典型碰撞振动系统的非线性动力学

冯进铃　著

科学出版社

典型碰撞振动系统的非线性动力学

冯进钤　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书详细介绍碰撞振动系统的非线性动力学. 结合作者的研究成果, 主要介绍碰撞振动系统的不连续映射及其应用, 参数噪声和白噪声激励下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔, Melnikov 方法及其应用, 碰撞振动系统的周期解及其分岔, 碰撞振动系统的全局动力学. 本书围绕碰撞振动系统的非线性动力学展开, 以建立和发展碰撞振动系统的理论和方法为重点, 突出碰撞振动系统的非光滑本质特性.

本书可供高等院校力学、数学、物理、机械、电力电子等专业的高年级本科生、研究生、教师参考使用, 也可供从事相关领域工作的工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

典型碰撞振动系统的非线性动力学/冯进钤著. —北京: 科学出版社, 2018. 1
ISBN 978-7-03-055329-4

I. ①典… II. ①冯… III. ①碰撞(力学)-非线性振动-研究 IV. ①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 281177 号

责任编辑: 李 萍 田轶静 / 责任校对: 郭瑞芝
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 1 月第一次印刷 印张: 10
字数: 202 000
定价: 80.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

非线性科学已发展成为一门跨学科的前沿学科. 在实际动力系统中, 不仅存在非线性因素, 也存在大量的间隙、碰撞、冲击、干摩擦、开关、阈值、继电保护等非光滑因素, 这些非光滑因素通常表现为不连续性、复杂性和新颖性. 不连续性破坏了非线性系统的光滑特性, 使得常规的非线性动力学的理论与方法对于非光滑系统不再直接适用, 需要建立新的理论框架和方法. 复杂性主要体现在系统可能存在诸多的极限集. 非光滑系统不仅具有光滑系统的动力学特征, 还具有其特有的新颖动力学. 目前, 碰撞振动系统作为一类重要的非光滑系统, 引起了国内外的研究热潮. 本书主要介绍典型碰撞振动系统的非线性动力学, 希望对进入非光滑系统动力学领域的读者起到抛砖引玉的作用.

非光滑系统具有不连续性的本质, 在碰撞振动系统中, 这种不连续性表现为系统状态的跳跃或向量场的不可微性, 包括碰撞、擦边、磕振等非光滑事件. 非光滑系统动力学的理论或数值分析主要依靠不同形式的 Poincaré 映射实现, 其重点在于非光滑事件诱导的不连续映射. 1991 年, 学者 Nordmark 基于摄动近似展开的思想, 提出了碰撞振动系统的不连续映射, 解决了系统全局 Poincaré 映射的不连续问题.

噪声广泛存在于一般的非线性动力学系统中, 形成了随机动力学分支. 噪声通常表征为随机变量或随机过程, 分别描述单纯的随机变化和随参数而变化的随机变量. 随机参数刻画的随机性对系统动力学性态的影响是非常重要的. 2003 年, 学者方同应用 Chebyshev 多项式逼近的方法研究了随机光滑动力系统的响应, 该方法成为一种新的研究随机参数的光滑系统的有效方法.

随机响应的研究作为随机动力学研究的一个中心问题之一, 在人们的长期努力下, 已经形成了许多成熟的理论方法. 2003 年, 学者朱位秋总结了 Hamilton 理论体系框架下非线性系统的随机平均法, 借助随机平均法研究了一、二自由度非线性系统的随机响应、随机分岔以及随机控制. 对于非光滑系统的随机平均法, 如何处理系统的不连续性尤为重要.

Melnikov 方法是研究系统全局分岔和混沌的强有力的解析工具. 对于碰撞振动系统 Melnikov 方法的研究, 目前主要局限于线性碰撞振动系统和一些特殊结构的非线性碰撞振动系统, 对于具有非对称性或包含擦边和颤碰等非光滑结构的分析有待于深入, 特别是对于随机扰动下非线性碰撞振动系统的 Melnikov 方法的研究甚少.

周期运动的稳定性、分岔以及奇异性是非线性系统动力学关注的重点, 也是实际工程中关心的主要问题. 在数值研究方面, 碰撞诱导的不连续性使得传统的数值积分方法不再直接适用, 如何从数值的角度准确定位不连续位置和碰撞时刻是数值研究面临的重要问题. 在理论方面, 周期解的稳定性研究是建立在 Floquet 理论上的, 对于碰撞振动系统而言, 需要针对不连续位置进行处理或近似.

非线性动力学的研究分为局部分析和全局分析. 局部分析通常关心的是解的局部稳定性、局部分岔以及系统参数或噪声对系统动力学的影响. 与局部分析相比, 全局分析主要考虑大范围的状态空间区域, 通常关心的是在大范围状态空间中吸引子及其吸引域、不变集、不变流形等信息, 可以同时体现系统参数对全局动力学结构的影响, 使得人们获得系统更多的动力学信息.

本书共 7 章: 第 1 章简要介绍非光滑动力系统; 第 2 章介绍不连续映射及其应用; 第 3 章介绍正交多项式在碰撞振动系统中的推广, 主要内容是参数激励下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔; 第 4 章介绍碰撞振动系统的随机平均法, 主要内容是白噪声激励下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔; 第 5 章介绍碰撞振动系统的 Melnikov 方法及其应用, 主要内容是确定性碰撞振动系统的 Melnikov 方法以及有界噪声激励下碰撞振动系统的随机 Melnikov 方法; 第 6 章介绍碰撞振动系统的打靶法, 主要内容是借助打靶法和 Floquet 理论研究碰撞振动系统的周期解及其分岔; 第 7 章介绍碰撞振动系统的全局动力学, 主要内容是研究胞映射方法在碰撞振动中的推广, 以及基于胞映射方法的非光滑流形逼近方法. 本书的特点是以碰撞振动系统的非线性动力学为主线, 以建立和发展碰撞振动系统的理论和方法为重点, 突出非光滑系统的本质特性.

感谢合作者徐伟教授、李高杰博士和王亮博士在研究中给予的启发和帮助; 感谢薛红教授、贺兴时教授、李海洋教授等对本书出版的支持和关心; 感谢研究生刘鑫、刘亚妮、李玉婷、王迎宵等在本书出版工作中给予的帮助. 本书的研究得到了国家自然科学基金项目 (编号: 11302158)、陕西省自然科学基础研究项目 (编号: 2015JM1034)、西安工程大学博士基金项目 (编号: BS1003)、西安工程大学高水平建设项目的支持, 在此一并表示诚挚的感谢.

由于作者知识水平有限, 书中难免存在不足之处, 恳请专家和学者批评指正, 在此表示衷心的感谢.

作　者

2017 年 9 月 28 日于西安工程大学

目　　录

前言
第 1 章　非光滑动力系统简介 …… 1
1.1　非光滑系统研究的背景与意义 …… 1
1.2　非光滑系统的研究概况 …… 3
1.2.1　碰撞振动系统动力学 …… 3
1.2.2　分段光滑系统动力学 …… 5
1.2.3　Filippov 系统动力学 …… 6
1.2.4　随机非光滑系统动力学 …… 7
1.3　非光滑动力系统的基本理论 …… 7
1.3.1　非光滑动力系统的分类 …… 7
1.3.2　非光滑系统解的理论 …… 9
1.3.3　非光滑动力系统的稳定性与分岔 …… 10
参考文献 …… 13
第 2 章　不连续映射及其应用 …… 22
2.1　不连续映射介绍 …… 22
2.2　跳跃映射 …… 22
2.3　碰撞振动系统的最大 Lyapunov 指数 …… 24
2.3.1　n 维碰撞振动系统的最大 Lyapunov 指数 …… 25
2.3.2　最大 Lyapunov 指数 …… 26
2.4　基于最大 Lyapunov 指数的稳定性与分岔 …… 27
2.4.1　随机 Duffing 碰撞振动系统 …… 27
2.4.2　随机稳定性与分岔 …… 29
2.5　彗尾映射 …… 34
2.6　应用实例: Duffing 单边碰撞振动系统的颤碰分析 …… 37
2.6.1　完全颤碰到不完全颤碰的分岔 …… 39
2.6.2　不完全颤碰中擦边诱导的周期运动到拟周期运动的分岔 …… 41
2.7　本章小结 …… 42
参考文献 …… 43
第 3 章　参数噪声激励下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔 …… 45
3.1　Chebyshev 正交多项式理论 …… 45

3.2 随机参数激励下典型 Duffing 碰撞振动系统的随机响应与倍周期分岔 ······ 47
3.2.1 Chebyshev 多项式逼近 ······ 47
3.2.2 随机响应与倍周期分岔 ······ 50
3.2.3 随机因素的影响 ······ 54
3.3 随机参数激励下 Van der Pol 碰撞振动系统的随机响应与擦边分岔 ······ 55
3.3.1 Chebyshev 多项式逼近 ······ 55
3.3.2 倍周期分岔 ······ 56
3.3.3 擦边分岔 ······ 58
3.3.4 随机因素的影响 ······ 61
3.4 本章小结 ······ 62
参考文献 ······ 63
第 4 章 白噪声激励下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔 ······ 64
4.1 引言 ······ 64
4.2 非光滑变换 ······ 64
4.3 随机平均理论 ······ 66
4.4 白噪声外激励下碰撞振动系统的随机响应 ······ 69
4.4.1 随机响应的稳态解 ······ 69
4.4.2 数值仿真 ······ 72
4.5 白噪声参激与外激联合作用下碰撞振动系统的随机响应与随机分岔 ······ 75
4.5.1 系统模型描述 ······ 75
4.5.2 随机平均 ······ 76
4.5.3 随机响应 ······ 78
4.5.4 随机分岔 ······ 80
4.6 本章小结 ······ 83
参考文献 ······ 84
第 5 章 Melnikov 方法及其应用 ······ 86
5.1 引言 ······ 86
5.2 非线性碰撞振子同宿轨的 Melnikov 方法 ······ 87
5.3 单势阱非线性碰撞振子的同宿分岔与混沌 ······ 92
5.3.1 模型描述 ······ 92
5.3.2 同宿轨的 Melnikov 分析 ······ 92
5.3.3 数值仿真 ······ 95
5.4 双势阱非线性碰撞振子的同宿分岔与混沌 ······ 97

5.4.1 模型描述 ······ 97
5.4.2 同宿轨的 Melnikov 分析 ······ 97
5.4.3 数值仿真 ······ 100
5.5 有界噪声激励下非线性碰撞振子的随机混沌 ······ 104
5.5.1 有界噪声 ······ 104
5.5.2 有界噪声激励下非线性碰撞振动系统的随机 Melnikov 方法 ······ 105
5.5.3 应用实例 ······ 107
5.6 本章小结 ······ 114
参考文献 ······ 115
第 6 章 碰撞振动系统的周期解及其分岔 ······ 116
6.1 引言 ······ 116
6.2 事件切换法 ······ 116
6.3 全局 Poincaré 映射 ······ 118
6.3.1 光滑自治系统的全局 Poincaré 映射 ······ 118
6.3.2 碰撞振动系统的全局 Poincaré 映射 ······ 118
6.4 打靶法 ······ 119
6.5 应用实例分析 ······ 121
6.5.1 周期解稳定性与共存 ······ 121
6.5.2 周期解的倍周期分岔 ······ 124
6.5.3 擦边诱导多解分岔 ······ 125
6.6 本章小结 ······ 127
参考文献 ······ 128
第 7 章 碰撞振动系统的全局动力学 ······ 130
7.1 引言 ······ 130
7.2 胞映射方法简介 ······ 131
7.2.1 简单胞映射 ······ 131
7.2.2 广义胞映射与有向图 ······ 132
7.3 轨道摄动积分法 ······ 134
7.3.1 轨道摄动积分法 ······ 134
7.3.2 Duffing 振动系统应用实例 ······ 135
7.4 碰撞振动系统的图胞映射方法 ······ 137
7.4.1 非光滑流形的逼近 ······ 137
7.4.2 图胞映射方法 ······ 138
7.5 全局动力学应用实例 ······ 139
7.5.1 周期轨擦边诱导的混沌激变 ······ 139

7.5.2 混沌鞍激变动力学 ······ 144
7.6 本章小结 ······ 150
参考文献 ······ 151

第 1 章　非光滑动力系统简介

1.1　非光滑系统研究的背景与意义

实际的动力系统中通常包含有非线性因素. 在科学发展的初期, 人们经常试图用线性模型来近似非线性因素, 以便对系统的动力学进行局部的稳定性分析. 然而, 随着科技的发展和大量学者的研究深入, 人们发现, 有时即使很弱的非线性因素也能使系统表现出复杂的动力学行为和长期的行为不可预测性, 正所谓“失之毫厘, 谬以千里”, 使得线性逼近成为一场徒劳. 从线性到非线性问题的研究过程中, 问题的难度发生了质的变化. 时至今日, 非线性科学已发展成为一门跨学科的前沿学科, 被誉为 20 世纪自然科学中的“三大革命之一”. 非线性科学的崛起, 特别是混沌的发现, 不仅推动了应用数学、经典力学、物理学、固体力学、流体力学等许多学科的巨大发展, 也对一些社会科学和自然科学部门的研究和发展产生了深远影响 [1-10].

在实际工程动力系统中, 不仅存在非线性因素, 也存在大量的非光滑因素, 包括间隙、碰撞、冲击、干摩擦、开关、阈值、继电保护等, 如列车车轮与钢轨的碰撞、飞船对接引起的碰撞、飞行器稳瞄系统的非光滑性导致的碰撞振动、核反应堆中的冷却管道与其支座之间的相互冲击、电路系统中的开关切换及继电保护等. 近年来, 国内外学者对动力系统中非光滑因素展开了广泛的研究, 逐步形成了一个新的研究分支 —— 非光滑系统动力学. 学术界从工程实践和实验出发, 建立了大量的非光滑系统模型, 并通过深入的理论分析和数值实验验证, 逐步揭示了非光滑系统的动力学特性. 这些研究成果在航空航天、冲击机械、碰摩转子、电路系统和控制系统等许多领域中得到了初步的应用, 并取得了较大的经济效益. 同时, 对保密通信、种群系统、医疗和经济等领域的研究也起到了引导和促进作用.

碰撞振动系统作为一类典型的非光滑系统, 其研究最早可以追溯到 Lagrange 对乐器弦振动的分析 [11-15]. 在早期的研究中, 人们普遍认为碰撞振动会对工程实际产生许多的负面影响. 机械工厂的碰撞振动产生的噪声能打扰人们的正常休息, 碰撞振动是噪声污染的主要来源之一. 在列车高速运行时, 列车车轮与铁轨之间的碰撞会产生较大的噪声污染, 也使得列车出现颠簸, 影响乘客的舒适度. 此外, 这种碰撞也会导致列车车轮和铁轨的机械磨损. 考虑到机械加工中的技术水平有限, 或是为了满足机械之间热胀冷缩的需要, 机械装置中的零部件之间通常存在间隙, 这些间隙不可避免地会导致机械装置在运动过程中发生碰撞. 例如, 装有汽油的油桶

与运油车车架之间的碰撞不仅导致机械部件的磨损, 甚至可能会产生火花而引起灾难. 为了避免一些不必要的碰撞振动引起的损失, 人们对碰撞振动系统进行了大量的研究, 建立了许多碰撞控制策略, 使得碰撞振动有效地服务于人类. 1937 年 Paget 发明了冲击消振器 [16], 成功地抑制了涡轮机叶片、飞机机翼的颤动, 随后广泛应用于生产实践中, 至此冲击消振器作为一类典型的碰撞振动系统模型得到了广泛的研究. 此外, 利用碰撞振动的原理, 人们还发明了振动落砂机、振动筛、打桩机和打印机机头等许多机械, 大大方便了人们的生活.

另外一类很重要的非光滑系统是建立在分段光滑模型上的, 通常又可称作分段光滑系统. 分段光滑系统广泛存在于机械力学、电子电路和控制系统等许多科学领域. 碰撞中的弹性碰撞振动系统是非光滑系统, 认为碰撞不是瞬态完成的, 通常可用分段线性模型来描述. 常见的分段光滑系统还有软弹簧力学装置、支架横梁模型等. 此外, 电子电路系统中的保险装置和开关也可以用分段模型来描述, 如著名的蔡系统和 DC-DC 功率变换器. 控制系统中的开关阈值也是建立在分段模型基础上的.

干摩擦系统动力学属于一类非光滑系统问题, 广泛存在于实际的机械系统和工业应用中. 摩擦通常可以导致许多非线性特性, 包括非线性阻尼、自激振动、多重态以及混沌等. 摩擦经常被运用到人们的日常生活中, 如小提琴、传送带、刹车系统等. 但是, 摩擦通常也有不利于人们生活的一面, 它可以引起颤动、刺耳的尖叫和黏滑运动, 如门的颤动、车床的颤动、列车与铁轨之间发出的刺耳噪声及刹车发出的高频噪声等. 机械部件之间的摩擦引起的颤动通常导致器械的磨损. 列车车轮与铁轨之间的摩擦会引起刺耳的噪声, 同时接触表面的粗糙性可能会导致列车出轨 [17].

由于非光滑因素的存在, 即使是很简单的线性系统, 通常也会表现出强非线性的特征, 如线性碰撞振动系统和分段线性系统等. 可见, 非光滑系统本质上是强非线性系统, 具有非线性特性. 在通常的实际问题中, 非线性与非光滑是同时存在的, 这使得系统的动力学行为变得更加复杂. 随着非光滑力学和非线性动力学的发展, 人们开始将非光滑问题和非线性动力学理论结合起来, 从动力学的角度去研究非光滑问题, 发现了非光滑系统中存在许多光滑系统所没有的动力学特性, 从而对系统中的非光滑本质有了更深入的认识. 但是, 由于非光滑因素的存在, 不连续性通常表现为状态或向量场, 或 Jacobi 矩阵的不可微性或间断性, 这导致了系统的强非线性和奇异性, 从而不能用一般的光滑动力系统理论直接进行处理, 需要建立新的理论框架和方法, 这对于研究非光滑现象的本质是很重要的.

总之, 非光滑系统动力学理论和应用的研究具有重要的现实意义, 同时也是一个全新的、富有挑战的课题. 尤其是非光滑系统中的非光滑因素的研究, 对深入认识非光滑系统中特有的复杂动力学具有重要意义.

1.2 非光滑系统的研究概况

不同的非光滑因素会导致不同的非光滑系统, 目前常见的一般包含两大类非光滑系统: 碰撞振动系统和干摩擦系统. 考虑到碰撞的特性, 碰撞振动系统又可以分为弹性碰撞振动系统和刚性碰撞振动系统. 弹性碰撞振动系统考虑了碰撞过程中的变形和时间, 包括接触、变形、恢复和脱离的过程, 通常认为系统的状态变量和向量场是连续的, 但是 Jacobi 矩阵是不连续的, 一般可以用一个分段函数来描述系统的非光滑性, 这类系统通常又可称作分段光滑系统, 可以用来描述许多非光滑电路系统, 如蔡电路等; 刚性碰撞振动系统认为碰撞是瞬态完成的, 系统的状态变量是不连续的, 一般用恢复系统的离散映射来描述系统的状态跳跃. 干摩擦系统认为系统中的摩擦力不再是单值函数, 而是一个集值函数, 这类系统又可称作 Filippov 系统. 该系统的状态变量是连续的, 但是向量场是不连续的.

非光滑系统作为非线性系统的一个新的分支, 近年来一直受到国内外学者的广泛关注. 随着非光滑系统动力学研究的不断深入, 人们已经初步建立了一些非光滑系统的理论和方法. 非光滑系统的定性理论主要研究系统解的存在性、唯一性和稳定性. 而非光滑系统的响应、分岔和混沌等复杂动力学行为的研究是动力学关注的问题 [18-24].

1.2.1 碰撞振动系统动力学

人们对碰撞振动系统的研究经历了几十年的历史, 最早可以追溯到 Lagrange 对乐器弦振动的分析, 所得到的一类弦对物体的冲击问题, 已经发展为偏微分方程的一个新的分支. 自 20 世纪 80 年代以来, 人们开始利用现代动力系统理论来研究碰撞振动系统, 主要研究系统的周期运动和稳定性、分岔和混沌, 发现了许多新颖的动力学特性.

关于碰撞振动系统早期的研究主要集中在单自由度线性碰撞振动系统, 其研究方法主要有: 几何分析的方法, 中心流形的方法和范式的方法. Holmes 和 Shaw 这两位学者最早对线性碰撞振动系统的动力学研究做了大量的工作. Holmes[25] 用严格的数学方法研究了一个简单的弹跳小球的动力学, 发现了系统中存在的倍周期分岔和 Smale 马蹄混沌. Shaw[26] 利用中心流形理论分析了周期激励下的线性碰撞振子的局部分岔, 讨论了同宿相截导致的混沌运动. 通过数值模拟的方法, Shaw[27] 讨论了一类碰撞振动系统的鞍型周期轨的稳定和不稳流形, 把光滑系统的 Melnikov 方法推广到非光滑系统的 Smale 马蹄混沌研究中, 证实了系统中存在的混沌运动. Shaw 和 Holmes[28] 研究了单自由度周期激励下线性碰撞振动系统的响应, 发现系统的擦边会导致 Poincaré 映射的奇异性, 使得系统动力学行为发生质的变化.

随后, 碰撞振动系统的研究引起了国内外学者的广泛关注, 成为研究领域的一

个热点. 由于线性系统可以得到其解析解, 在此基础上, Luo 和 Xie 等得到了碰撞振动系统周期解的 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵的解析形式, 结合中心流形理论, 进而对系统的动力学进行了广泛研究, 包括周期解的稳定性, 余维一、余维二分岔 (倍周期分岔), 强共振、弱共振的 Hopf 分岔和次谐分岔等 [29-31]. 丁旺财 [32] 在其博士学位论文中详细地讨论了多自由度线性碰撞振动系统的环面分岔与混沌.

碰撞通常导致系统的状态出现不连续性, 使得许多光滑系统动力学理论不再适用, 如 York 提出的经典理论, “周期 3 意味着混沌” 对于一般的碰撞振子不再成立. 经过长期的研究, 人们发现当系统的轨线与碰撞面发生零速度擦边时, 对应的 Poincaré 映射将出现奇异性, 使得系统发生分岔, 通常被称作擦边分岔或 C-分岔. 擦边分岔广泛存在于微电机 [33]、神经组织 [34] 和生态系统 [35] 等许多领域, 表现出复杂的动力学特性. Nordmark[36] 阐述了一个碰撞机械系统中擦边周期轨的存在性及其分岔. Whiston[37,38] 借助奇异性理论, 分析了简谐激励下的碰撞振子擦边引起的系统全局动力学的变化. 对于擦边分岔的研究, Nordmark 在文献 [39] 中做了开创性的工作, 借助直接几何分析的方法, 构造了一个不连续局部映射来刻画擦边事件. 该映射具有平方根的奇异性, 研究表明, 随着分岔参数的变化, 碰撞振动系统的周期轨可以直接进入混沌运动, 这种分岔截然不同于光滑系统中的分岔. 基于该局部映射的思想, 陆启韶和金俐 [40] 构造了刚性和弹性碰撞振动系统中擦边周期轨的局部映射, 进而对系统的非线性动力学进行了分析. 秦志英 [41] 在其博士学位论文中对碰撞振动系统中的擦边分岔进行了深入研究. Chin 等 [42] 和 Weger 等 [43] 借助不连续局部映射进一步讨论系统周期轨的擦边导致的复杂动力学. 最近, Dankowicz 和 Zhao[44] 分析了碰撞振动系统中的余维一和余维二擦边分岔. 更详尽的研究参见文献 [45]~[47]. 此外, 不连续局部映射可以用于建立碰撞振动系统的全局 Poincaré 映射, 克服了系统 Jacobi 矩阵在碰撞时刻的不连续性, 给碰撞的稳定性理论开辟了新思路. Müller[48] 利用不连续局部映射的思想给出了一种计算碰撞振动系统的 Lyapunov 指数的方法. Jin 等 [49] 采取映射的思路计算了一个碰撞振动系统的 Lyapunov 指数谱. 在擦边分岔前后, 系统的动力学异常复杂, 秦卫阳等 [50,51] 对碰摩转子进行了研究, 研究表明擦边分岔通常导致三种变化: 一是周期不变, 碰撞次数增加或减少一次; 二是周期运动变为拟周期运动; 三是周期运动突然变为混沌运动. Piiroinen 等 [52] 用一个单摆结构, 从实验的角度验证了擦边分岔导致的周期加分岔序列通向混沌的新道路, 大大丰富了擦边分岔的内容. 借助全局极限映射的最大特征值, Nordmark 在文献 [53] 中给出了一种判据, 来预测周期轨经历擦边分岔后的运动形式. 更详细的擦边分岔的研究参见文献 [54].

颤碰 (chattering) 是碰撞振动系统中的另一个新颖的动力学行为, 在控制系统中又被称为零行为 [55,56]. 颤碰通常包含完全颤碰和不完全颤碰. 颤碰表示有限的时间间隔中系统发生了 N 次碰撞. 当 N 为一个较大的有限数时, 此时的颤碰表示

不完全颤碰; 当 N 为无穷时, 此时的颤碰表示完全颤碰. 早期, Budd 和 Dux[57] 研究了线性碰撞振动系统中的颤碰及其相关动力学行为, 进一步的研究见文献 [58]. 随后, 碰撞振动系统中的颤碰引起了人们的研究兴趣 [59-65]. 最近, Alzate 等 [66,67] 基于齿轮传动系统建立起一个碰撞振动系统模型, 从实验和数值等角度对该碰撞振动系统中的颤碰进行了分析, 包括颤碰诱导的分岔和混沌以及颤碰周期轨的共存问题.

可见, 擦边和颤碰可以诱导许多新颖的动力学现象.

1.2.2 分段光滑系统动力学

分段光滑系统广泛存在于许多的科学领域, 如电力系统中 DC-DC 变换器[68-70]、碰撞力学中软碰撞 [71]、通信交通系统中流的模型 [72,73] 等因素都采用分段模型来描述, 通常包括分段光滑映射系统和分段光滑微分动力系统. 弹性碰撞振动系统通常认为碰撞不是瞬时的, 早期的研究大都局限于低维弱非线性系统, 通常研究的思路是主要采用谐波平衡法、等效线性化法、平均法等渐近的方法. 杨翊仁等 [74,75] 利用等效线性化法研究了碰撞振动系统的极限环颤碰. 国内学者胡海岩对高维分段光滑系统的响应做了大量的工作, 包括增量谐波平衡法和一些有效的数值方法, 提出了一种高效的周期解的打靶法, 并研究了周期解的稳定性 [76-78]. 基于谐波平衡法, Natsiavas 和 Gonzalez[79] 研究了受简谐激励的分段线性振子和的共振响应. Lau 和 Zhang[80] 利用增量谐波平衡法研究了对称情形和非对称情形下约束系统的共振响应问题.

分段光滑系统本质上是非线性系统, 存在丰富的分岔现象, 包括经典的分岔 (如鞍节分岔、Hopf 分岔、倍周期分岔、跨临界分岔等) 和特殊的分岔 (边界碰撞分岔和擦边分岔等). 同时, 在一定的条件下, 分段光滑系统还可以产生混沌运动. 对于边界碰撞分岔的研究, 主要集中在低维的映射系统或可以转化为映射系统的线性系统. 早期, Nusse 等 [81] 给出了边界碰撞分岔的概念, 并进行了分析研究. 更多的研究表明带有平方根奇异性的映射存在从周期到混沌或多带混沌的转迁, 同时系统也表现出了倍周期分岔的现象 [82-86]. 对于简单的分段光滑映射系统, 文献 [87]、[88] 详细讨论了一类危险的边界碰撞分岔的发生机制和发生的条件. 此外, 人们发现分段光滑系统中还存在其他新颖的分岔现象, 如多个吸引子分岔 [89] 和多重选择性分岔 [90] 等. 基于映射的观点, 张思进等 [91] 研究了一类线性碰撞振子系统的擦边周期轨. 通过不同区域中系统流的分析, Luo[92-96] 对分段光滑线性系统的分岔和混沌进行了大量的研究, 包括周期解的经典分岔、擦边流的各种形式及其存在条件, 同时研究了擦边与混沌吸引子的关系. 通过考虑连接不同区域的边界的非光滑结构, Leine 和 Nijmeijer[97] 引入跳跃矩阵来描述非光滑处附近的 Poincré 映射. 随后, di Bernardo 等系统地分析了分段光滑系统的擦边流, 得到了擦边分岔的规范型映

射 [98,99].

1.2.3 Filippov 系统动力学

对于分段光滑微分动力系统, 当满足一定条件时, 系统存在滑动流形, 这类系统通常被称作 Filippov 系统, 如力学系统中的干摩擦 [100,101]、控制系统的滑动 [102-104]、生态群种系统 [105] 等. 对 Filippov 系统的研究主要包含两个思路: 一是数学上的微分包含理论; 二是动力系统理论. 前者主要集中于研究解的存在性、唯一性、延拓性、有界性以及解对初值的依赖性等; 后者主要关心系统的动力学行为, 包括解的稳定性、分岔与混沌等.

微分包含是微分方程的一个子分支, 最早起源于 20 世纪 30 年代, 现在已经发展为一门重要的理论分支, 如今在对策论、控制与优化等科学领域得到了广泛的运用. 随着控制理论的发展, Filippov 等建立了控制系统与微分包含系统之间的对应, 解决了控制论中解的存在性等问题, 使得微分包含在控制论中得到了飞速的发展. 考虑到 Filippov 系统中的滑动解可以用微分包含来描述, 微分包含理论可以用到 Filippov 系统动力学的研究中, Kunze[106] 做了许多的尝试研究, 开创了许多新思路, 得到了很多有价值的理论结果. 更深入的研究还有待于更进一步的探讨.

由于 Filippov 系统中解的分段性和滑动流形的存在, 系统解的结构变得更加复杂, 这给数值和理论分析都带来了很大的困难. 对于 Filippov 系统中的滑动运动的数值模拟仿真主要有三种方法: 一是光滑化的方法, 该方法用一个反三角函数来近似非光滑事件, 然后借助光滑系统的数值工具来模拟, 但是这种光滑化通常导致微分方程出现刚性, 且可能丢失许多非光滑分岔现象; 二是时步方法, 该方法通常与积分步长有关, 引起计算资源的浪费; 三是事件切换方法, 该方法实现简单, 但不能准确定位非光滑事件位置. 最近, 一个有效的数值工具——SlideCont 被用来仿真 Filippov 系统中的滑动运动[107], 进而对系统的分岔进行分析, 但是该工具不能在非滑动和滑动运动之间自动切换. 文献 [108] 利用事件驱动的策略开发了一个数值仿真 Filippov 系统中滑动运动的软件, 并给出了 Matlab 源代码, 该软件可以准确地定位非光滑事件位置. 随后, 以非光滑系统的数值仿真为研究对象, 一个欧洲项目开发了一个非光滑系统数值仿真的平台——SICONOS, 详细描述参见文献 [109].

Filippov 系统具有许多新颖的分岔现象, 通常称作滑动分岔, 属于一种非光滑分岔. Leine 等 [110] 利用集值理论和凸分析, 考虑周期解的特征乘子的跳跃, 对 Filippov 系统的分岔进行了广泛的研究 [111-114]. Kuznetsov 等 [115] 研究了一个参数的平面 Flippov 系统的分岔, 对于每一种分岔类型, 分别给出了相应的拓扑等价规范性. Kowalczyk 等 [116-118] 讨论了两个参数的极限环的不连续诱导分岔, 并给出了初步的分类, 同时提出了一些公开的难题. di Bernardo 等 [119-123] 对 Filippov 型的分段光滑系统的滑动分岔及其诱导的混沌运动做了大量的研究工作, 包括继电

器控制系统、干摩擦力学系统和 DC-DC 变换器等, 更详细的描述参见其专著 [124]. Awrejcewicz 等 [125-137] 对非光滑系统中的滑动运动进行了广泛的研究: 对包含滑动流形的动力系统进行数值和实验分析; 基于经典的 Melnikov 理论, 通过构造非光滑系统的 Melnikov 函数研究了非光滑系统的滑动同宿分岔、混沌及其预测等.

1.2.4 随机非光滑系统动力学

当动力学系统中不仅存在非光滑因素, 且存在随机因素时, 就构成了随机非光滑系统. 关于随机非光滑系统动力学的研究还只是起步, 目前国内外研究还很少, 所能查阅到的文献也非常有限, 大多是局限于随机非光滑线性系统的研究. Feng 等 [138-140] 通过引入一个平均 Poincaré 映射, 并结合线性系统的叠加原理, 考察了非光滑随机线性系统的均值响应问题. Dimentberg 和 Iourtchenko 等对随机线性碰撞振动系统做了大量的工作: 从能量的角度研究了系统的碰撞能量损失 [141]; 借助能量平衡法考察了其均值响应及平均逃逸时间 [142]; 利用非光滑变量代换 [143] 研究了这种系统的随机响应与混沌响应 [144], 更多研究可参见文献 [145]~[147]. Namachchivaya 等 [148] 借助随机平均方法研究了受随机扰动的线性碰撞振动系统的动力学行为. 对于随机非光滑非线性系统的动力学研究甚少, 有待于更进一步的深入研究. 冯进钤等 [149] 首次通过引入平均约束面和平均跃变方程的概念, 把正交多项式逼近的方法推广运用到随机非光滑系统的响应与分岔的研究中. 在此基础上, 李高杰等 [150] 利用正交多项式研究了随机非光滑系统的擦边分岔.

1.3 非光滑动力系统的基本理论

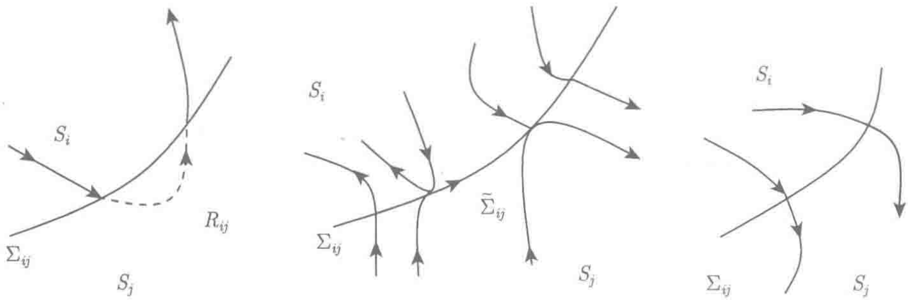
1.3.1 非光滑动力系统的分类

非光滑系统大量存在于许多工程领域, 且非光滑因素较多, 对非光滑系统进行分类有助于对非光滑系统的共性和特性进行深入研究. 非光滑动力系统主要包括非光滑映射系统和非光滑微分动力系统. 关于非光滑映射系统, 目前研究较多的是分段光滑映射系统. 本书主要研究时间非光滑微分动力系统, 关于非光滑映射系统的理论这里不再赘述.

根据非光滑因素导致的不连续特性, di Bernardo 等 [119-124] 引入了一个不连续度的概念对非光滑微分动力系统进行分类.

定义 1.1 设切换集 Σ_{ij} 连接两个分段光滑流 Φ_i 和 Φ_j, x_0 是切换集 Σ_{ij} 上的点, 若 $\Phi = [\Phi_i(x_0,t) - \Phi_j(x_0,t)]|_{t=0}$ 关于时间 t 的第一个非零偏导的阶数为 r, 即 $\left.\dfrac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}\right|_{t=0} \begin{cases} =0, & k<r \\ \neq 0, & k=r \end{cases}$, 则称非光滑系统在 x_0 处的不连续度为 r.

不连续度刻画了系统的状态或向量场的非光滑程度, 由此非光滑动力系统大致可以分为三类, 如图 1-1 所示.



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 1-1　三类非光滑系统示意图

(a) 碰撞振动系统; (b) Filippov 系统; (c) 分段光滑系统

(1) 碰撞振动系统. 这类非光滑系统的不连续度为零, 系统状态是连续的, 除了在切换集处是不连续的或发生跳跃, 见图 1-1(a). 若把碰撞看作对系统的脉冲作用, 则碰撞振动系统可统一表示为脉冲微分方程 [151] 的形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_i\left(t, x\right), & t \neq t_*, x \in S_i, \\ x\left(t_*^+\right) = R_{ij}\left(x\left(t_*^-\right)\right), & t = t_*, x \in \Sigma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_i, \\ x\left(t_*^{\pm}\right) = \lim\limits_{t \to t_*^{\pm}} x\left(t\right). \end{cases} \tag{1-1}$$

设脉冲 (碰撞) 时刻指标集为 $\omega = \{t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots\}$, 则 $t_* = \omega$. 这里 R_{ij} 代表碰撞映射, 通常为离散映射, 故系统式 (1-1) 既包含连续状态, 又包含离散状态, 这类系统又可叫做混合系统.

(2) Filippov 系统. 这类非光滑系统的不连续度为 1, 系统的状态是连续的, 但是向量场在切换集处是不连续的, 系统的流在切换集 Σ_{ij} 的某个子集 $\widetilde{\Sigma}_{ij}$ 中可能存在沿切换集滑动流, 见图 1-1(b). Filippov 开创性地利用微分包含理论来研究这类系统, 其微分包含表示形式如下:

$$\dot{x} \in f\left(t, x\right) = \begin{cases} f^-\left(t, x\right), & x \in S_i, \\ \overline{\mathrm{co}}\left\{f^-, f^+\right\}, & x \in \widetilde{\Sigma}_{ij}, \\ f^+\left(t, x\right), & x \in S_j. \end{cases} \tag{1-2}$$

这里 $t \in R, x \in \Omega$, $\overline{\mathrm{co}}\left\{f^-, f^+\right\} = \left\{f^- + (1-p) f^+, p \in [0,1]\right\}$ 表示 f^- 和 f^+ 构成的一个紧凸集, 是一个集值函数. 由于摩擦力可以用一个集值函数来刻画, 故力学系统中的干摩擦系统是一类典型的 Filippov 系统.