开始没有什么新的，仅仅是通过函数的延拓获得，这是因为任意复数都可以写成 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，并且可以将 z 看成 $\mathbf{R}^2$ 上的点 (x,y).

然而，当我们考虑函数的本性时，一切都变了，除非错误地单看关于 f 的假设：也就是在复数情形下函数是可微的. 这个条件被称为全纯性，并且它形成的多数定理在本书中都要进行讨论.

如果函数 $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 在点 $z\in\mathbf{C}$ 处存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\quad (h\in\mathbf{C}),$$

则函数是全纯的. 这与实数情况下可微的定义类似，不同的是这里的 h 是复值. 事实上，这样假设的理由影响深远，它包含了多个条件：也就是说，h 可以沿着任意角度趋于零.

有意思的是，虽然可以按照实变量证明关于全纯函数的定理，但读者稍后会发现复分析是一个新的学科，它提供了适合它本身性质的定理证明. 事实上，关于全纯函数性质的证明一般都非常简短明确，这在书中会进行讨论.

复分析的研究通常沿着两条交叉途径进行. 第一个途径是要理解全纯函数的一般性质，不用特别关注特殊例子. 第二个途径是分析一些特别的函数，已经证明这

些特殊函数已经被证明在数学的其他领域也是很有价值的. 当然，我们不会沿着任何一条途径走得太远而不顾及另一条途径. 我们首先研究全纯函数的一般性质，可以总结为下面三个很奇特的事实：

(1) 周线积分：如果 f 是 Ω 上的全纯函数，那么关于 Ω 上的合适的闭路径满足

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

(2) 正则性：如果 f 是全纯的，那么 f 是无限可微的.

(3) 解析延拓：如果 f 和 g 都是 Ω 上的全纯函数，且在 Ω 上的某个小圆盘内两个函数相等，那么在 Ω 上处处满足 $f=g$.

这三个现象和全纯函数的其他的一般性质会在本书开始的章节中涉及. 我们不去概括地给出大量的内容，而是专注于本学科几个精彩的内容.

- Zeta 函数，通过无穷级数定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s},$$

这是最初的定义，它在半平面 $\mathrm{Re}(s)>1$ 上是全纯的，且在这个半平面上能保证级数是收敛的. 这个函数和它的变形（L-级数）是素数定理的核心，这在第一册第 8 章中已经出现过，在那里我们证明了 Dirichlet 定理. 这里我们将证明 ζ 可以推广到亚纯函数，且以点 $s=1$ 为极点. 我们将看到在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 时 $\zeta(s)$ 的表现（特别是 ζ 在这条线上没有零点），从而导出素数定理的证明.

- Theta 函数

$$\Theta(z\mid\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pi i n^2\tau}\mathrm{e}^{2\pi i n z},$$

它实际上是关于两个复变量 z 和 τ 的二元函数，关于变量 z 它是全纯的，而关于变量 τ 则仅仅是在半平面 $\mathrm{Im}(\tau)>0$ 上是全纯的. 一方面，固定变量 τ，将 Θ 看作 z 的函数，它与椭圆函数（双周期的）定理密切相关. 另一方面，固定 z，Θ 则在上半平面上展现了模函数的特征. 函数 $\Theta(z\mid\tau)$ 出现在第一册中，作为圆周上的热方程的基本解. 现在，它将用于研究 Zeta 函数，也会用于第 6 章和第 10 章中给出的组合方法和数论的某些结论的证明中.

另外，还有两个很有价值的话题：一是傅里叶变换在复分析中通过周线积分与它的简单关系和泊松求和公式的结果的应用；另一个是共形映射，关于多角形映射的逆可以根据 Schwarz-Christoffel 公式获得，特别是关于矩形的例子，它可以导出椭圆积分和椭圆函数.

目　　录

第 1 章　复分析预备知识

在过去的两个世纪里，数学获得了长足的发展，这在很大程度上要得益于复数的引进。而矛盾的是，这一切都是建立在一个看似荒谬的理念之上，那就是有一些数它们的平方是负数.

E. Borel，1952

本章主要介绍一些重要的预备知识，包括复数与复平面的基本性质、收敛性以及定义在复平面上的集合，这些知识在第一册（傅里叶分析）中都已经提到过.

随后给出解析函数的一些主要概念，此类函数是一类具有某种特性的可微函数. 接着又讨论了柯西-黎曼方程（Cauchy-Riemann equations）和幂级数.

最后，定义了曲线及函数沿曲线积分的概念. 特别地，我们将证明一个很重要的结论，即如果函数 f 具有原函数，并且存在全纯函数 F，其导函数恰好是函数 f，则对任意闭合曲线 γ，有

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

这是柯西定理的第一部分，在复函数理论中起着重要作用.

这些预备知识将贯穿整个复分析的始终.

1　复数和复平面

本节中的很多结论在本书第一册中都已经用到过.

1.1　基本性质

复数的基本形式为 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x，y 均为任意实数，i 是虚单位，它满足 $\mathrm{i}^2 = -1$. 实数 x，y 分别称为复数 z 的实部和虚部，常记为

$$x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z).$$

实数可以看作虚部为零的复数，而实部为零虚部不为零的复数称为纯虚数.

复数集一般记为 $\mathbf{C}$，不难看出，复数和欧式空间中的平面中的点是一一对应的. 事实上，对任意复数 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}$，都有唯一的点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 与之对应，反之亦然. 例如，0 相当于原点，而 i 相当于点 $(0,1)$. 自然地，将平面 $\mathbf{R}^2$ 中的 x 轴和 y 轴分别定义为实轴和虚轴，因为 x 轴上的点对应着实数，y 轴上非原点的点对应着纯虚数. 这样表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面.（见图 1）

只要保证 $i^2=-1$，复数的加法和乘法运算完全遵循实数的运算法则．如果 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，那么

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2), \\ &= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2). \end{aligned}$$

由上述两个公式定义的复数的加法和乘法运算一定遵循以下运算规律：

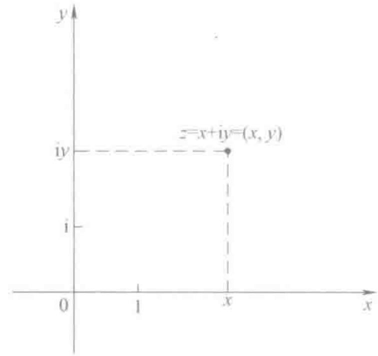


图 1　复平面

· **交换律**：对任意的 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$z_1+z_2=z_2+z_1$ 且 $z_1z_2=z_2z_1$.

· **结合律**：对任意的 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ 且 $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.

· **分配律**：对任意的 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

显然，复数的加法相当于平面 $\mathbf{R}^2$ 中二维向量的加法，而复数的乘法则相当于引入了带有伸缩的旋转．事实上，可以引入极坐标来表示复数，观察到某个复数与 i 相乘，则相当于该复数按逆时针方向旋转 $\pi/2$.

复数的模或绝对值与欧几里得（Euclidean）平面 $\mathbf{R}^2$ 中的模长的定义是一致的．通常，复数 $z=x+iy$ 的绝对值定义为

$$|z|=(x^2+y^2)^{1/2},$$

所以 $|z|$ 恰好是点 (x,y) 到原点的距离．特别地，对任意 z，$w\in\mathbf{C}$，均满足三角不等式

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|.$$

与此同时，还可以得到另外几个比较重要的不等式，即对任意 $z\in\mathbf{C}$，总满足 $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$，并且对任意 z，$w\in\mathbf{C}$，

$$||z|-|w||\leqslant|z-w|.$$

这是因为下面的三角不等式

$$|z|\leqslant|z-w|+|w| \text{ 和 } |w|\leqslant|z-w|+|z|$$

定义复数 $z=x+iy$ 的共轭复数为

$$\bar{z}=x-iy,$$

它是由复数在复平面中关于实轴反射而来，也就是说，在复平面中，两个共轭复数一定是关于实轴对称的．事实上，当且仅当 $z=\bar{z}$ 时复数 z 为实数，当且仅当 $z=-\bar{z}$ 时复数 z 为纯虚数（z 不等于 0）.

易证

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

且 $|z|^2=z\bar{z}$，有推论，只要 $z\neq 0$，那么

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

任意非零复数都可以表示为极坐标的形式，即

$$z=re^{i\theta},$$

其中 $r>0$ 表示复数 z 的模，$\theta\in\mathbf{R}$ 表示复数 z 的辐角（任意非零复数 z 都有无穷多个辐角，两个辐角间相差 2π 的整数倍），以 $\arg z$ 表示其中的一个特定值，即主值，称为复数 z 的主辐角，且

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

因为 $|e^{i\theta}|=1$，所以 $r=|z|$，而 θ 则是从原点出发且通过复数 z 的射线与实轴的正方向所成的角（逆时针方向为正）（见图 2）.

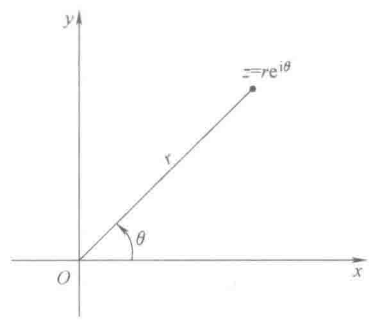


图 2　复数的极坐标形式

根据复数的极坐标表达方式，若 $z=re^{i\theta}$，$w=se^{i\varphi}$，那么

$$zw=rse^{i(\theta+\varphi)}.$$

因此，复数的乘法就相当于平面 $\mathbf{R}^2$ 中的相似扩大（也就是带有伸缩的旋转）.

1.2　收敛性

根据上面所提到的复数的算术和几何性质，得到复数的收敛和极限的重要概念.

序列 $\{z_1,z_2,\cdots\}$，若存在 $w\in\mathbf{C}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n-w|=0\left(\text{或者 } w=\lim_{n\to+\infty}z_n\right),$$

则称序列 $\{z_1,z_2,\cdots\}$ 收敛于 w.

以上收敛的概念并不是新的定义. 事实上，因为复数集 $\mathbf{C}$ 中的绝对值和欧几里得平面 $\mathbf{R}^2$ 中定义的距离是一致的，所以序列 $\{z_n\}$ 收敛于 w 当且仅当序列在复平面上对应的点列收敛于 w 在复平面中对应的点.

特别地，序列 $\{z_n\}$ 收敛于 w 当且仅当 $\{z_n\}$ 的实部序列和虚部序列分别收敛于 w 的实部和虚部，此结论作为练习留给读者证明.

若得不到序列确切的收敛值（例如 $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}1/n^3$），此时也可以由序列本身来描述收敛. 序列 $\{z_n\}$ 称为柯西列（或基本列），当 n，$m\to+\infty$ 时，

$$|z_n-z_m|\to 0.$$

也就是说，任给 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n,m>N$ 时，总有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$. 实分析中一个很重要的结论是实数集 $\mathbf{R}$ 是完备的，实数集中任何柯西列都收敛[1].

---

[1] 称为柯西收敛准则，等价于 Bolzano-Weierstrass 定理.

序列$\{z_n\}$为柯西列当且仅当 z_n 的实部和虚部均为柯西列，因此复数集 $\mathbf{C}$ 中的任何柯西列都在 $\mathbf{C}$ 中收敛. 从而得出以下结论.

定理 1.1 复数集 $\mathbf{C}$ 是完备的.

接下来我们考虑一些简单的拓扑知识，这些知识对于研究函数是非常必要的. 并注意到，这里并没有引入新的概念，而是将之前的概念用新的词汇重新描述而已.

1.3 复平面中的集合

如果 $z_0 \in \mathbf{C}$，$r > 0$，定义 $D_r(z_0)$ 为以 z_0 为中心，r 为半径的**开圆盘**，集合 $D_r(z_0)$ 中的任意元素与 z_0 之差的绝对值都小于半径 r，即

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\},$$

这就是指平面中以 z_0 为中心，r 为半径的圆盘. 以 z_0 为中心，r 为半径的**闭圆盘**记为 $\overline{D}_r(z_0)$，定义为

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leqslant r\},$$

并且开圆盘和闭圆盘的边界都是圆周

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}.$$

因为**单位圆盘**（中心在原点，半径为 1 的开圆盘）在接下来的章节中扮演着重要的角色，这里记为 D，

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

给定集合 $\Omega \subset \mathbf{C}$，如果存在 $r > 0$ 使得

$$D_r(z_0) \subset \Omega,$$

称 z_0 为 Ω 的内点. 集合 Ω 的**内部**是由它的所有内点组成的集合. 因此，如果集合 Ω 中的所有点都是它的内点，则 Ω 为**开集**，此定义与 $\mathbf{R}^2$ 中开集的定义是一致的.

如果集合 Ω 的余集 $\Omega^c = \mathbf{C} - \Omega$ 是开集，那么集合 Ω 称为**闭集**. 这个性质可以按照极限点更好地描述. 如果存在序列 $z_n \in \Omega$，且总有 $z_n \neq z$，使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = z$，则称点 $z \in \mathbf{C}$ 是集合 Ω 中的**极限点**. 读者容易证明集合为闭集当且仅当该集合包含了它所有的极限点. 集合 Ω 的**闭包**是由集合 Ω 与它的极限点合并构成的，通常记为 $\overline{\Omega}$. 集合 Ω 的**边界**等于它的闭包减去它的内部，通常记为 $\partial \Omega$.

集合 Ω **有界**等价于存在 $M > 0$ 使得任意的 $z \in \Omega$ 均满足 $|z| < M$. 也就是说，集合 Ω 必包含在某个大的圆周内. 如果集合 Ω 有界，定义它的**直径**为

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|.$$

有界闭集 Ω 称为**紧的**. 根据实变量的情形，可以证明以下结论.

定理 1.2 集合 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是紧的充分必要条件是任意柯西列 $\{z_n\} \subset \Omega$ 均有收敛于 Ω 的子列.

集合 Ω 的**开覆盖**是指存在开集族 $\{U_\alpha\}$（不一定可数），使得

$$\Omega \subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

与实数集 $\mathbf{R}$ 中的情形类似，紧也有以下等价形式.

定理 1.3 集合 Ω 是紧的充分必要条件是 Ω 的任意开覆盖中必可选出一个有限子覆盖.

关于紧还有一个很重要的性质，就是**嵌套集**. 这个结论不但在第 2 章的 Goursat 定理的证明中用到，早在开始研究复值函数论时就已经用过.

命题 1.4 如果 $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \cdots$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 中的非空紧集序列，当 $n \to +\infty$ 时，

$$\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0,$$

那么一定存在唯一的 $w \in \mathbf{C}$，使得对所有的 $n, w \in \Omega_n$.

证明 在每个 Ω_n 中选择一个 z_n. 根据条件 $\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0$，则 $\{z_n\}$ 是柯西列，因此 $\{z_n\}$ 一定收敛于某个极限值，不妨设该极限为 w. 又因为 Ω_n 为紧集，所以对所有的 $n, w \in \Omega_n$. 下面证明 w 的唯一性，假设存在 w' 也满足条件，且 $w' \neq w$，那么 $|w - w'| > 0$，这与 $\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0$ 矛盾，即 w 是唯一的.

最后要介绍的概念就是连通性. 开集 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是**连通的**，即如果它不能分成两个不相交的非空开集 Ω_1, Ω_2，使得

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

复数集 $\mathbf{C}$ 中连通的开集称为**区域**. 类似地，闭集 F 是**连通的**，即如果它不能分成两个不相交的非空闭集 F_1, F_2，使得 $F = F_1 \cup F_2$.

连通性还可以等价地用曲线描述，这种描述应用更广泛：Ω 是连通的开集，当且仅当 Ω 中的任意两点都可以由含于 Ω 内的某条曲线 γ 连接起来. 详见练习 5.

2 定义在复平面上的函数

2.1 连续函数

设 f 是定义在复数集合 Ω 上的函数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $z, z_0 \in \Omega$，$|z - z_0| < \delta$ 时，总有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则称函数 f 在点 z_0 处**连续**. 或等价地定义为对任意序列 $\{z_1, z_2, \cdots\} \subset \Omega$，如果 $\lim z_n = z_0$，那么 $\lim f(z_n) = f(z_0)$.

如果函数 f 在 Ω 中的任意一点处都连续，则称 f 在集合 Ω 上连续. 连续函数的和或乘积依然是连续的.

因为复数收敛的概念与平面 $\mathbf{R}^2$ 中的点的收敛是一致的，所以函数 f 关于复变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 是连续的当且仅当函数 f 关于两个实变量 x，y 都是连续的.

根据三角不等式，如果函数 f 是连续的，那么实值函数 $|(f(z)|$ 也一定是连续的. 如果存在点 $z_0 \in \Omega$，使得对任意的点 $z \in \Omega$，总有

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)|,$$

则函数 f 在 z_0 点取得**最大值**. 类似地可以定义**最小值**.

定理 2.1　定义在紧集 Ω 上的连续函数一定是有界的，且在 Ω 上可以取得最大值和最小值.

此定理与实函数的情形是类似的，这里就不再重复证明了.

2.2　全纯函数

接下来引入复分析中的一个非常重要的概念，它与之前的讨论有区别，实际上就是引入**真复形**的概念.

令 Ω 是复数集 $\mathbf{C}$ 中的开集，f 是定义在 Ω 上的复变函数. 如果当 $h\to 0$ 时，比值

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{1}$$

的极限存在，其中 $h\in\mathbf{C}, h\neq 0$ 且 $z_0+h\in\Omega$，称函数 f 在点 $z_0\in\Omega$ 处是**可微的**，将此极限值记为 $f'(z_0)$，并称为 f 在点 z_0 处的**微商**，即

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

需要强调的是，h 是一个可从任意方向上趋于 0 的复数.

如果函数 f 在 Ω 中每个点处都是可微的，则称函数 f 在集合 Ω 上是**全纯的**. F 是复数集 $\mathbf{C}$ 中的闭子集，如果函数 f 在某些包含 F 的开集上是全纯的，则称函数 f **在闭集 F 上是全纯的**. 如果函数 f 在复数集 $\mathbf{C}$ 上是全纯的，则称 f 为**整函数**.

“全纯的”有时也可以说是“**正则的**”或“**复可微的**”. 式（1）中对复可微的定义与一般的实变量函数中微分的定义是完全类似的. 但是，复变函数的全纯性要比实变量函数的可微性具有更好的性质. 例如，全纯函数存在无穷阶复微分，也就是说只要复变函数一阶可微，就能保证其微分还可以继续微分，直到无穷多阶. 而实变量函数却存在一阶可微而二阶就不可微的情况. 因此，任何一个全纯函数都是**解析的**，可以在任何点处展成幂级数（幂级数将在下一节讨论），“**解析的**”可以作为“全纯的”的同义词. 与复变函数相比，某些实变函数即使存在无穷阶微分，也不能展成幂级数.（见练习 23）

例 1　函数 $f(z)=z$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 上是全纯的，且 $f'(z)=1$. 事实上，任何多项式函数

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

在整个复平面上都是全纯的. 并且

$$p'(z)=a_1+\cdots+na_nz^{n-1}.$$

应用下面的命题 2.2 很容易证明.

例 2　函数 $1/z$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 中任何不包含原点的开集上都是全纯的，且 $f'(z)=-1/z^2$.