yingyongxing benke shisanwu

应 用 型 本 科

"十三五"规划重点教材

guihua zhongdian jiaocai

高等数学

（下册）

◎ 修春 主编

◎ 施久玉 主审

中国工信出版集团

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

yingyongxing benke shisanwu | 应 “十三 ihua zhongdian jiaocai

高等数学

（下册）

◎ 修春 主编
◎ 施久玉 主审

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 修春主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2016.8
应用型本科“十三五”规划重点教材
ISBN 978-7-115-42718-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①修… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第166452号

内 容 提 要

本套书分为上、下两册。本书为下册（第七章至第十一章），内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、级数，共5章。本书在保证数学的系统性和严密性的基础上，尽量由浅入深、循序渐进，使之通俗易懂. 书中部分内容标注星号，少量例题和习题有一定难度，可满足不同读者的需求。

本书可作为各类应用型本科院校理工类、经济管理类专业的“高等数学”或“微积分”课程教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

◆ 主　　编　修　春
主　　审　施久玉
责任编辑　王亚娜
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.25　　　　2016年8月第1版
字数：267千字　　　2016年8月北京第1次印刷

定价：30.00元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

本书编委会

主　编：修　春
参　编：李永艳　王宝丽　翟文娟
主　审：施久玉

前言

“高等数学”是普通高校各类理工科和管理专业必修的重要基础课程，学好高等数学是学生学好后续专业课程的必要条件。同时，该课程对培养学生的逻辑思维能力、数学应用能力、专业实践能力有着不可或缺的作用。因此，高等数学教学也成为应用型本科教学中的重中之重。

北京交通大学海滨学院数学教研室结合目前应用型本科院校学生的实际情况，在对几年来教学实践进行总结和多方面调查研究的基础上，积极借鉴各类优秀教材的优点，潜心编写了这套《高等数学》教材。本套教材坚持“力求严谨，贯彻思想，注重应用，利于自学”的原则。

“力求严谨”就是在保证数学的系统性和严密性的基础上，尽量由浅入深、循序渐进，以易于学生逐步接受抽象的数学概念。对于一些要求相对较高的数学推导做了适当的处理。

“贯彻思想”是指在本书中对“极限思想”以及作为“极限思想”应用的“微元法”做了充分的叙述，使得学生学完本课程后能够自然而然地接受这个数学的中心思想，并能够将其运用到实践中去。

“注重应用”体现在每一个新概念的引入尽量从实际出发，将抽象的数学概念与实际联系起来，同时在接受数学概念的基础上，又将概念延伸到新的应用中去，书中多处联系了物理、经济等各方面应用的实际问题，渗透了数学建模思想。

“利于自学”缘于例题选题覆盖面广，难度层次清晰，解题过程分析详细，重点题型解法配有小结，习题配备由易到难，书后附有内容全面的附录和习题参考答案，便于学生自主学习。

本套教材分上、下两册，上册内容包括函数与极限、一元函数微积分学、常微分方程；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、级数。建议教学时数 160～180 学时。

参加本套教材编写工作的有：董立伟（第一章）、张坤（第二章）、张莹（第三章）、尹宗明（第四章）、杨慧贤（第五章）、施久玉（第六章和附录）、李永艳（第七章）、王宝丽和董立伟（第八章）、修春（第九章）、翟文娟（第十章），施久玉（第十一章）。董立伟和修春分别对本套教材上册、下册进行了统稿审定。肖金桐对本套教材的编写提出了建设

性意见，并对参编人员做了悉心的指导。

本套教材的编写和出版得到了北京交通大学海滨学院领导的大力支持，在此对他们表示衷心的感谢。

尽管在本套教材出版之前我们经过反复修改，精心推敲，但由于时间和水平所限，书中纰漏乃至错误在所难免，望读者见谅，请专家、同仁和广大读者指正。

编　者

2016 年 5 月

目录

第七章

向量代数与空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何相仿，也是用代数的方法来研究几何问题. 空间解析几何的知识对学习多元函数微积分起着重要作用. 本章先引进向量的概念，讨论向量代数，然后应用向量代数讨论空间的平面、直线、曲面、曲线等.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

定义 1　既有大小，又有方向的量，称为**向量(或矢量)**.

例如物理学中的力、速度、位移等均为向量.

向量一般用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$(见图 7-1). 有时也用黑体字母或在字母上面加箭头来表示向量，例如$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$，等等.

图 7-1

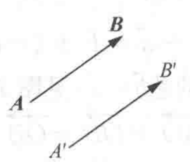

图 7-2

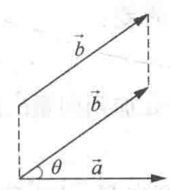

图 7-3

向量的大小称为向量的**模**. 记做$\left|\overrightarrow{AB}\right|$或$|\vec{a}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**.

模等于零的向量称为**零向量**，记做 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看做是任意的.

如果向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$大小相等，方向相同，那么称两向量相等，记做$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$(见图 7-2).

只研究向量的大小和方向，而不考虑它的起点位置的向量称为**自由向量**. 在自由向量范畴中，经过平移后能完全重合的向量都是相等的.

记两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$之间的夹角为θ(见图 7-3)，规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 特别地，当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时，$\theta=0$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时，$\theta=\pi$.

如果 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，则称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，记做$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$. 如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$，就称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直(或正交)，记做$\vec{a}\perp\vec{b}$. 特别地，零向量与任何向量都平行也与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此，两向量平行，又称**两向量共线**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

平行四边形法则 设有两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，作$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形，则对角线向量$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$(见图 7-4)称为这两个**向量的和**，记做$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，或$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

由图 7-4 可知，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$.

这称为两个向量的和的**三角形法则**.

向量的加法符合下列运算律：

(1)交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(2)结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

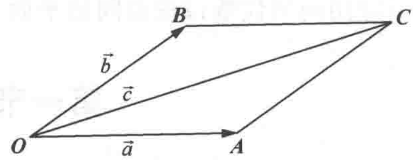

图 7-4

三角形法则可以推广到任意有限个向量的和，只需将前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_n}$，再以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7-5 所示，有

$$\vec{s}=\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\vec{a_4}+\vec{a_5}.$$

设$\vec{a}$为一向量，与$\vec{a}$的模相同而方向相反的向量叫做$\vec{a}$的**负向量**，记做$-\vec{a}$. 规定两个向量$\vec{b}$与$\vec{a}$的差：

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

即把向量$-\vec{a}$加到向量$\vec{b}$上，便得$\vec{b}$与$\vec{a}$的差$\vec{b}-\vec{a}$(见图 7-6). 显然，任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量$\vec{a}$与$\vec{b}$移到同一起点 O，则从$\vec{a}$的终点 A 向$\vec{b}$的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量$\vec{b}$与$\vec{a}$的差$\vec{b}-\vec{a}$(见图 7-7).

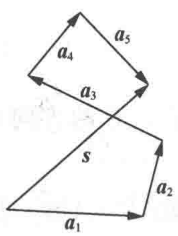

图 7-5

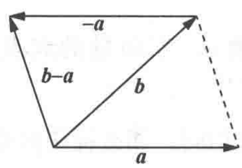

图 7-6

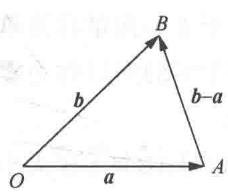

图 7-7

2. 向量与数的乘法

向量$\vec{a}$与实数λ的乘积是一个向量，记做$\lambda\vec{a}$，这种运算称为**数乘向量**.

数乘向量运算的模与方向规定如下.

(1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

(2) 当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同方向；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反方向；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，这时它的方向是任意的.

特别地，$1\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

(3) 若$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$，或$\vec{a}^{\circ}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，其中$\vec{a}^{\circ}$表示与$\vec{a}$方向一致的单位向量.

数乘向量运算符合下列运算律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

向量相加及数乘向量运算统称为**向量的线性运算**.

由于向量$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 1 设向量$\vec{a}\neq\vec{0}$，那么，向量$\vec{b}$平行于$\vec{a}$的充要条件是：存在唯一的实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证明 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设$\vec{b}/\!/\vec{a}$. 取$|\lambda|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，当$\vec{b}$与$\vec{a}$同向时$\lambda$取正值，当$\vec{b}$与$\vec{a}$反向时$\lambda$取负值，即有$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

这是因为此时$\vec{b}$与$\lambda\vec{a}$同向，且

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|.$$

再证数λ的唯一性. 设$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，又设$\vec{b}=\mu\vec{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}，即|\lambda-\mu||\vec{a}|=0.$$

因$|\vec{a}|\neq 0$，故$|\lambda-\mu|=0$，即$\lambda=\mu$.

定理证毕.

三、空间直角坐标系

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，就确定了三条都以O为原点的两两垂直的数轴，依次记为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴)，统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$ **坐标系**(见图 7-8). 三条坐标轴的正方向符合**右手法则**，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\dfrac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向(见图 7-9).

规定右手法则是为了在空间坐标系中同一图形表示唯一.

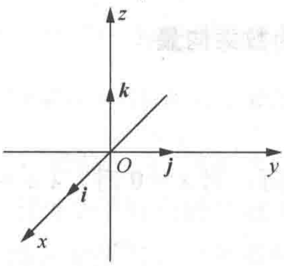

图 7-8

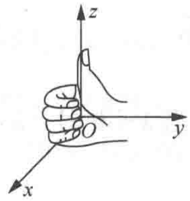

图 7-9

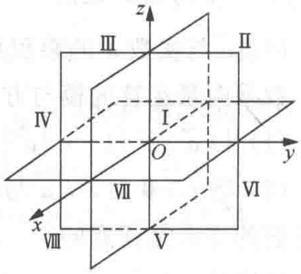

图 7-10

三条坐标轴中的任意两条分别确定的平面 xOy，yOz，zOx 统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(见图 7-10).

任给向量$\vec{r}$，有对应点 M，使$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，如图 7-11 所示，有

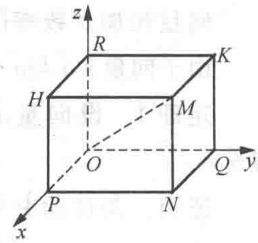

图 7-11

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $$\overrightarrow{OP}=x\,\vec{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\,\vec{j},\ \overrightarrow{OR}=z\,\vec{k},$$

则 $$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}.$$

上式称为向量$\vec{r}$的坐标分解式，$x\,\vec{i}$、$y\,\vec{j}$、$z\,\vec{k}$称为向量$\vec{r}$沿三个坐标轴方向的分向量. 显然，给定向量$\vec{r}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$三个分向量，进而确定了 x、y、z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x、y、z，也就确定了向量$\vec{r}$与点 M. 于是点 M、向量$\vec{r}$与三个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系，据此，定义：有序数 x、y、z 称为向量$\vec{r}$的坐标，记做$\vec{r}=(x, y, z)$；有序数 x、y、z 也称为**点 M 的坐标**，记做 $M(x, y, z)$.

向量$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号(x, y, z)既表示点 M，又表示向量$\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：如果点 M 在 yOz 面上，那么 $x=0$；如果点 M 在 x 轴上，那么 $y=z=0$；如果点 M 为原点，那么 $x=y=z=0$.

四、坐标表示下的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法、以及数乘向量的运算如下.

设 $$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z),\ \vec{b}=(b_x, b_y, b_z),$$

即 $$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

则 $$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k},$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k},$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}(\lambda\text{ 为实数}),$$

即

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z),$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z),$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

当向量$\vec{a}\neq\vec{0}$时，向量$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a}$相当于$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，坐标表示式为

$$(b_x,\ b_y,\ b_z)=\lambda(a_x,\ a_y,\ a_z),$$

即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

这也相当于向量$\vec{b}$与$\vec{a}$对应的坐标成比例. 这里规定：若分母中有零，则对应的分子也为零.

例 1　设向量$\vec{a}=(1,\ -2,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ -1,\ 1)$，求向量$3\vec{a}+2\vec{b}$.

解　$3\vec{a}+2\vec{b}=3(1,\ -2,\ 1)+2(4,\ -1,\ 1)=(11,\ -8,\ 5)$

例 2　已知$\vec{a}=(2,\ 4,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 6,\ k)$并且$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，求k.

解

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}，\text{即}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{1}{k}，\text{所以 }k=\frac{3}{2}.$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量$\vec{r}=(x,\ y,\ z)$，作$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，如图 7-11 所示，有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k},$$

有

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,\ |\overrightarrow{OQ}|=|y|,\ |\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是得向量模的坐标表示式

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$和点$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则点A与点B间的距离$|AB|$就是向量$\overrightarrow{AB}$的模. 由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2,\ z_2)-(x_1,\ y_1,\ z_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$

即得A、B两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 3　求证以$M_1(3,\ 3,\ 1)$、$M_2(1,\ 2,\ 4)$、$M_3(5,\ 1,\ 4)$三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解　因为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(4-1)^2=14,$$

$$|\overrightarrow{M_2M_3}|^2=(5-1)^2+(1-2)^2+(4-4)^2=17,$$
$$|\overrightarrow{M_3M_1}|^2=(5-3)^2+(1-3)^2+(4-1)^2=17,$$

所以 $|\overrightarrow{M_2M_3}|=|\overrightarrow{M_3M_1}|$，即$\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 4 设点 P 在 x 轴的正半轴上，它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离是到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标为$(x,0,0)$,

$$|\overrightarrow{PP_1}|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$
$$|\overrightarrow{PP_2}|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$
$$|\overrightarrow{PP_1}|=2|PP_2|,\text{ 即 } \sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

解得，$x=1$，-1(舍)，所求点为$(1,0,0)$.

例 5 已知两点 $M(-1,0,3)$、$N(1,-4,7)$，求与$\overrightarrow{MN}$同方向的单位向量$\vec{e}$.

解 $$\overrightarrow{MN}=(1,-4,7)-(-1,0,3)=(2,-4,4),$$

故 $$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6,$$

于是 $$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{1}{6}(2,-4,4)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

2. *方向角和方向余弦*

定义 2 非零向量$\vec{r}$与三条坐标轴的正向所成的夹角 α、β、γ 称为向量$\vec{r}$的**方向角**.$(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，同时，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量$\vec{r}$的**方向余弦**.

由图 7-11 可知，

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}.$$

显然，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\vec{r}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例 6 已知两点 $M_1(1,2,3)$和 $M_2(2,1,3+\sqrt{2})$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(2-1,1-2,3+\sqrt{2}-3)=(1,-1,\sqrt{2}),$$
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=2,$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{1}{2},\ \cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角为

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{2\pi}{3},\ \gamma=\frac{\pi}{4}.$$

3. *向量在轴上的投影*

定义 3 设点 O 及单位向量$\vec{e}$确定了 u 轴，过空间一点 M 作垂直于 u 轴的平面Π，平

面Ⅱ与 u 轴的交点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影；若 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$，即 $|\overrightarrow{OM'}|=\lambda$，则称 λ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的**投影**，记做 $\mathrm{Prj}_\mu\overrightarrow{OM}$ 或 $\overrightarrow{OM}_\mu$.

因此，在直角坐标系中，向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 的 3 个分量 a_x，a_y，a_z 分别是 $\vec{a}$ 在 x，y，z 轴上的投影.

向量的投影具有如下性质：

(1) $\mathrm{Prj}_\mu\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$（$\varphi$ 为向量 $\vec{a}$ 与 u 轴的夹角）；

(2) $\mathrm{Prj}_\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_\mu\vec{a}+\mathrm{Prj}_\mu\vec{b}$；

(3) $\mathrm{Prj}_\mu(\lambda\vec{a})=\lambda\mathrm{Prj}_\mu\vec{a}$（$\lambda$ 为实数）.

例 7　设 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=-1$，则求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ.

解　因为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\theta=-1,$$

又有

$$|\vec{b}|=2,$$

则

$$\cos\theta=-\frac{1}{2},$$

故

$$\theta=\frac{2}{3}\pi.$$

习题 7-1

1. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$，起点为(1，−1，5)，求向量的终点.

2. 设 $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$，$\vec{v}=-\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示向量 $2\vec{u}-3\vec{v}$.

3. 设点 $M_1(1, -1, 2)$，$M_2(0, 1, -1)$，求 $3\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $\overrightarrow{M_1M_2^\circ}$.

4. 设向量 $\vec{a}=(2, -2, 1)$，$\vec{b}=(4, -2, 2)$，$\vec{c}=(6, -3, -3)$，求向量 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$，$\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

5. 求下列各对点之间的距离：

(1) (2，3，1)，(2，7，4)；　　(2) (4，−1，2)，(−1，3，4).

6. 已知 $\vec{a}=(3, 2, 1)$，$\vec{b}=(2, 4/3, k)$，并且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，求 k.

7. 已知 $A(2, 2, 3)$，$B(6, -2, -1)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.

8. 求与向量 $\vec{a}=(0, 4, 3)$ 平行的单位向量.

9. 设点 $P_1(0, -1, 2)$，$P_2(-1, 1, 0)$，求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦.

10. 证明以 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

11. 证明：三点 $A(1, 0, -1)$，$B(3, 4, 5)$，$C(0, -2, -4)$ 共线.

第二节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积(点积)

1. 数量积的概念

设光滑水平面上，在恒力$\vec{F}$的作用下，物体位移了$\vec{s}$，又设$\vec{F}$、$\vec{s}$的夹角为θ(见图 7-12). 由物理学知道，力$\vec{F}$对物体所作的功为$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$.

功是由力$\vec{F}$和位移$\vec{s}$两个向量所唯一确定的一个数量. 除去其中的物理含义，我们就得到两个向量数量积的概念.

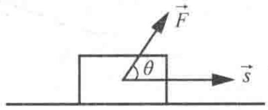

图 7-12

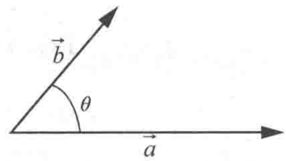

图 7-13

定义 1　若$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个非零向量，它们的夹角为θ(见图 7-13)，则称$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**(或内积、点积)，记做$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

根据这个定义，上述问题中力所作的功公式可写成$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

两个向量的数量积是一个实数，若$\vec{a}$与$\vec{b}$中有一个为零向量，则规定$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

由数量积定义可推得：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$；

(2) 对于两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$($\theta$ 为$\vec{a}$、$\vec{b}$之间夹角)，从而

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

数量积符合下列运算律：

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$，$\lambda$ 为实数.

例 1　证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证明　因为

$$\begin{aligned}&[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}\\=&(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}\\=&(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c})\\=&0(\vec{b}\cdot\vec{c})\\=&0,\end{aligned}$$

所以，向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

2. 数量积的坐标表达式.

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

则
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_x\vec{i}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&\quad+a_z\vec{k}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}\\&\quad+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}.\end{aligned}$$

由于$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$是两两垂直的单位向量，所以有
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$

从而得
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

即两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和.

设非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角为θ，则
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此可见，两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直的充要条件又可表示为
$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 2　已知$\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，求：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；(2) $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ.

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9$；

(2) $$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-9}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以
$$\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

例 3　已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，求向量$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$的数量积.

解
$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})&=2\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=2|\vec{a}|^2+3|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}-2|\vec{b}|^2\\&=2\cdot2^2+3\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot3^2\\&=-1.\end{aligned}$$

例 4　求一个单位向量，使它与向量$\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+3\vec{k}$都垂直.

解　设所求单位向量为$\vec{e}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$，由条件知，
$$\vec{e}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{e}\cdot\vec{b}=0,\ |\vec{e}|=1.$$