

河南省普通高等学校 **自科升本科**

◆ **学习指南**

高等数学

葛云飞 主编

沈阳出版社

高等数学

Gao deng shu xue

主编 葛云飞

编著 张光照 田德宇 张 丹

沈阳出版社

图书在版编目(CIP)数据

河南省普通高等学校专科升本科学习指南—高等数学/葛云飞 主编
—沈阳:沈阳出版社,2004.9
ISBN 7-5441-2599-8

I. 河… II. 葛… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099808 号

出 版 者:沈阳出版社

(地址:沈阳市沈河区南翰林路 10 号 邮编:110011)

印 刷 者:郑州市毛庄印刷厂

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:29.5

字 数:720 千字

出版时间:2005 年 10 月第 2 版

印刷时间:2005 年 10 月第 2 次印刷

责任编辑:萧大勇

封面设计:霍亚伟

定 价:36.50 元

再版前言

高等数学是高职高专工程、电子、机械、建筑、规划、药学等理工类专业参加河南省普通高等学校选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试的必考课程。本书应时而生,书刚出版,就受到广大师生的热烈欢迎,他们一致认为该书针对性强,命中率高,知识点把握准确、系统,是目前同类“专升本”读物中最具权威性的辅导教材。应广大读者的强烈要求,笔者在此基础上对该书进行了系统地增添和完善,这样该书更具有权威性和指导性,更贴近考试要求。

回顾近年来的“专升本”高等数学试题,具有覆盖广、题量大、知识点零碎、考试时间短等特点,对考生的作题技巧、速度提出了更高的要求。怎样在短短的复习迎考中,提高复习效率,提升作题速度、掌握灵活多变的做题技巧,这是摆在每位考生面前的迫切问题。该书凝聚着笔者多年来探索总结出的一套行之有效的复习方法,做题技巧。考生使用该书,可以短平快地摸准“专升本”考试的命脉,宏观地把握知识体系,微观细研考试要求,事半功倍,效果显著。

这次修订工作是在河南省普通高等学校“专升本”考试命题研究中心的直接领导下进行的,并得到了河南省许多高职高专院校的数学教师的大力协助,在此,我们表示衷心的感谢。

参加编写与修改的有:葛云飞(第十章、第十一章、第十二章、四套模拟试题)、张光照(第一章、第二章、第三章)、田德宇(第四章、第五章、第六章)、张丹(第七章、第八章、第九章),余建熙(章节能力测试题),由葛云飞任主编。

本次修订,对第一版编写及排版中的疏漏进行了修正,并对部分的章节进行了删改,补充了05年的高等数学试卷及答案,增加了章节能力测试题和两套模拟试题。对章节能力测试题一定在规定的时间内完成,我们给出本章内容在试卷中加权系数,实际得分与加权系数之积就是你对本章知识掌握情况分数,十二章掌握分数之和就是你的数学成绩,为你考试结束后估分填报志愿提供参考的依据。

由于我们的水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编者 葛云飞

2005年9月30日于郑州

第一版前言

随着知识经济时代的到来,人才竞争更加激烈,而与之相伴的是学历层次地提高,它是当代大学生特别是专科生立足于社会,实现人生价值的立足点和支撑点。虽然文凭不等于水平,学历不等于能力,但在我国目前用人机制还不够健全的社会转型期,学历的高低很大程度上显示着人才含金量的大小,它也日益成了制约当代大学生展示才华实现人生理想的瓶颈。

普通高校的专科生,最大的愿望就是希望通过“专升本”提高自己的学历层次,弥补因高考的一次失误而不能进入本科层次深造的遗憾。近年来,为了激发专科生的学习兴趣,建立健全人才培养的体系,建构人才学历文凭的立交桥,全国各省市也都进行了相应的“专升本”入学考试。由于专科院校专业设置繁杂,没有统一标准,各个省市设置的考试方案各不相同,河南省设置考试两门课程:一门是公共大学英语(150分);一门是专业基础课程(150分)。《高等数学》是大学理工类专业的基础课程,也是河南省普通高校“专升本”理工类专业的必考课程。但该课程抽象性强,某些内容对于一些高中阶段数学基础薄弱的学生有一定难度。例如对某些概念理解不透,运算技巧掌握不好等。因此不少学生迫切希望有一本针对普通高校“专升本”的教材。这也是作者在多年的“专升本”辅导中应广大学生的强烈要求编写了本书。目前针对这类考试的辅导教材这是第一本。这是作者在多年辅导“专升本”的基础上,对河南省普通高校推荐优秀专科生进入本科阶段学习考试《高等数学》试题进行潜心研究的成果,对《高等数学》考试有很大的帮助和指导意义。它也弥补了河南省普通高校“专升本”考试辅导材料的空缺。

本书按同济大学数学教研室编著《高等数学》(第四版)的章节顺序进行编写。全书分为十二章,同时兼顾其他教材内容。所以不论使用哪种版本的教材,均可采用本书作为参考书。

书中各章均包含四部分内容:重要概念与定理的解析与总结;典型例题精解;同步练习和同步练习答案及提示。各部分内容概述如下:

一、重要概念与定理的解析与总结:列出基本概念、主要定理和主要内容,突出“难点解析”与“规律总结”,既对学生学习中的难点和要点,进行分析、讲解,引导学生正确辨别、理解,使之对重要概念、方法以及疑难问题,理解得更深更透,对规律性内容加以总结,使读者掌握的知识更有条理,更加巩固,使学生能很好的应对各类考试。

二、典型例题精解:精选了具有代表性的例题进行详尽地分析和解析。这些例题涉及的内容广、类型多、技巧性强,并且对典型例题注重分析过程,然后加以“小结”,以使读者能举一反三,触

类旁通,对运算技巧掌握得更熟练,对基本概念理解得更准确,能较快地提高数学分析问题和解决问题地能力;开拓解题思路,熟练掌握解题技巧。

三、同步练习自测:同步练习,进一步强化解题地训练。反映考试重点、难点,培养综合解题能力和应变能力,巩固和提高复习效果。这些“同步练习题”虽然也起到基本训练的作用,但主要具有“考试题”的特点,使读者通过做练习题,可以检查自己对所学内容掌握的程度。

四、同步练习答案及提示:为方便学生,我们把同步练习题的答案紧跟在练习题后。对做题结果评判是激励学生检查自己学习效果与能力的必要途径。但提醒大家要先做题再看答案,并在此基础上,触类旁通,开拓做题的思路。

值得强调的是本书复习内容的深广度,贴近于河南“专升本”数学试题,个别题目难度稍高于河南“专升本”数学试题,所选例题更接近于河南“专升本”数学题型。为了便于学生复习和把握,我们把《高等数学》考试大纲置于本书的最前面,把四年来《高等数学》考试试题附录在最后,我们又编写了两套《高等数学》考试模拟试题。该书具有实用性、系统性、前瞻性、权威性的特点,它荟萃众家之长,并融汇了编著者多年对“专升本”考试的研究成果,所以本教材不仅对河南“专升本”《高等数学》复习考试有较大的针对性和指导意义,它还可以作为专科一年级学生学习《高等数学》时的必备参考书,特别对毕业时想参加“专升本”的学生有较大的参考价值,更是各级各类读者进行《高等数学》学习时必备的参考书。

由于编者水平有限,加上时间仓促,书中难免有错误所在,请广大同仁和读者批评指正。在此书的出版过程中,也得到许多领导、朋友的大力帮助,如王金台院长、王志平副院长,张光照老师、张桦老师、王庆杰老师等朋友的鼎力相助,在此一并表示真诚的谢意!

编者 葛云飞

2004年9月29日于郑州

目 录

“专升本”《高等数学》考试大纲	1
第一章 函数、极限、连续	9
第一节 函数	9
第二节 极限	19
第三节 连续	34
本章能力测试题	42
本章小结	45
第二章 导数与微分	47
第一节 导数	47
第二节 微分	64
本章能力测试题	71
本章小结	73
第三章 中值定理与导数应用	75
第一节 微分中值定理	75
第二节 洛必达法则	83
第三节 函数的性态与极值问题	92
第四节 导数在经济分析中的应用	109
本章能力测试题	115
本章小结	118
第四章 不定积分	119
第一节 不定积分的概念和性质	119
第二节 不定积分的运算	124
本章能力测试题	148
本章小结	151
第五章 定积分	152
第一节 定积分的概念和性质	152
第二节 定积分的运算	160
第三节 广义积分	178
本章能力测试题	187
本章小结	190
第六章 定积分的应用	192
定积分的应用	192
本章能力测试题	206
本章小结	209
第七章 向量代数与空间解析几何	210
第一节 向量代数	210
第二节 空间的曲面与曲线	222
第三节 平面与直线	227

第四节 简单的二次曲面.....	244
本章能力测试题.....	250
本章小结.....	253
第八章 多元函数的微分法及应用.....	256
第一节 多元函数、极限与连续	256
第二节 多元函数的偏导数与全微分.....	264
第三节 二元函数的极值.....	281
本章能力测试题.....	289
本章小结.....	292
第九章 二重积分.....	294
第一节 二重积分的概念与性质.....	294
第二节 二重积分计算及应用.....	298
本章能力测试题.....	321
本章小结.....	323
第十章 曲线积分.....	325
第一节 两类曲线积分的概念、性质及计算	325
第二节 格林公式及应用.....	335
本章能力测试题.....	340
本章小结.....	343
第十一章 无穷级数.....	345
第一节 数项级数.....	345
第二节 幂级数.....	363
本章能力测试题.....	380
本章小结.....	383
第十二章 常微分方程.....	385
第一节 一阶微分方程.....	385
第二节 高阶微分方程.....	401
本章能力测试题.....	414
本章小结.....	417
“专升本”《高等数学》模拟试题(一)及答案	419
“专升本”《高等数学》模拟试题(二)及答案	425
“专升本”《高等数学》模拟试题(三)及答案	432
“专升本”《高等数学》模拟试题(四)及答案	437
2002 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试《高等数学》试卷及答案	442
2003 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试《高等数学》试卷及答案	447
2004 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试《高等数学》试卷及答案	452
2005 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试《高等数学》试卷及答案	458

河南省普通高等学校选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

《高等数学》大纲

总要求

考生应按本大纲的要求,了解或理解“高等数学”中函数、极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程的基本概念与基本理论;学会、掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法。应注意各部分知识的结构及知识的内在联系;应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力;能运用基本概念、基本理论和基本方法正确地推理证明,准确地计算;能综合运用所学知识分析并解决简单的实际问题。

本大纲对内容的要求由低到高,对概念和理论分为“了解”和“理解”两个层次;对方法和运算分为“会”、“掌握”和“熟练掌握”三个层次。

内 容

一、函数、极限和连续

(一) 函数

1. 知识范围

(1) 函数的概念

函数的定义 函数的表示法 分段函数

(2) 函数的简单性质

单调性 奇偶性 有界性 周期性

(3) 反函数

反函数的定义 反函数的图象

(4) 函数的四则运算与复合运算

(5) 基本初等函数

幂函数 指数函数 对数函数 三角函数 反三角函数

(6) 初等函数

2. 要求

(1) 理解函数的概念。会求函数的定义域、表达式及函数值。会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数的图象。

(2) 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性,会判断所给函数的类别。

(3) 了解函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象),会求单调函数的反函数。

(4) 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握复合函数的复合过程。

(5) 掌握基本初等函数的简单性质及其图象。

(6) 了解初等函数的概念。

(7) 会建立简单实际问题的函数关系式。

(二) 极限

1. 知识范围

(1) 数列极限的概念

数列 数列极限的定义

(2) 数列极限的性质

唯一性 有界性 四则运算定理 夹逼定理 单调有界数列 极限存在定理

(3) 函数极限的概念

函数在一点处极限的定义 左、右极限及其与极限的关系; x 趋于无穷($x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$)

时函数的极限 函数极限的几何意义

(4) 函数极限的定理

唯一性定理 夹逼定理 四则运算定理

(5) 无穷小量和无穷大量

无穷小量与无穷大量的定义 无穷小量与无穷大量的关系 无穷小量与无穷大量的性质

两个无穷小量阶的比较

(6) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2. 要求

(1) 理解极限的概念,能根据极限概念分析函数的变化趋势。会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件。

(2) 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则。

(3) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系。会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价)。会运用等价无穷小量代换求极限。

(4) 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法。

(三) 连续

1. 知识范围

(1) 函数连续的概念

函数在一点连续的定义 左连续和右连续 函数在一点连续的充分必要条件 函数的间断点及其分类

(2) 函数在一点处连续的性质

连续函数的四则运算 复合函数的连续性 反函数的连续性

(3) 闭区间上连续函数的性质

有界性定理 最大值与最小值定理 介值定理(包括零点定理)

(4) 初等函数的连续性

2. 要求

(1) 理解函数在一点连续与间断的概念,掌握判断简单函数(含分段函数)在一点的连续性,理解函数在一点连续与极限存在之间的关系。

(2) 会求函数的间断点及确定其类型。

(3) 掌握在闭区间上连续函数的性质,会运用介值定理推证一些简单命题。

(4) 理解初等函数在其定义区间上的连续性,并会利用连续性求极限。

二、一元函数微分学

(一) 导数与微分

(1) 导数概念

导数的定义 左导数与右导数 导数的几何意义与物理意义 可导与连续的关系

(2) 求导法则与导数的基本公式

导数的四则运算 反函数的导数 导数的基本公式

(3) 求导方法

复合函数的求导法 隐函数的求导法 对数求导法 由参数方程确定的函数的求导法

求分段函数的导数

(4) 高阶导数的概念

高阶导数的定义 高阶导数的计算

(5) 微分

微分的定义 微分与导数的关系 微分法则 一阶微分形式不变性

2. 要求

(1) 理解导数的概念及其几何意义,了解可导性与连续性的关系,会用定义求函数在一点处的导数。

(2) 会求曲线上一点处的切线方程与法线方程。

(3) 熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则及复合函数的求导方法,会求反函数的导数。

(4) 掌握隐函数的求导法、对数求导法以及由参数方程所确定的函数的求导方法,会求分段函数的导数。

(5) 理解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数。

(6) 理解微分的概念,掌握微分法则,了解可微与可导的关系,会求函数的一阶微分。

(二) 中值定理及导数的应用

1. 知识范围

(1) 中值定理

罗尔(Rolle) 中值定理 拉格朗日(Lagrange) 中值定理 柯西(Cauchy) 中值定理 泰勒(Taylor) 中值定理

(2) 洛必达(L'Hospital) 法则

(3) 函数增减性的判定法

(4) 函数极值与极值点 最大值与最小值

(5) 曲线的凹凸性、拐点

(6) 曲线的水平渐近线与垂直渐近线及斜渐近线

(7) 导数在经济实际中的应用

2. 要求

(1) 了解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理及它们的几何意义。会用罗尔中值定理证明方程根的存在性。会用拉格朗日中值定理证明简单的不等式。

(2) 熟练掌握用洛必达法则求“ $\frac{0}{0}$ ”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”、“ $0 \cdot \infty$ ”、“ $\infty - \infty$ ”、“ 1^∞ ”、“ 0^0 ”、“ ∞^0 ”型未定式的

极限的方法。

(3) 掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调增、减区间的方法,会利用函数的单调性证明简单的不等式。

(4) 理解函数极值的概念。掌握求函数的极值和最大(小)值的方法,并且会解简单的应用问题。

(5) 会判断曲线的凹向性,会求曲线的拐点。

(6) 会求曲线的水平渐近线与垂直渐近线和斜渐近线。

(7) 会作出简单函数的图形。

(8) 能解简单的经济函数的应用题。

三、一元函数积分学

(一) 不定积分

1. 知识范围

(1) 不定积分的概念

原函数与不定积分的定义 原函数存在定理 不定积分的性质

(2) 基本积分公式

(3) 换元积分法

第一换元法(凑微分法) 第二换元法

(4) 分部积分法

(5) 一些简单有理函数的积分

2. 要求

(1) 理解原函数与不定积分的概念及其关系,掌握不定积分的性质,了解原函数存在定理。

(2) 熟练掌握不定积分的基本公式。

(3) 熟练掌握不定积分第一换元法,掌握第二换元法(限于三角代换与简单的根式代换)。

(4) 熟练掌握不定积分的分部积分法。

(5) 会求简单有理函数的不定积分。

(二) 定积分

1. 知识范围

(1) 定积分的概念

定积分的定义及其几何意义 可积条件

(2) 定积分的性质

(3) 定积分的计算

变上限的定积分 牛顿—莱布尼茨(Newton—Leibniz)公式 换元积分法 分部积分法

(4) 无穷区间的广义积分及无界函数的广义积分。

2. 要求

(1) 理解定积分的概念及其几何意义,了解函数可积的条件。

(2) 掌握定积分的基本性质。

(3) 理解变上限的定积分是变上限的函数,掌握对变上限定积分求导数的方法。

(4) 掌握牛顿—莱布尼茨公式。

(5) 掌握定积分的换元积分法与分部积分法。

(6) 了解无穷区间上广义积分的概念,掌握其计算方法。了解无界函数的广义积分的概念,掌握其计算方法。

(三) 定积分的应用

1. 知识范围

- (1) 平面图形的面积
- (2) 旋转体的体积及平行截面面积为已知的立体体积
- (3) 平面曲线的弧长
- (4) 定积分在经济方面的应用

2. 要求

- (1) 理解定积分应用中的“微元素法”,会利用“微元素法”求面积、体积、弧长等。
- (2) 掌握直角坐标系下用定积分计算平面图形的面积以及平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体的体积和平面曲线的弧长等。

(3) 理解已知平行截面面积的立体体积计算

(4) 了解极坐标系下平面图形面积、旋转体体积、平面曲线弧长等计算。

(5) 掌握定积分在经济方面的简单应用。

四、向量代数与空间解析几何

(一) 向量代数

1. 知识范围

(1) 向量的概念

向量的定义 向量的模 单位向量 向量在坐标轴上的投影 向量的坐标表示法 向量的方向余弦

(2) 向量的线性运算

向量的加法 向量的减法 向量的数乘

(3) 向量的数量积

两向量的夹角 两向量垂直的充分必要条件

(4) 两向量的向量积 两向量平行的充分必要条件

2. 要求

(1) 理解向量的概念,掌握向量的坐标表示法,会求单位向量、方向余弦、向量在坐标轴上的投影。

(2) 掌握向量的线性运算、向量的数量积与向量积的计算方法。

(3) 掌握两向量平行、垂直的条件。

(二) 平面与直线

1. 知识范围

(1) 常见的平面方程

点法式方程 一般式方程

(2) 两平面平行的条件 两平面垂直的条件 点到平面的距离

(3) 空间直线方程

标准式方程(又称对称式方程或点向式方程)、一般式方程、参数式方程

(4) 两直线平行的条件 两直线垂直的条件 直线在平面上的条件

2. 要求

- (1) 会求平面的点法式方程、一般式方程。会判定两平面的垂直、平行。
- (2) 会求点到平面的距离。
- (3) 了解直线的一般式方程,会求直线的标准式方程、参数式方程。会判定两直线平行、垂直。
- (4) 会判定直线与平面间的关系(垂直、平行、直线在平面上)。

(三) 简单的二次曲面

1. 知识范围

球面 母线平行于坐标轴的柱面 旋转抛物面 圆锥面 椭球面

2. 要求

了解球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转抛物面、圆锥面和椭球面的方程及其图形。

五、多元函数微积分学

(一) 多元函数微分学

1. 知识范围

(1) 多元函数

多元函数的定义 二元函数的定义域 二元函数的几何意义 二元函数极限与连续的概念

(2) 偏导数与全微分

偏导数 全微分 二阶偏导数

(3) 复合函数的偏导数

(4) 隐函数的偏导数

(5) 二元函数的无条件极值

(6) 条件极值与拉格朗日乘法数

2. 要求

(1) 了解多元函数的概念、二元函数的几何意义及二元函数的极限与连续概念。会求二元函数的定义域。

(2) 理解偏导数概念,了解全微分概念,知道全微分存在的必要条件与充分条件。

(3) 掌握二元函数的一、二阶偏导数计算方法。

(4) 掌握复合函数一阶偏导数的求法。

(5) 会求二元函数的全微分。

(6) 掌握由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的一阶偏导数的计算方法。

(7) 会求二元函数的无条件极值及简单的条件极值问题。

(二) 二重积分

1. 知识范围

(1) 二重积分的概念

二重积分的定义 二重积分的几何意义

(2) 二重积分的性质

(3) 二重积分的计算及应用

2. 要求

(1) 理解二重积分的概念及其性质。

(2) 掌握二重积分在直角坐标系及极坐标系下的计算方法。

(3) 会用二重积分解决简单的应用问题(限于空间封闭曲面所围成的有界区域的体积、平面薄板质量)。

(三) 曲线积分

1. 知识范围

(1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

对弧长的曲线积分的概念与性质 对弧长的曲线积分的计算法

(2) 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

对坐标的曲线积分的概念与性质 对坐标的曲线积分的计算法

(3) 格林公式及应用

格林公式及应用 平面上曲线积分与路径无关的条件 已知全微分求原函数

2. 要求

(1) 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系

(2) 掌握计算两类曲线积分的方法

(3) 理解格林公式,并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求全微分的原函数。

六、无穷级数

(一) 数项级数

1. 知识范围

(1) 数项级数

数项级数的概念 级数的收敛和发散 级数的基本性质 级数收敛的必要条件

(2) 正项级数敛散性的判别法

比较判别法 比值判别法 根值判别法

(3) 任意项级数

交错级数 绝对收敛 条件收敛 莱布尼茨判别法

2. 要求

(1) 理解级数收敛、发散的概念。掌握级数收敛的必要条件,了解级数的基本性质。

(2) 掌握正项级数的比值判别法。会用正项级数的比较判别法和根值判别法。

(3) 掌握几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 、调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

(4) 了解级数绝对收敛与条件收敛的概念,会使用莱布尼茨判别法。

(二) 幂级数

1. 知识范围

(1) 幂级数的概念

收敛半径 收敛区间

(2) 幂级数的基本性质

(3) 将简单的初等函数展开为幂级数

2. 要求

(1) 了解幂级数的概念。

(2) 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和、差、逐项求导与逐项积分。)

(3) 掌握求幂级数的收敛半径、收敛区间的方法。

(4) 会运用 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林(Maclaurin)公式, 将一些简单的初等函数展开为 x 或 $x-x_0$ 的幂级数。

七、常微分方程

(一) 一阶微分方程

1. 知识范围

(1) 微分方程的概念

微分方程的定义 阶 解 通解 初始条件特解

(2) 可分离变量的方程

(3) 可化为分离变量的齐次方程

(4) 一阶线性方程

2. 要求

(1) 理解微分方程的定义, 理解微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解。

(2) 掌握可分离变量方程的解法及齐次方程的解法。

(3) 掌握一阶线性方程的解法。

(二) 可降阶方程

1. 知识范围

(1) $y^n = f(x)$ 型方程

(2) $y'' = f(x, y')$ 型方程

(3) $y'' = f(y, y')$ 型方程

2. 要求

(1) 会用降阶法解 $y^n = f(x)$ 型方程

(2) 会用降阶法解 $y'' = f(x, y')$ 型方程

(3) 会用降阶法解 $y'' = f(y, y')$ 型方程

(三) 二阶线性微分方程

1. 知识范围

(1) 二阶线性微分方程解的结构

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程

(3) 二阶常系数非齐次线性微分方程

2. 要求

(1) 了解二阶线性微分方程解的结构。

(2) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法。

(3) 掌握二阶常系数非齐次线性微分方程的解法(自由项限定为 $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, 其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, a 为实常数; $f(x) = e^{ax}(P_l(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x)$, 其中 α, β 为实常数; $P_l(x)$ 是 x 的 l 次多项式, $P_n(x)$ 是 x 的 n 次项多式)。

第一章 函数、极限、连续

第一节 函数

一、函数的概念

非空集合 A 到数集 B 上的映射 f 称为函数, 记作 $y = f(x), x \in A, y \in B, A$ 称为函数的定义域, f 称为对应法则。

函数的概念有两个基本要素: 定义域, 对应规则(或称依赖关系)。

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 才认为它们是同一个函数, 函数有三种表示方法: 解析法, 图象法, 表格法。

二、函数解析表示法中常用的几个形式

1. 解析式函数 由一个解析式表示, 如 $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$, 这是最常用的函数表示形式。

2. 分段函数 如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的, 则称之为分段函数。

如:

$$y = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 & 0 < x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数, 而是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的一个函数, 它是由三个解析式来表达。

3. 隐函数 如果函数的对应规则是由方程 $F(x, y) = 0$ 给出, 则称 y 为 x 的隐函数。

如由方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x = 1$ 确定的函数 $y = y(x)$ 为隐函数。

相对于隐函数来说, 人们称由解析表达式 $y = f(x)$ 确定的函数为显函数。

4. 参数方程表示的函数 如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来, 如:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数。

例1 下列各组函数中, 表示同一函数的有()。

A. $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

B. $f(x) = \frac{x \ln(1-x)}{x^2}$ 与 $g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$

C. $f(x) = \sqrt{x(x+1)}$ 与 $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$

D. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$

分析 对于 A, $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$, 可知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式不相同, 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数, 应排除 A。

对于 B, $f(x)$ 的定义域为 $\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 解之得: $x < 1$ 且 $x \neq 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{x \ln(1-x)}{x^2} =$