普通高等教育“十三五”规划教材

微积分（经管类）

主编　成立社
主审　李梦如

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

（经管类）

主编　成立社
主审　李梦如

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的经济管理类本科专业《微积分》课程的教学基本要求，结合作者多年在微积分课程的教学实践与教学改革所积累的教学经验，并借鉴国内外同类教材的精华编写而成. 全书共11章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、常微分方程与差分方程. 书中以经济、管理类学生易于接受与理解的方式，科学系统地编写了微积分的基本内容，各章重点介绍了微积分在经济、金融及管理方面的应用.

本书可作为高等学校经济、管理类专业以及相关专业本科生教材，也可作为报考上述专业硕士研究生入学数学考试备考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分：经管类/成立社主编. —北京：科学出版社，2017.6

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-03-053542-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①成… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第129411号

责任编辑：吉正霞 李香叶/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2017年6月第 一 版 印张：29 1/4

2017年6月第一次印刷 字数：746 000

定价：56.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《微积分》编委会名单

前　言

目前，随着我国高等教育的蓬勃发展，高等学校经济管理类专业本科生对数学基础课《微积分》提出了一系列的要求．同时，在经济管理类专业的本科生中，有相当多的学生希望在完成本科阶段的学习后能攻读硕士学位继续深造．为了适应这一要求，我们总结多年在经济、管理类专业《微积分》课程的教学实践、教学改革及教学研究所积累的成功教学经验，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会最新制定的经济管理类本科专业《微积分》课程的教学基本要求，编写成适合经济管理类专业学生使用的《微积分（经管类）》教材．编写时始终把握内容的深度与广度不低于经济管理类微积分课程的基本要求，并力图使本书有以下一些特点．

(1) 在教材内容及体系编排上，汲取了国内外最新同类教材的精华，充分考虑到经济管理类专业数学教学实际和特点，以及数学的系统性、严谨性，力求使教材内容的叙述深入浅出，层次分明，清晰易懂，便于自学．

(2) 按照认知规律，从典型的几何直观、自然科学与经济分析的例子出发，引出微积分的基本概念、基本理论．引进概念力求自然、简洁，从简处理了一些定理的证明．

(3) 紧密结合章节的内容，配备了相当数量的典型例题，例题讲解强调基本技能训练、基本概念和结论内涵的理解，培养学生分析和综合解决问题的能力，提高学生的数学素质．

(4) 加强了微积分各章节内容在经济、金融及管理方面的应用，增强学生应用数学去解决经济管理方面问题的意识、兴趣和能力，为后继课程的学习打下良好的基础．

(5) 各章节习题选配的数量及类型丰富、难易适度，层次感强，覆盖面大．旨在培养读者的理解能力和应用能力．同时也使学生在学习时，无须再额外去寻找其他微积分习题来做．

(6) 由于中学数学教材内容的可选性，考虑到来自不同地域学生的实际情况，我们把中学某些内容和微积分中常用到的初等数学公式，以及微积分中某些需要展开深入讲解的内容作为附录，编于书后，方便教学或查阅．

(7) 为了便于学生掌握教材内容，提高分析和解决问题的能力，我们专门编写了与本书配套的《微积分习题分析与全解指导》辅导教材，可供教师与学生参考．

为了控制课时数，书中 * 的内容为选学内容．

本书由郑州大学成立社任主编．郑州大学吴剑峰、薛艳、吴志德任副主编．本书由成立社负责统编、修改、润色及定稿．全书插图由成立社绘制．

本书由全国首届国家级教学名师郑州大学数学与统计学院李梦如教授主审，并提出了具有建设性的意见，为本书增色不少．

本书的编写得到了郑州大学“教育教改研究项目”和“教材建设”的立项资助，还得到了郑州大学数学与统计学院领导的支持与鼓励，也得到了众多同行的热心帮助与建议．郑州大学数学与统计学院施仁杰教授精心通读了本书初稿，并提出了很多实质性的建议．郑州大学数学与统计学院杜殿楼教授在使用本书初稿教学中对教材内容的改进提出了很多具体的建议与指导，郑州大学数学与统计学院罗来兴、薛波副院长对于本书从组织编写到成稿给予了很大的帮

助.在编写过程中还参阅了有关作者的书籍,同时也得到科学出版社编辑的关心与支持,在此向他们一并表示衷心的感谢.

主观上编者力求编写出一本高质量的教材,尽管数易其稿,但由于编者水平所限,书中难免存在某些缺陷,恳请同行与读者批评指正.

编　者

2017 年 5 月 9 日

目　录

第1章 函　数

函数是现实世界中变量之间的相互依存关系在数学中的反映，也是微积分学研究的主要对象. 中学时我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解，本章将在复习中学有关函数内容的基础上，进一步介绍函数的简单性态以及基本初等函数和初等函数，并介绍一些经济学中常用的函数.

1.1 预备知识

1.1.1 集合的概念

1. 集合及其表示法

在数学上，通常将具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**，组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 中的元素，则用 $a \in A$ 来表示；若 a 不是集合 A 中的元素，则用 $a \notin A$(或 $a \overline{\in} A$) 来表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**，不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 表示.

表示集合的方法有两种：一是列举法，二是描述法. 列举法，就是把它的所有元素一一列举出来，写在一个大括号内. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的解构成的集合可以表示为 $A=\{-1,1\}$；而描述法，就是指出集合中的元素所具有的性质. 一般地将具有某种性质 P 的对象 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 具有某种性质 }P\}.$$

例如，直线 $x+y=1$ 上的所有点构成的集合，可以表示为 $A=\{(x,y) \mid x+y=1\}$.

只有一个元素 x 的集合称为单元素集，记作 $A=\{x\}$.

设有 A,B 两个集合. 若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$(或者 $B \supset A$)；空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

2. 数集

元素是数的集合称为**数集**，本书中所涉及的集合都是数集. 通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$. 用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{C}$ 表示复数集. 本书是在实数范围内研究函数.

有时我们在表示数集字母的右上角添加“+”或者“−”，用来表示该数集中的所有正数或者所有负数构成的特定数集. 例如，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数构成的集合，$\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数构成的集合.

1.1.2 集合的运算

集合的基本运算主要有三种，即并集、交集与差集.

1. 集合的并　由集合 A 与 B 中的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

2. 集合的交　由集合 A 与 B 中所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

3. 集合的差　由含于 A 但不含于 B 的元素所构成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$（或 $A\backslash B$），即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

例如，$\mathbf{N}-\{0\}=\mathbf{N}^+$，$\mathbf{Z}-\mathbf{N}=\mathbf{N}^-$.

1.1.3　实数的绝对值及其性质

1. 实数的绝对值

对于任何一个实数 x，它的绝对值定义为

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

绝对值有以下基本性质：

对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

(1) $|x|\geqslant 0$；当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$；

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(3) 设 $k>0$，则

$$|x|<k\Leftrightarrow -k<x<k;\quad |x|>k\Leftrightarrow x>k\text{ 或 }x<-k,$$
$$|x|\leqslant k\Leftrightarrow -k\leqslant x\leqslant k;\quad |x|\geqslant k\Leftrightarrow x\geqslant k\text{ 或 }x\leqslant -k.$$

此处，记号“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”或“当且仅当”或“充分必要（条件）”，本书后面各章出现该记号时，也作同样的理解.

2. 绝对值的运算性质

对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有

(1) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$（三角不等式）；

(2) $|x|-|y|\leqslant \big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|$；

(3) $\dfrac{|x|+|y|}{2}\geqslant\sqrt{|xy|}$，当且仅当 $|x|=|y|$ 时等号成立.

一般地，当 $x_i\in\mathbf{R}^+$ 时（$i=1,2,\cdots,n$），恒有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\quad\text{（均值不等式）},$$

其中，仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立；

(4) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

(5) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

下面仅就三角不等式进行证明.

证　由绝对值基本性质(2)，有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

从而有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

由绝对值基本性质(3)，由于 $|x|+|y|\geqslant 0$，于是得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

1.1.4 区间与邻域

区间与邻域都是微积分中常见的一类实数集.

1. 区间

区间的记号和定义如下(其中 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$)

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上区间统称为**有限区间**，a,b 分别称为区间的左端点和右端点，$b-a$ 称为上述区间的长度. 微积分中可以将区间的左端点延伸为 $-\infty$，右端点延伸为 $+\infty$. 这类左端点为 $-\infty$ 或右端点为 $+\infty$ 的区间称为**无限区间**，具体定义和记号如下

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};\qquad (a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};\qquad (-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\},$$

其中 $+\infty$，$-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们仅仅是记号，不表示数. 以后在不需要指明区间是开区间、闭区间或半开半闭区间，以及有限或无限区间的场合下，我们就简称它为区间，并且常用字母 $\boldsymbol{I}$ 表示这样一个泛指的区间.

2. 邻域

以后讨论问题时，常常需要考虑由某点 a 附近的所有点构成的集合，这些点的集合就是邻域. 具体地即为：设 a 为一个实数，$\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**(图 1.1).

当我们不要求说明邻域的半径时，就将点 a 的邻域简记为 $U(a)$.

在邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 后得到的实数集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心(或空心)**δ **邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 显然去心邻域是两个开区间的并集(图1.2)，即

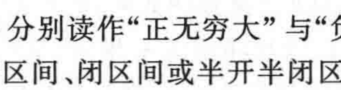

图 1.1

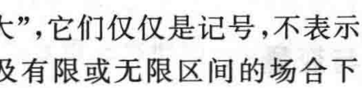

图 1.2

$$\mathring{U}(a,\delta)=U(a,\delta)-\{a\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

同样，当不要求说明邻域的半径时，点 a 的去心邻域也简记为 $\mathring{U}(a)$.

为了叙述方便，有时也把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

习　题　1.1

(A)

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,5\}$，求：

(1) $A\cup B$；　(2) $A\cap B$；　(3) $A-B$；　(4) $B-A$.

2. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 8$；　(2) $|x-1|<\mathrm{e}$；　(3) $0<|x-1|\leqslant 2$；　(4) $|x+1|>2$.

3. 点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域是(　　).

A. $(x_0-\delta,x_0+\delta]$　　B. $[x_0-\delta,x_0+\delta)$

C. $[x_0-\delta,x_0+\delta]$　　D. $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

4. 证明：当 $n\in\mathbf{N}^+$，且 $a\geqslant 1$ 时，有 $\sqrt[n]{a}\leqslant 1+\dfrac{a-1}{n}$.

(B)

试用均值不等式证明下列不等式：

(1) 当 $n\in\mathbf{N}^+$ 时，有 $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

(2) 设 $\mu\in\mathbf{Q}^+$，$0<\mu<1$，则当 $x>-1$ 时，有 $(1+x)^\mu<1+\mu x$（伯努利(Bernoulli) 不等式）.

1.2　函数的概念与具有某种特性的函数

1.2.1　常量与变量

在实际问题中，我们经常会遇到各种各样的量，这些量一般可以分为两种：一种是在考察的某一变化过程中保持不变（取同一数值）的量，这种量叫**常量**；另一种是在考察的变化过程中可以发生变化的量（可以取不同数值），这种量叫**变量**.

常量常用字母 a,b,c,d 等来表示；变量常用字母 x,y,z,t,u,v 等来表示.

常量与变量不是绝对的，而是相对的. 一个量是常量还是变量要具体问题具体地分析. 一般在研究问题时，为了简化，常常把变化很小或者对研究问题影响不大的量看作为常量.

1.2.2　函数的概念

在同一个过程中，我们发现许多变量的变化不是孤立的，而是遵循一定的规律相互制约又相互依赖，这种变化规律通常由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来. 例如，商品的总收入 R 与销售量 Q、价格 P 之间的关系为 $R=PQ$. 数学上把这种变量之间的确定的对应关系就称为函数关系.

定义 1.2.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集合. 如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的实数值与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，或称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为函数 f 的**自变量**，y 称为函数 f 的**因变量**. x 的取值范围 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 D_f 或 $D(f)$，即 $D_f=D$.

对于函数 $y=f(x)$，当 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=$

$f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，此时也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 当 x 取遍 D_f 的各个值时，对应的函数值全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $R(f)$，即

$$R_f = R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

若 $x_0 \notin D_f$，则称该函数在 x_0 处无定义.

关于函数概念我们作以下几点说明：

(1)"函数"一词指的是对应法则 f，而 $f(x)$ 是与自变量 x 对应的函数值，应注意 f 与 $f(x)$ 是有区别的. 由于经常通过函数值来研究函数，为了叙述方便，也常将 $f(x)$ 说成函数.

(2) 从函数的定义可以看出，确定一个函数的两个基本要素是定义域 D_f 与对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则不论使用什么样的函数记号，它们都是同一个函数.

例如，$f(x) = 1$ 与 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ 表面形式虽不相同，但二者却是同一个函数；而 $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \dfrac{x}{x}$，因为 $D_f \neq D_g$，故二者是不同的函数；再如 $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $g(x) = \sin x$，因其对应法则不同，故二者是不同的函数.

(3) 函数的定义域 D_f 就是自变量所能取得的那些数值构成的集合. 它可分为两种：一种是在实际问题中，要根据问题的条件与实际意义来确定；另一种在理论研究中，如果函数是由数学表达式给出的，又无须考虑它的实际意义，那么函数的定义域就是使该表达式有意义的自变量 x 的一切可能取值所构成的数集. 例如，由公式 $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ 给出的函数的定义域是闭区间 $[-5,5]$. 但是，如果 x 表示的是斜边长为 5 的直角三角形的一条直角边长时，此时 $f(x)$ 表示的是另一条直角边的边长，此时该函数的定义域是开区间 $(0,5)$.

例 1.2.1　求函数 $f(x) = \sqrt{4-x} + \dfrac{1}{\ln(x-2)}$ 的定义域.

解　要使表示函数 $f(x)$ 的表达式有意义，必须有

$$\begin{cases} \ln(x-2) \neq 0, \\ x-2 > 0, \\ 4-x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 \neq 1, \\ x > 2, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$$

故函数的定义域为 $D_f = (2,3) \cup (3,4]$.

(4) 在函数定义中，对于 D_f 中的任一个 x，对应的函数值 y 只有一个值时，这样的函数称为单值函数. 如果对于 D_f 中的某些 x，它们中的每一个数 x 可能对应几个甚至无穷多个函数值 y，这种情况不符合函数的定义，但为了方便也把它们称为多值函数. 对于多值函数可以通过附加条件将其分解成单值函数(称为单值分支)来研究. 例如，单位圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定了变量 x 和 y 之间的对应法则，显然当 $x \in (-1,1)$ 时，对应的 y 值有两个. 我们可以把它分解为两个单值分支 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$，$x \in [-1,1]$ 进行分析讨论. 如无特别说明，本书所讨论的函数都是指单值函数.

(5) 因变量 y 已由自变量 x 直接表达为 $y = f(x)$ 形式的函数称为**显函数**，如 $y = \ln x$ 是显函数. 而有时函数关系并不能直接表达为 $y = f(x)$ 的形式，而是通过某个方程 $F(x,y) = 0$ 表示出来的. 一般地，在一定的条件下，由一个方程 $F(x,y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ 称为**隐函数**，如 $e^{xy} + x + y = 2$ 是隐函数.

1. 函数的表示法

为了很好地研究函数关系，就应该采用适当的方法把它的对应法则 f 表示出来. 表示对应法则 f 的方法有很多，常用的有三种：列表法、图示法和解析法(公式法).

(1) 列表法　以列表形式表示函数关系的方法称为函数的列表法，即将自变量 x 与因变量 y 的对应数据列成表格，它们之间的函数关系从表格上一目了然. 例如，三角函数表、对数函数表等.

(2) 图示法　以图形表示函数关系的方法称为函数的图示法.

例如，气象站用自动温度记录仪记录一昼夜中温度的变化情况，温度记录仪在坐标纸上描出了一条反映温度变化的曲线，就可以表示气温随时间变化的关系.

图示法表示函数是基于函数图形概念，即直角坐标系 xOy 中点的集合

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

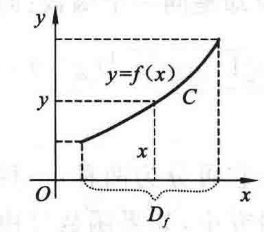

图 1.3

称为函数 $y = f(x)$ 的图形. 一般情况下，函数 $y = f(x)$ 的图形 C 通常是 xOy 坐标平面上的一条曲线(图 1.3). 因此又称函数 $y = f(x)$ 的图形为曲线 $y = f(x)$. 函数图形具有直观性，这样使得我们可以借助于几何直观去理解函数的有关特性.

(3) 解析法　用运算符号将自变量与相关常数连成一个数学表达式来表示函数的方法称为函数的解析法，也称为公式法. 此时对于定义域中的每个自变量的值，按照表达式中的数学运算来确定因变量的值. 解析法的优点在于能具体运算，便于理论研究，它是研究函数最基本的方法.

微积分学中主要讨论用解析法表示的函数，而以函数的图形作为辅助讨论的工具.

2. 分段函数

在函数的定义中，值得注意的是，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应法则，在很多问题中常会遇到这样的情况，就是在定义域的不同部分用不同的表达式来表示对应法则，这种分段表示的函数，一般常称为**分段函数**. 例如，绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

为一分段函数；$x = 0$ 称为该函数的分段区间的**分段点**或**分界点**.

值得注意的是，分段函数并不是几个函数，而是一个函数，只不过是在它的定义域中的不同部分用不同式子合起来表示此函数的对应法则而已. 分段函数的定义域是各段上自变量取值的并集. 相邻两个子区间的公共端点称为分段函数的分界点或分段点.

分段函数也是自然科学和经济学中常用的函数形式.

例 1.2.2　**符号函数**(Sign Function)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

符号函数的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$，如图 1.4 所示.

对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，下列关系成立：

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x, \quad x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x.$$