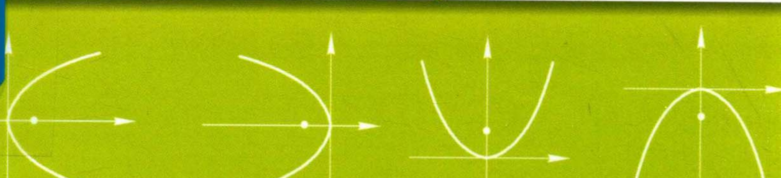
直说圆锥曲线

（第2版）

邱万作　编著



上海科学技术出版社

直说圆锥曲线

（第 2 版）

邱万作　编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是为学生进一步学习和研究圆锥曲线提供基本材料，为学生进行研究性学习提供参考素材.在内容的呈现上，以“问题”为主线，注意展示探索和思考的过程，通过提出问题、引导探究、归纳总结，拓展知识基础；同时重视对学生自主学习的指导，着意引导过程、点拨思维、解说难点、揭示联系，促进学生主动发展、加深体验.

图书在版编目(CIP)数据

直说圆锥曲线 / 邱万作编著.—2版.—上海：上海科学技术出版社，2018.1

ISBN 978-7-5478-3799-3

Ⅰ.①直… Ⅱ.①邱… Ⅲ.①几何课—中学—教学参考资料 Ⅳ.①G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第275165号

责任编辑　李以孝　王韩欢

直说圆锥曲线(第2版)
邱万作　编著

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
(上海钦州南路71号　邮政编码200235　www.sstp.cn)
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本787×1092　1/32　印张5.25
字数105千字
2012年9月第1版
2018年1月第2版　2018年1月第2次印刷
ISBN 978-7-5478-3799-3/G·808
定价：15.00元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

前言 FOREWORD

人们对于圆锥曲线的研究，有悠久的历史；圆锥曲线在科学研究以及生产和生活中的应用，有丰硕的成果.

圆锥曲线的基本理论，形成于古希腊时代.古希腊的数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius)对圆锥曲线理论的建立做出了杰出的贡献，而最先发现圆锥曲线的则是古希腊的另一位数学家梅内赫莫斯(Menaechmus).

梅内赫莫斯是通过用一个平面去截圆锥面，得到了各种类型的圆锥曲线.他用平面去截圆锥面的动因，是当时研究古希腊三大作图问题之一的倍立方问题的需要.圆锥曲线及其应用一经提出，立即受到古希腊数学界的重视，不仅有其他学者一起进行深入的研究，还有数学大师欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)等也为之倾注了很多心血.到了公元前3世纪末，关于圆锥曲线的研究已经积累了大量的资料.阿波罗尼奥斯总结了前人的工作，将已有的研究成果进行归纳、提炼并加以系统化，还提出了自己的许多创见，最后编成巨著《圆锥曲线论》.阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》与欧几里得的《几何原本》，同被后世誉为古代希腊关于几何研究的登峰造极

之作.

阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中,汇集了当时已经获得的关于圆锥曲线的所有性质,并组织成一个严密的逻辑体系.在《圆锥曲线论》问世后的十几个世纪里,整个数学界对圆锥曲线的研究基本上没有新的重大突破和进展,只有希腊数学家帕普斯(Pappus)在公元3世纪末补充了有关圆锥曲线的焦点准线性质.帕普斯证明的这一性质是:设一个动点到一个定点的距离与它到一条定直线的距离之比等于常数,则这个动点的轨迹是圆锥曲线;并且指出,当这个常数等于1时轨迹是抛物线,小于1时轨迹是椭圆,大于1时轨迹是双曲线.

直到16世纪,德国天文学家开普勒(Kepler)揭示出行星环绕太阳运行的轨道是椭圆,意大利科学家伽利略(Galileo)又得出物体斜抛运动的轨道是抛物线,这才促使人们对圆锥曲线去做进一步的研究.进入17世纪,开普勒对圆锥曲线的性质作出了新的阐述,指出椭圆、抛物线、双曲线、圆以及由两条直线组成的退化圆锥曲线,都可以从其中的一个连续变为另一个,这一阐述为圆锥曲线现代的统一定义提供了一个合乎逻辑的直观基础.同时,随着射影几何的创立,一些数学家将投影和截影的方法用于圆锥曲线的研究,得出了关于圆锥曲线的一些特殊定理,比如法国数学家帕斯卡(Pascal)发现了“内接于圆锥曲线的六边形的三组对边的交点共线”这个有趣的定理,并导出了许多结论.在解析几何创建以后,人们将圆锥曲线的研究推进到了一个新的阶段.数学家通过解析研究,揭示了圆锥曲线与二元二次方程的深刻联系,使圆锥曲线以及退化的圆锥曲线成为二元二次方程的几何直观解释.数学家运用代数和分析的方法所形成的二次曲线理论,成为近代

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbo

解析几何的重要组成部分.

圆锥曲线是中学数学课程中的重要内容之一.上海现行的高中数学课本中,引进了椭圆、双曲线、抛物线的概念,并运用代数方法研究了它们的几何性质.这些内容是依据上海市教育委员会于2004年10月颁发的《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》确定的,全体学生必学.限于数学教学的课时安排及基本要求,现行课本确定对于这些内容的编写是以圆锥曲线为载体,着重展示坐标法的运用.现行课本中有关圆锥曲线的定义,其实是由圆锥曲线的特征性质转换而成的,与圆锥曲线的原始定义并非一样.采用这样的方法进行处理,由数学教学实施的需要与可能所决定,是无可厚非的.

教育部于2003年4月颁发的《普通高中数学课程标准(实验)》中,在"选修1-1"关于"圆锥曲线与方程"的内容与要求部分,提出要"经历从具体情境中抽象出椭圆模型";在"选修系列4"关于"几何证明选讲"的内容与要求部分,提出要"通过观察平面截圆锥面的情境,体会相关截线的定理",还要利用Dandelin球对有关定理进行证明.上海市于2004年10月颁布的中小学数学课程标准中,在高中数学的拓展内容部分,通过"拓展Ⅰ"安排了"二元二次方程与二次曲线"的学习主题,提出了关于坐标轴的平移和旋转、二次曲线方程的化简以及二次曲线的研究等学习内容和要求."部编"和"沪编"的数学课程标准中都安排了有关圆锥曲线的选修内容,可见仅在必修课程中学习圆锥曲线是有所不足的,需要进一步充实和拓展圆锥曲线的基础知识,提供机会充分展示其中蕴含的数学思想方法以及知识应用的有效途径.

《直说圆锥曲线》这本书,其研讨对象仍是高中数学中的

圆锥曲线,但关注的重点与高中数学课本有所不同.本书内容是以数学课程标准中有关圆锥曲线教学内容的整体设计为依据、在现行高中数学课本内容的基础上进行适当拓展,展现圆锥曲线的来龙去脉和构建二次曲线的基本理论.

本书首先讲述了圆锥曲线的原始定义,指出椭圆、双曲线、抛物线是"一个平面与圆锥面的截线";再用几何推理方法导出了圆锥曲线的特征性质;然后通过建立直角坐标系,对圆锥曲线进行解析研究,归纳和整理圆锥曲线的几何性质,还引进了圆锥曲线的切线,进而讨论切线的一些性质及其光学意义;最后介绍了坐标轴的平移和旋转,并利用坐标变换进行二次方程的化简以及二次曲线分类的讨论,初步形成了二次曲线的基本理论.因此可以这样说,本书的内容比现行高中数学课本中有关圆锥曲线的内容丰富得多,而这些内容与现行数学课程标准的联系又十分密切.

本书的编写意图,就是力求比较完整地体现数学课程标准对圆锥曲线有关教学内容的整体构想,为高中学生进一步学习和研究圆锥曲线提供基本素材,为学生进行探究性学习提供适用材料.本书内容的组织,着眼于数学课程标准中有关充实圆锥曲线基础知识的要求,着力于展现圆锥曲线知识中蕴含的丰富的数学思想方法,大力发挥其内在的素质教育价值.本书内容的呈现,特别强调反映学生自主学习的需要,比如突出"问题研究",通过提出问题、引导探究、归纳总结,展示探索途径和思考过程,逐步拓展学生的数学知识基础;又如重视"例题讲解",通过分析思路、规范解题、反思说明,揭示联系和点拨思维,有效促进学生对知识的理解和贯通.

总体而言,本书内容的编写,重在对圆锥曲线知识基础的

扩充，力求返璞归真、深入浅出、逐步递进；同时重视对学生自主学习的指导，着意引导过程、解说难点、加深体验.书中内容虽然大部分不在现行高中数学必学内容的范围之内，但对于数学基础较好、又希望进一步提高数学学习水平的学生，用心学习和掌握这些内容是非常必要、也是切实可行的.

对于本书内容的学习，倡导学生采用研究性学习的方式，在更高的层次上促进知识、能力、情意的协调发展.研究性学习的过程是自主求索、充满挑战的艰辛过程，这番学习经历又是磨砺心智、值得回味的宝贵经历，希望本书能给学生带来更多的意外收获和成长快乐.

目录

CONTENTS

第1章

圆锥曲线及其特征性质

我们在高中数学课本中认识了圆锥曲线，并且知道它们的一些基本性质；在物理学科和现实生活中又感受到，圆锥曲线对于刻画现实世界和解决实际问题具有重要的作用.在现实世界，圆锥曲线的存在不容忽视.例如，汽车前灯和太阳灶的反射曲面的设计与抛物线有关；行星绕太阳运行和人造卫星绕地球运行的轨道都是椭圆.又如太空飞行的宇宙火箭，当飞行速度等于第一宇宙速度(7.9 km/s)时，它的轨道是绕地球的一个圆；飞行速度大于第一宇宙速度而小于第二宇宙速度(11.2 km/s)时，轨道是绕地球的一个椭圆；飞行速度等于第二宇宙速度时，轨道对地球而言是抛物线；飞行速度大于第二宇宙速度时，轨道对地球而言是双曲线的一支.古希腊数学家在数学研究中得到的圆锥曲线，居然与物体运行的轨道、反射曲面的设计等实际情景紧密相连，其中的奥妙引人深思.

高中数学课本中讲述的圆、椭圆、双曲线、抛物线，并没有涉及“圆锥”.为什么将这些曲线统称为圆锥曲线呢？有关圆锥曲线的特征性质是什么、是怎样推导出来的？这些就是本章将要讨论的主要问题.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboo

1.1 圆锥曲线的有关概念

圆锥曲线最早出现在2 000多年前的古希腊数学研究中，它的产生与圆锥面有紧密联系，称之为圆锥曲线是名副其实的.

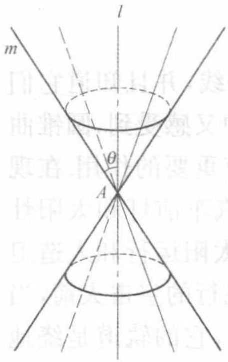


图1-1

1. 圆锥面的生成

圆锥面是简单的旋转曲面之一.设一条动直线 m 与一条定直线 l 相交于定点 A，直线 m 与 l 的夹角为定角 θ 且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 如图1-1所示，直线 m 绕 l 旋转一周所生成的曲面叫做**正圆锥面**，以下简称**圆锥面**.其中，直线 l 叫做圆锥面的**轴**，旋转到任一位置的直线 m 叫做圆锥面的**母线**，点 A 叫做圆锥面的**顶点**.圆锥面被它的顶点分为两支.

我们熟悉的圆锥体，它的侧面是圆锥面的一部分.

圆锥面具有旋转变换的“保长性”.特别地，易知“**位于圆锥面母线上的一条线段在母线旋转过程中保持长度不变.**”由此可知：

位于圆锥面的母线上且夹在垂直于轴的两个平面之间的所有线段等长.

2. 圆锥曲线的定义

一个平面与圆锥面相交，也可以说是“用一个平面去截圆锥面”，这个平面就称为**截平面**，它们的交线又称为

截线.

用一个平面去截一个圆锥面,所得截线的形态与截平面的位置有关.

设圆锥面 C 的顶点为 A,母线与轴 l 的夹角为 θ;轴 l 与平面 M 所成的角为 α, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(1) 如果平面 M 经过顶点 A,那么平面 M 与圆锥面 C 的截线 Γ 有三种可能的情况:

当 $\theta<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,截线 Γ 只含有一个点 A;

当 $\alpha=\theta$ 时,截线 Γ 是一条母线;

当 $0\leqslant\alpha<\theta$ 时,截线 Γ 是两条母线.

(2) 如果平面 M 不经过顶点 A,那么平面 M 与圆锥面 C 的截线 Γ 有四种可能的情况,如图 1-2 所示:

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,截线 Γ 是一个圆;

当 $\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时,截线 Γ 称为**椭圆**;

当 $\alpha=\theta$ 时,截线 Γ 称为**抛物线**;

当 $0\leqslant\alpha<\theta$ 时,截线 Γ 称为**双曲线**.

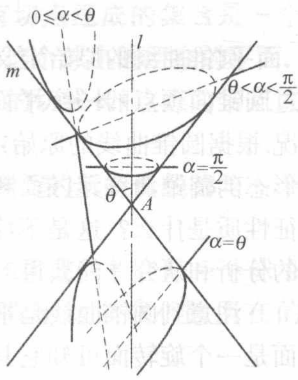


图 1-2

由(2)中四种情况所得的截线,统称为**圆锥曲线**,它们其实都是平面 M 内的曲线.由(1)中三种

情况所得的截线,则称为**退化的圆锥曲线**.

对于(2)中当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时截线 Γ 是一个圆,说理如下:设轴 l 与平面 M 垂直于点 E,则 E 是顶点 A 在平面 M 内的射影.由旋转变换的保长性可知,位于圆锥面母线上且夹在点 A 与平面 M 间的所有线段等长,则这些线段在平面 M 内的射影也等长,所以点 E 到截线 Γ 上各点的距离相等,Γ 是以点 E 为圆心的一个圆.

截线 Γ 是圆的这种情况在此不作深入研究,后面所说的圆锥曲线主要是指椭圆、抛物线和双曲线.由于(2)中当 $\theta\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时,平面 M 只与圆锥面 C 的一支相交,可知椭圆、抛物线只与圆锥面 C 的一支有关;而当 $0\leqslant\alpha<\theta$ 时,平面 M 一定与圆锥面 C 的两支都相交,所以双曲线有两支.

1.2 圆锥曲线的特征性质

圆锥曲线的原始定义是简明的、也是自然的,反映了"不过圆锥面顶点的一个平面"与圆锥面相截所得截线的各种情况.根据圆锥曲线的原始定义,可以利用实物模型来截出各种形态的圆锥曲线.但是,椭圆、抛物线和双曲线它们各自的特征性质是什么?这是不能直接"观察"出来的,需要通过理性的分析和研究才能获得.

注意到圆锥曲线是平面与圆锥面相截的产物,而由圆锥面是一个旋转面可知它具有旋转变换的一般性质,这些认识为我们探究圆锥曲线的特征性质提供了进一步思考的方向.

1. 与球相切的位置关系

球是一个旋转体，它的表面称为球面，即球面与圆锥面同为旋转面.球有优良的特性，在探究圆锥曲线特征性质的过程中，可能会涉及与球有关的一些基础知识.为方便引用，在此对与球相切的位置关系情况进行系统的整理.

(1) 球的切线和切面　与球面有且只有一个公共点的直线叫做**球的切线**，这个公共点叫做**切点**.球心与切点的连线垂直于切线.

设球 O 的半径为 r，则 球 O 与直线 t 相切 $\Leftrightarrow$ 球心 O 到直线 t 的距离等于 r.

与球面有且只有一个公共点的平面叫做**球的切面**，这个公共点叫做**切点**.球心与切点的连线垂直于切面.

设球 O 的半径为 r，则 球 O 与平面 M 相切 $\Leftrightarrow$ 球心 O 到平面 M 的距离等于 r.

如果一个平面与一个球相切，那么这个平面内经过切点的任一直线都与这个球相切.

从球外一点引球的切线，则所有切点组成的集合是一个球小圆，且这点与球心的连线垂直于这个球小圆所在的平面.

从球外一点引球的切线，则所有的切线长(这点与切点之间的线段长)**相等.**

(2) 圆锥面与球相切　**如果圆锥面的所有母线都与一个球相切，那么就说这个圆锥面与球相切.**

圆锥面与球相切所得的切点全体组成的集合是一个球小圆，圆锥面的顶点与球心的连线垂直于这个球小圆所在的平面.

设球 O 的半径为 r，则

球 O 与圆锥面 C 相切 $\Leftrightarrow$ 球心 O 到圆锥面 C 各母线的距离都等于 r.

上述这些与球相切的位置关系,与圆的相关知识极其类似.与球相切的位置关系的有关性质,可联系圆的切线性质进行比较、分析和推导.

在明确了上面(1)(2)所述与球相切的位置关系的有关概念和结论,并能正确理解的基础上,我们来讨论下面的问题.

例1 已知:圆锥面 C 的顶点为 A,轴为 l,不经过顶点 A 的平面 M 与圆锥面 C 相截.

求作:球 O,使球 O 与圆锥面 C 及平面 M 都相切.

分析 由球 O 与圆锥面 C 相切的充要条件,可知球心 O 一定在圆锥面 C 的轴 l 上,且球 O 的半径 r 应等于点 O 到母线的距离;而由球 O 与平面 M 相切,可知点 O 到平面 M 的距离也等于 r. 另外还知,点 O 到平面 M 的距离可用从点 O 所引的平面 M 的垂线段表示,这条线段在经过轴 l 且与平面 M 垂直的平面内.于是可先作一个过轴 l 且垂直于平面 M 的平面 S,将求作球 O 的问题转化为基于平面 S 上的作图问题.

作法 如图 1-3 所示.(1) 过轴 l 作一个平面 S,并且使平面 S 与平面 M 垂直.记平面 S 与圆锥面 C 的两条交线为 m_1, m_2,与平面 M 的交线为 l_0,直线 l_0 与直线 m_1, l 的交点分别为 D, L.

(2) 在平面 S 内,作 $\angle ADL$ 的平分线,设它与直线 l 的交点为 O.

(3) 在平面 S 内,过点 O 作垂直于 m_1 的直线,设垂足为 K.

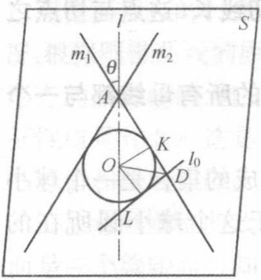


图 1-3

(4) 在圆锥面 C 内，以点 O 为球心、线段 OK 的长为半径长，作球 O.

球 O 是与圆锥面 C 和平面 M 都相切的球.

说明 经过轴 l 且与平面 M 垂直的平面 S，可由轴 l 以及它在平面 M 的射影来确定. 经过圆锥面 C 的轴 l 的平面（如平面 S）可简称**轴截面**. 如本例那样通过作出圆锥面 C 的一个轴截面，将立体图形中的问题转化为平面图形中的问题，是一种常用的"降维"方法.

在图 1-3 中，设线段 OK 的长为 r，根据作法可知点 O 到直线 l_0 的距离等于 r；又由轴截面 S 垂直于平面 M，可得点 O 到平面 M 的距离等于点 O 到直线 l_0 的距离即等于 r. 再由点 O 在轴 l 上，点 O 到母线 m_1 的距离等于 r，可知点 O 到圆锥面 C 任一母线的距离都等于 r，因此球 O 与圆锥面 C 和平面 M 都相切. 一般地，与圆锥面 C 及平面 M 都相切的球称为 **Dandelin 球.**

如果直线 l_0 与 m_2 也相交，即直线 l_0 与 m_2 不平行（此时轴 l 与平面 M 所成角 α 不等于圆锥面母线与轴 l 的夹角 θ），那么还可再作一个 Dandelin 球. 新作的这个球 O' 的位置相对于球 O 的位置，可能是在平面 M 另一侧且同在圆锥面 C 一支内，也可能是在平面 M 同一侧但在圆锥面 C 另一支内. 所以，当 $\alpha \neq \theta$ 时可作两个 Dandelin 球，简称 **Dandelin 双球.**

对于线段的长度，以下用符号语言表示，如线段 AB 的长度就表示为 $|AB|$.

例 2 如图 1-4 所示，已知圆锥面 C 的顶点为 A，母线与轴 l 的夹角为 θ；截平面 M 不经过点 A，球 O 与圆锥面 C 和平面 M 都相切，$\odot E$ 是球 O 与圆锥面 C 的切点圆，点 F 是球

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo