大学生数学竞赛指导全书

（非数学类）

董秋仙　主　编
高文明　副主编

科学出版社

大学生数学竞赛指导全书

（非数学类）

董秋仙　主　编
高文明　副主编

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书紧扣大学生数学竞赛的大纲，层次鲜明，逻辑性强，知识点全面但不烦琐. 全书共 10 章，包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，空间解析几何与多元函数微分学，多元函数积分学，常微分方程，无穷级数，行列式、矩阵与向量，线性方程组，矩阵的特征值、特征向量与二次型.

本书可作为本科院校进行大学生数学竞赛的培训教材，也可作为非数学类专业学生的数学提高课教材，还可作为考研辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛指导全书：非数学类/董秋仙主编. —北京：科学出版社，2017.9

ISBN 978-7-03-053722-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①董… Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 138744 号

责任编辑：胡海霞 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 9 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2017 年 9 月第一次印刷　印张：22 1/2
字数：443 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

全国大学生数学竞赛 (the Chinese Mathematics Competitions, CMC) 自 2009 年开始已历经七届, 作为一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛, 大学生数学竞赛活动为青年学子提供了一个展示基础知识掌握程度和思维能力的舞台, 对高等学校培养人才, 促进数学课程的改革与建设, 增强大学生学习数学的兴趣, 培养大学生的创新精神和应用能力有着重要的意义. 但目前针对大学生数学竞赛辅导的教材很少, 有必要编写一本适合理工科学生参加数学竞赛的教材.

《大学生数学竞赛指导全书 (非数学类)》紧扣大学生数学竞赛的大纲, 全书共 10 章, 包括函数、极限与连续, 一元函数微分学, 一元函数积分学, 空间解析几何与多元函数微分学, 多元函数积分学, 常微分方程, 无穷级数, 行列式、矩阵与向量, 线性方程组, 矩阵的特征值、特征向量与二次型. 每章由内容概要、例题选讲、竞赛训练题和参考答案四部分组成. 通过具体的实例, 使读者一步一步地随着作者的思路来完成数学竞赛知识点的学习, 书中所给例题具有技巧性而又对知识点做了集结, 符合竞赛试题特点, 主要竞赛知识点都有体现, 可使读者思路畅达, 将所学知识融会贯通, 灵活运用, 以达到事半功倍之效. 本书可作为本科院校大学生数学竞赛的培训教材以及非数学类专业学生的数学提高课教材, 也可作为考研辅导教材.

本书由董秋仙、高文明主持编写, 董秋仙编写了第 1 章、第 2 章, 杨玉桃编写了第 3 章, 高文明编写了第 4 章、第 8 章, 朱向洪编写了第 5 章, 吴问娣编写了第 6 章, 刘君编写了第 7 章, 张芳编写了第 9 章, 刘汝良编写了第 10 章.

科学出版社编辑胡海霞对本书的编写给予了肯定, 为本书的出版付出了辛勤的劳动, 在此表示衷心感谢.

本书的出版得到南昌大学教务处的资助, 在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平、经验有限, 书中的不足之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

编　者

2016 年 12 月于南昌大学

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

1.1 内容概要

1.1.1 函数

1. 函数的定义

设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f, 对 A 中任意数 x, 按照对应关系 f, 对应唯一的一个数 $y \in \mathbf{R}$, 则称 f 是定义在数集 A 上的**函数**, 表示为

$$f: A \to \mathbf{R}.$$

与数 x 相对应的 y 称为 x 的**函数值**, 记为 $y = f(x)$, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**, 函数值的集合 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

2. 几种特殊函数

(1) "对任意 $x \in \mathbf{R}$, 对应的 y 是不超过 x 的最大整数", 这是一个函数, 表示为 $y = [x]$, 称为**取整函数**.

(2) "对任意 $x \in \mathbf{R}$, 对应的 $y = x - [x]$". 这是一个函数, 记为 $y = \{x\}$, 称为**小数部分函数**.

(3) **符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(4) **狄利克雷函数**

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

下面 3 个函数也是常用到的.

(i) $y = f(x) = \begin{cases} b, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的有理数}, \\ a, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的无理数}. \end{cases}$

(ii) $y = g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \text{ 为 } [a,b] \text{ 中的有理数}, \\ \psi(x), & x \text{ 为 } [a,b] \text{ 中的无理数}, \end{cases}$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数.

(iii) 定义在 $[0,1]$ 区间上的**黎曼函数**

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},\text{其中 } m,n\in\mathbf{N}_+,\text{ 且 } m \text{ 与 } n \text{ 互质},\\ 1, & x=0,\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

(5) **分段函数**

设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数, $\psi(x)$ 是 $(b,c]$ 上的函数, $h(x)$ 是 $(c,d]$ 上的函数. 定义 $[a,d]$ 上的函数

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[a,b],\\ \psi(x), & x\in(b,c],\\ h(x), & x\in(c,d]\end{cases}$$

称为**分段函数**.

3. 函数的性质

1) **函数的单调性**

(1) 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义. 如果对于任意 x_1, $x_2\in A$, 且 $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 A 上**严格增加**(**严格减少**), 有时也称 $f(x)$ 在 A 上**严格单调增加**(**严格单调减少**).

(2) 若对任意 $x_1,x_2\in A$, 且 $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 A 上**单调增加**(**单调减少**).

2) **函数的有界性**

(1) 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义. 如果存在 $c>0$, 使得对任意的 $x\in A$, 有

$$|f(x)|\leqslant c,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上**有界**.

(2) 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义. 如果存在数 $p(q)$, 使得对任意的 $x\in A$, 有

$$f(x)\leqslant p\quad(q\leqslant f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上**有上界**(**有下界**), 并称 $p(q)$ 是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的一个**上**(**下**)**界**.

3) **函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义. 若对每一个 $x\in A$, 有 $-x\in A$ 且 $f(-x)=-f(x)(f(-x)=f(x))$, 则称函数 $f(x)$ 为 A 上的**奇函数**(**偶函数**).

4) **函数的周期性**

函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义. 若存在 $T>0$, 使得对一切 $x \in A$ 有 $x \pm T \in A$ 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为 A 上的**周期函数**, T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

若函数 $f(x)$ 有最小周期, 通常称这个最小周期为 $f(x)$ 的**基本周期**.

注 函数即使存在周期也不一定有最小周期. 例如, 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

是周期函数, 但没有最小周期.

1.1.2 极限

1. *数列的极限*

设 $\{a_n\}$ 为一数列, a 为定数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的**极限**是 a(或称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限), 或称数列 $\{a_n\}$**收敛**到 a(此时称 $\{a_n\}$ 是**收敛数列**, 或称 $\{a_n\}$**存在极限**), 表示为

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \to a (n \to \infty).$$

若数列 $\{a_n\}$ 不存在极限, 即对任意的 $a \in \mathbf{R}$, a 都不是 $\{a_n\}$ 的极限, 则称数列 $\{a_n\}$ **发散**.

注 (1) 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 实际上是对任意小的正数 ε 而言的, 所以在定义中可把 "对任意给定的 $\varepsilon > 0$" 换成 "对任意给定的 $0 < \varepsilon < c$, 其中 $0 < c < 1$ 是常数", 即 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ 的充分必要条件是: 对任意给定的 $0 < \varepsilon < c$ (其中 $0 < c < 1$ 是常数), 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

(2) 若 ε 是任意给定的正数, 则 $c\varepsilon$(c 是正常数), $\sqrt{\varepsilon}$, ε^2 也都是任意给定的正数. 在数列极限的定义中, 用 $c\varepsilon (c > 0)$, 或 $\sqrt{\varepsilon}$, 或 ε^2 代替 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中的 ε, 作用是一样的.

(3) 对具体的数列 $\{a_n\}$, 要证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, 按定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 关键是找正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 所找到正整数 N 只能与 ε 有关, N 不能与 n 有关. 当找到正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 取 $N_1 > N$, 当 $n > N_1$ 时, 自然也有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

即 N 的选取不是唯一的. 比 N 大的任何正整数 N_1 都可充当我们要的 N, 找到就行.

2. 收敛数列的性质

(1) (**唯一性**) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它的极限是唯一的.

(2) (**有界性**) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 有界, 即存在 $M>0$, 对任意的正整数 n, 有 $|a_n|\leqslant M$.

(3) (**保序性**) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ 且 $a<b$, 则存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n<b_n$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, 且存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n\leqslant b_n$, 则 $a\leqslant b$.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则数列 $\{a_n\}$ 的任何子数列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛且收敛到 a.

3. 数列收敛判定准则

(1) (**夹逼准则**) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个数列. 若存在正整数 N_0, 当 $n>N_0$ 时, 有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=l$.

(2) (**单调有界定理**) 单调有界数列存在极限.

若单调递增数列 $\{a_n\}$ 有上界, 则 $\{a_n\}$ 必有极限; 若单调递减数列 $\{a_n\}$ 有下界, 则 $\{a_n\}$ 必有极限.

注　$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增, 而 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调递减, 并可以证明

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 的奇子列与偶子列都收敛且它们的极限相等.

(4) (**波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理**) 任何有界数列都存在收敛的子列.

(5) (**柯西收敛准则**) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

4. 函数的极限

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有定义, A 为定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\Delta>0$, 对任意的 $x>\Delta$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$(当 $x\to+\infty$ 时)**存在极限或收敛**, **极限是** A **或收敛于**A, 表示为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

若对任意数 A, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 都不收敛于 A, 则称 $f(x)$(当 $x\to+\infty$ 时)**不存在极限**.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上有定义, A 是定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\varDelta>0$, 对任意的 $x<-\varDelta$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$(当 $x\to-\infty$ 时)**存在极限或收敛**, **极限是** A **或收敛于**A, 表示为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

若对任意数 A, 当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 都不收敛于 A, 则称 $f(x)$(当 $x\to-\infty$ 时)**不存在极限**.

(3) 设 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\{x:|x|>a\}$ 上有定义, A 是定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\varDelta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ |x|>\varDelta\}$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$(当 $x\to\infty$ 时)**存在极限或收敛**, **极限是** A **或收敛于**A, 表示为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

若对任意数 A, 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 都不收敛于 A, 则称 $f(x)$(当 $x\to\infty$ 时)**不存在极限**.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $\mathring{U}(a)=\{x:0<|x-a|<r\}$ 内有定义, A 是定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$(当 $x\to a$ 时)**存在极限或收敛**, **极限是** A **或收敛于** A, 或称 A 是函数 $f(x)$ 在 a 的**极限**, 表示为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a).$$

(5) 若函数 $f(x)$ 在 a 的右侧 (即在 $(a,a+r)$ 内) 有定义, A 是定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ a<x<a+\delta\}$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a **存在右极限**, **右极限**是 A, 表示为

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(a+0) = A.$$

若对任意数 A, A 都不是 $f(x)$ 在 a 的右极限, 则称 $f(x)$ 在 a **不存在右极限.**

(6) 若函数 $f(x)$ 在 a 的左侧 (即在 $(a-r,a)$ 内) 有定义, A 是定数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ a-\delta<x<a\}$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a **存在左极限**, **左极限**是 A, 表示为

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(a-0) = A.$$

若对任意的数 A, A 都不是 $f(x)$ 在 a 的左极限, 则称 $f(x)$ 在 a **不存在左极限.**

注 (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的充分必要条件是: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=A$.

(2) 若当 $x\to a^+$ 时, $f(x)$ 存在极限 A_1, 而当 $x\to a^-$ 时, $f(x)$ 存在极限 A_2, 且 $A_1\neq A_2$, 则当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 必不存在极限.

(3) 若当 $x\to a^+$ 时, $f(x)$ 的极限不存在, 或当 $x\to a^-$ 时, $f(x)$ 的极限不存在, 则当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 的极限不存在.

5. 函数极限的性质 (以 $f(x)$ 在 a 存在极限为例, 其他极限形式类似)

(1) (**唯一性**) 若 $f(x)$ 在 a 存在极限, 则它的极限是唯一的.

(2) (**局部有界性**) 若 $f(x)$ 在 a 存在极限, 则存在 $M>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}$, 有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) (**保序性**) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, 且 $A<B$, 则存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}$, 有 $f(x)<g(x)$.

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, 且存在 $\delta_0>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ 0<|x-a|<\delta_0\}$, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$), 则 $\exists\delta_0>0$, 对任意的 $x\in\{x:0<|x-a|<\delta_0\}$, 有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

6. 函数极限与数列极限的关系

(海涅[①] 定理) 设 $f(x)$ 在 a 的某去心邻域内有定义. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的充分必要条件是: 对任意的数列 $\{a_n\}$, $a_n\neq a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=A.$$

① Heine, 1821~1881, 德国数学家.

推论 1.1 设 $f(x)$ 在 a 的某去心邻域内有定义. 若存在数列 $\{a_n\}$, $a_n \neq a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 而它的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 不存在极限, 则 $f(x)$ 在 a 点也不存在极限.

推论 1.2 设 $f(x)$ 在 a 的某去心邻域内有定义. 若存在两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{a_n'\}$, 使得 $a_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 与 $a_n' \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n' = a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n') = B$, 而 $A \neq B$, 则函数 $f(x)$ 在 a 点不存在极限.

7. 函数极限的夹逼定理与柯西收敛准则

(1) (**夹逼定理**) 若 $\forall x \in \mathring{U}(a)$, 有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, 且

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A,$$

则 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

若 $\forall x \in (a, +\infty)$, 有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = A,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = A$.

(2) (**柯西收敛准则**) 设 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(a)$ 有定义, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x'$, $x'' \in \{x:\ 0 < |x-a| < \delta\}$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \varDelta > 0, \forall x', x'' > \varDelta$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

8. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

9. 无穷小量与无穷大量

1) **无穷小量的定义**

设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, 则称当 $x \to a$ 时, 函数 $f(x)$ 为**无穷小量.**

在此定义中, 将 $x \to a$ 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$ 及 $n \to \infty$ 可定义不同形式的无穷小量.

2) **无穷小量的性质**

(1) 若当 $x \to a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量, 则当 $x \to a$ 时, 函数 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ 也是无穷小量.

(2) 若当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 是无穷小量, 函数 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是**有界变量**(即函数 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 有界), 则当 $x\to a$ 时, $f(x)g(x)$ 也是无穷小量.

将 $x\to a$ 换成 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$ 及 $n\to\infty$ 可得到相同的结论.

3) **无穷小量的比较**

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有定义. 设当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量, 且 $\forall x\in\mathring{U}(a,\delta)$, $g(x)\neq 0$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$**更高阶的无穷小量**;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, 则称当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶无穷小量**;

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则称当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小量**;

(3) 若当 $x\to 0$ 时, 以 x 为标准无穷小量, 且当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 x^α(α 是正常数) 是同阶无穷小量, 则称当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是关于 x 的 α 阶无穷小量.

在上述定义中, 可将 $x\to a$ 改为 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$, 得到相应的定义. 对数列 $\{a_n\}$ 也有对应的概念.

注　当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

4) **无穷大量**

设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 有定义. 若对任意的 $B>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}$, 有

$$|f(x)|>B\quad(f(x)>B\ \text{或}\ f(x)<-B),$$

则称当 $x\to a$ 时, $f(x)$**是无穷大量**(**正无穷大量或负无穷大量**), 表示为

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to\infty(x\to a)$$
$$(\lim_{x\to a}f(x)=+\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to+\infty\ (x\to a);$$
$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to-\infty\ (x\to a)).$$

在上述三个无穷大的定义中, 可将 $x\to a$ 改为 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$, 得到相应的定义. 对数列 $\{a_n\}$ 也有对应的概念.

注　函数 $f(x)$ 在点 a 的某去心邻域内无界与当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 是无穷大量不是同一概念. 例如, 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ \text{为}\ [-1,1]\ \text{中的无理数},\\ 0, & x\ \text{为}\ [-1,1]\ \text{中的有理数},\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$

上无界, 但当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大量.

事实上, 对任意的 $M > 0$, 存在 $[-1,1]$ 中的正无理数 $x_0 < \dfrac{1}{M}$, 有

$$|f(x_0)| = \frac{1}{x_0} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M,$$

因此, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无界. 但是, 存在 $B_0 = 1$, 对任意的 $0 < \delta < 1$, 存在有理数 $x_0 \in \{x:\ 0 < |x - 0| < \delta\}$, 有

$$|f(x_0)| = 0 \leqslant 1 = B_0,$$

这表明当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大量.

5) **无穷大量的性质**

(1) 若当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量, 则当 $x \to a$ 时, $f(x)g(x)$ 是无穷大量;

(2) 若 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a, \delta_0)$ 内是有界变量, 又当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 是无穷大量, 则当 $x \to a$ 时, $f(x) + g(x)$ 是无穷大量;

(3) 当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 是无穷小量 (无穷大量), 且 $f(x) \neq 0$, 则当 $x \to a$ 时, 函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量 (无穷小量);

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

6) **无穷小量的等价替换**

设 $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ 在点 a 的某个邻域 $\mathring{U}(a)$ 内有定义.

(1) 设 $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x) (x \to a)$, $\forall x \in \mathring{U}(a)$, 有 $f_1(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $g_1(x) \neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

(2) 设 $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x) (x \to a)$, $\forall x \in \mathring{U}(a)$, $f_1(x) \neq 0$, $g_1(x) \neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)g_1(x)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f_1(x)g_1(x).$$

注 等价无穷小的替换在加、减法中不一定成立.

例如:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

若替换成

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

就错了.

1.1.3 连续

1. 连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a)$ 有定义. 若函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限, 且极限是 $f(a)$, 即

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a **连续**, 并称 a 是 $f(x)$ 的**连续点**.

设函数 $f(x)$ 在以 a 为左端点的某区间 $[a, a+\delta)$ 有定义. 若

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a **右连续**.

设函数 $f(x)$ 在以 a 为右端点的某区间 $(a-\delta, a]$ 有定义. 若

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 点**左连续**.

2. 函数在一点连续的充要条件

(1) 设 $f(x)$ 在 $U(a)$ 有定义. $f(x)$ 在点 a 连续的充分必要条件是: 对任意的数列 $\{x_n\}$, 只要 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, 就有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $U(a)$ 有定义. $f(x)$ 在点 a 连续的充分必要条件是: $f(x)$ 在点 a 既是左连续又是右连续, 即

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

3. 函数在区间连续

设 I 是开区间, 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内连续. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且在 b 点左连续, 则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续. 类似可定义 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续, 且在 a 点右连续, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 类似可定义函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续.

4. 函数在区间一致连续

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in \{x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta\}$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**一致连续**.

5. 间断点的类型

若 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 都存在, 且 a 是 $f(x)$ 的间断点, 则称 a 是函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 若 $f(a-0)=f(a+0)$, 且 a 是 $f(x)$ 的间断点, 则称 a 是函数 $f(x)$ 的**可去间断点**. 若 $f(a-0)\neq f(a+0)$, 则称 a 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

若 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 中至少有一个不存在, 则称 a 是函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

6. 闭区间上的连续函数的整体性质

(1) (**有界性**) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

(2) (**最值性**) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取到最大值 M 与最小值 m, 即在 $[a,b]$ 上存在 x_0, x_1, 使 $f(x_0)=M$ 与 $f(x_1)=m$, 且 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

(3) (**零点定理**) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$(即 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号), 则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 c, 使 $f(c)=0$.

(4) (**介值定理**) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $x_1,x_2\in I$, 且 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则对任意位于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的数 ξ, 在 x_1,x_2 两点之间至少存在一点 c, 使

$$f(c)=\xi.$$

(5) (**一致连续性**) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续.

1.2 例题选讲

例 1 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$, 其中 a,b,c 为常数, 且 $|a|\neq|b|$, 求 $f(x)$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 由

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{1}$$

得 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$, 即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \tag{2}$$