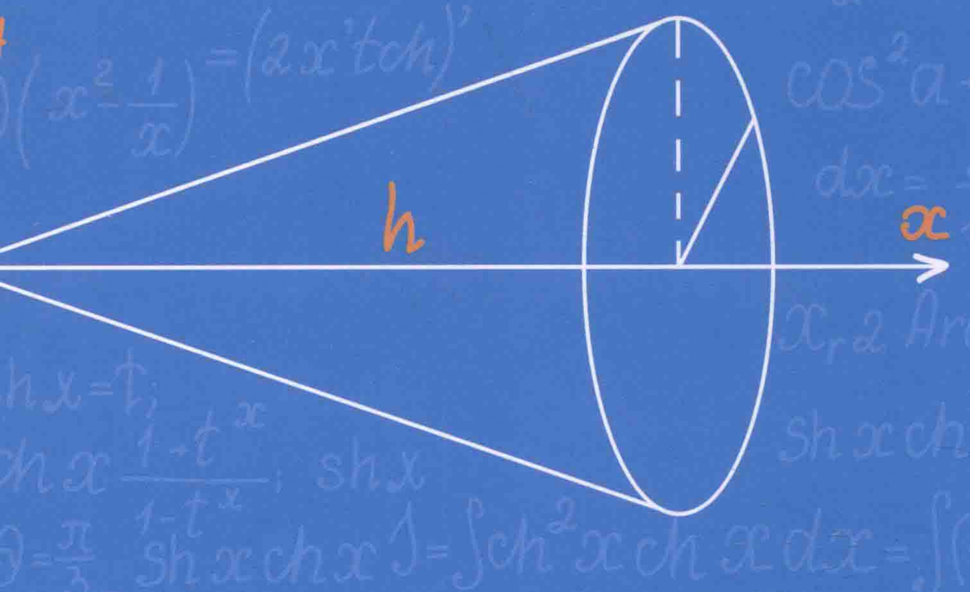
徐优红　张野芳　主编

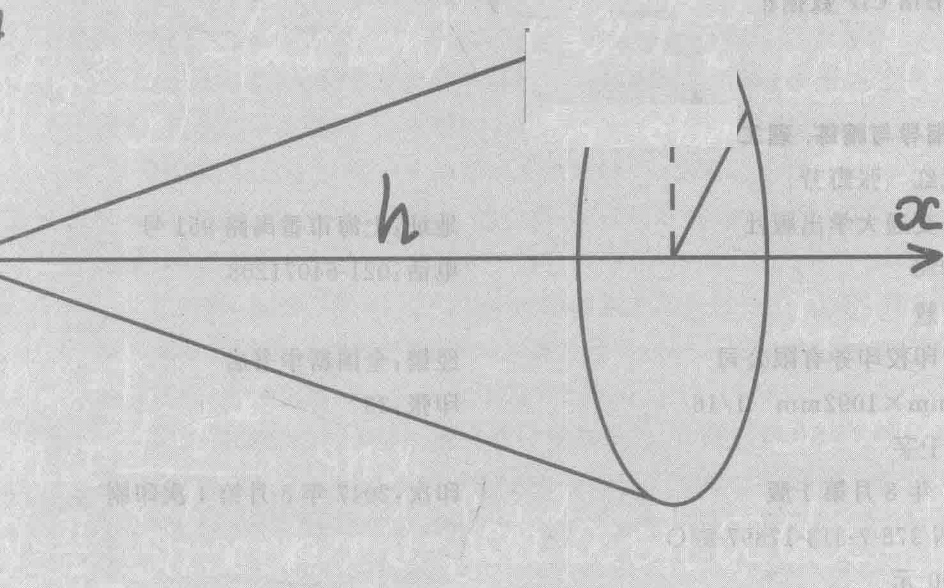
高等数学学习指导与精练（理工类）



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

徐优红　张野芳　主编

高等数学学习指导与精练（理工类）



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书共分 12 章，主要内容有一元函数微积分学、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学、线面积分和无穷积数．每章包括知识要点、常见题型、常规训练和考研指导与训练，使读者在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法与技巧，提高学习能力及应试能力．书末附有训练题的参考答案或简单提示．

本书可作为高等学校本科理工类各专业高等数学的辅助教材和硕士研究生入学考试（数一）复习参考用书，也可供工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与精练．理工类 / 徐优红，张野芳主编．— 上海：上海交通大学出版社，2017

ISBN 978-7-313-17897-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①徐… ②张… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 198010 号

高等数学学习指导与精练．理工类

主　　编：徐优红　张野芳

出版发行：上海交通大学出版社　　地址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030　　电话：021-64071208

出 版 人：郑益慧

印　　制：杭州印校印务有限公司　　经销：全国新华书店

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印张：33

字　　数：675 千字

版　　次：2017 年 8 月第 1 版　　印次：2017 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-17897-8/O

定　　价：72.00 元

编 委 会

主　编　徐优红　张野芳

编　委　（按姓氏笔画为序）

王小双　王娜儿　王朝平

卢海玲　陈丽燕　曹金亮

童爱华

前　言

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生理工类与管理类专业入学考试的统考课.

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本高等数学学习指导书．本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，有效地指导和分层次地训练是本书的特点．本书作为一种辅助性教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点，所配例题与习题都是老师多年累积的经典题型，只要认真练习，一定有所收获.

考虑到高等数学这门课程的特点，在内容上做了以下安排：

(1)知识要点：从本课程的知识体系出发，对各个章节的主要内容，知识要点，相互间的联系，易错点等进行了概括与总结，使知识全面系统，便于掌握.

(2)常见题型：各章节的常见解题类型进行解题思路的概括与分析，引导学生思考问题，熟悉多种解题方法，进而初步掌握常规的解题思路和方法.

(3)常规训练：根据每节新课的要求，设计了常规训练题．通过这些常规训练题掌握基础知识与基本解题方法．题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等.

(4)考研指导与训练：每一章对考研常规题型进行分析，配有一定数量的考研训练题．部分题目是往年考研真题，其他题目参照最近几年研究生入学试题题目的类型与难度设置，通过这些训练提高学生的应试能力.

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，在使用本书时，读者应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容．对于本书提供的例题，力求吸收解题思路与方法，做到举一反三．考研训练部分对于基础较好的读者，可在每章学完后进行，一般学生可在期末总复习时训练.

在编写本书的过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了其他的一些教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书作者表示由衷的感谢．限于编者水平有限，书中不妥之处，恳请读者批评指正.

目　　录

第1章 函数与极限

学习导引

函数是高等数学的研究对象，极限的方法是研究函数的基本方法. 本章主要学习函数及其相关概念，函数的基本性质和常见的初等函数，函数的极限，无穷小与无穷大，函数的连续性等. 本章是初等数学到高等数学的过渡篇，是高等数学的基础.

1.1 映射与函数

知识要点

1. 函数

(1) **定义 1** 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的取值域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f.

注 ①函数概念中包含定义域与对应关系两要素；

② 当且仅当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，它们才表示同一函数，否则表示两个不同的函数.

(2) 高等数学中研究的对象是函数，函数概念的实质是变量之间确定的对应关系，变量之间是否有函数关系就看是否存在一种对应法则，使得其中一个变量或几个变量的取值能唯一确定另一个变量的取值.

(3) 常量与变量、自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量，在另一

过程中可以是变量;一个量在某个过程中是自变量,在另一个过程中可以是因变量.

(4) 确定一个函数的根本要素是定义域和对应法则,而不在于自变量与因变量采用什么样的符号来表示,即 $y=f(x)(x\in D)$ 和 $g=f(t)(t\in D)$ 表示同一函数.

2. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数,其值域为 W. 如果对于数集 W 中的每个数 y,在数集 D 中都有惟一确定的数 x 使 $y=f(x)$ 成立,则得到一个定义在数集 W 上以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 D.

通常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x,把 x 换为 y,从而得 $y=f^{-1}(x)$,并称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 由于这种符号上的改记并没有改变 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和对应法则,所以它们是相同的函数. 由反函数的定义容易得到如下结论:

(1) 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域即是原来函数 $y=f(x)$ 的值域,而其值域即是原来函数的定义域,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 单调函数必有反函数,且其反函数的单调性与原来函数的单调性一致.

3. 复合函数

(1) **定义 3** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,当 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时,$\forall x\in D_{f\cdot\varphi}=\{x\,|\,x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f\}$,即有函数 $\varphi(x)$ 的值落在 D_f 内,这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系,称为复合函数,记为 $y=(f\circ\varphi)(x)=f\{\varphi(x)\}$,$x\in D_{f\cdot\varphi}$,其中 x 是自变量,y 是因变量,u 称为中间变量.

(2) 构建复合函数的前提条件就是,内层函数的值域与外层函数定义域的交不空. 也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内. 否则不能构成复合函数.

(3) 结合律成立,即 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$,但交换律一般不成立,即 $f\circ g\neq g\circ f$.

4. 分段函数

(1) **定义 4** 函数在定义域的不同范围内的表达式不同的函数称为分段函数.

注 分段函数是用几个不同的式子表示一个函数,不能理解为两个或多个函数.

(2) 几个特殊的分段函数:

①符号函数.

函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为符号函数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,对任何实数 x,$x=\text{sgn}x\cdot|x|$ 总成立,所以它起着一个符号的作用.

②取整函数.

函数

$$y=[x]$$

称为取整函数,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$.

③狄利克雷 (Dirichlet) 函数.

函数

$$y=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in R, x\notin Q.\end{cases}$$

称为狄利克雷函数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,1\}$.

5. 初等函数

(1) 五类基本初等函数.

幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为实数);

指数函数:$y=a^x$($a>0,a\neq1$);

对数函数:$y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$);

三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;

反三角函数:$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\text{arccot}x$.

(2) **定义 5** 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成并能用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

熟悉每一类函数的基本性质与图象特征,是讨论其他函数性质所必须的基础.

(3) 关于三角函数的一些常见关系式务必牢记:

①商数关系:$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,$\tan x=\dfrac{1}{\cot x}$,$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

②平方关系:$\sin^2x+\cos^2x=1$,$1+\tan^2x=\sec^2x$,$1+\cot^2x=\csc^2x$

③其他公式:

$$\sin2x=2\sin x\cos x,\ 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\ \tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

6. 函数的基本性质

(1) 单调性：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x, y \in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x) \leqslant f(y)$（或 $f(x) \geqslant f(y)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加函数（或单调减少函数）；若对任意的 $x, y \in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)<f(y)$（或 $f(x)>f(y)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加函数（或严格单调减少函数）.

(2) 奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $\forall x \in D$，有 $-x \in D$，且若 $\forall x \in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，若 $\forall x \in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

不是任何函数都有奇偶性，例如，$y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

注 ①从几何特征来说，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称（见图 1-1）.

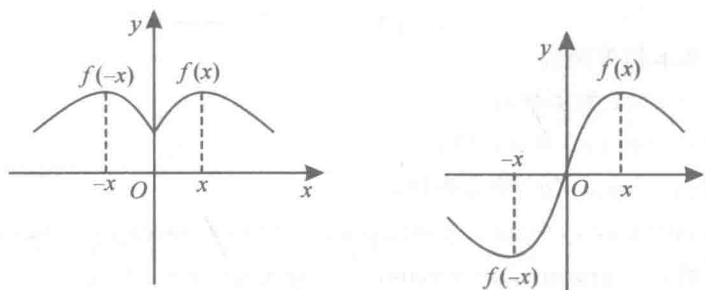


图 1-1

②关于奇偶性的几个结论：

奇（偶）函数的和仍为奇（偶）函数；

奇数个奇函数的积为奇函数；偶数个奇函数的积为偶函数；

一偶一奇两个函数的积为奇函数.

(3) 有界性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称为无界.

如果存在 $M>0$，使得对任意 $x \in I$，恒有 $f(x) \leqslant M$（或者 $f(x) \geqslant M$），那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（或下界）. 其几何特征如图 1-2 所示，显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

如三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上有界；函数 $y=\tan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对 $\forall x \in D$，有 $x \pm T \in D$，并且有 $f(x \pm T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

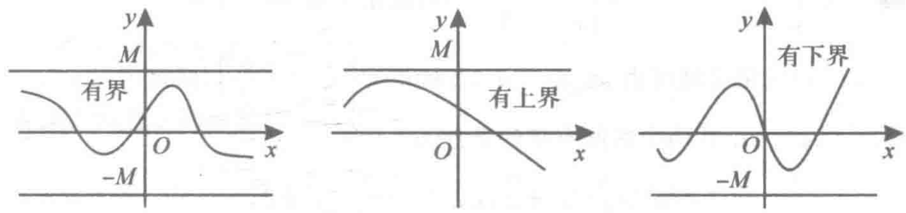


图 1-2

注 ①一个函数如果是周期函数，则它有无穷多个周期，通常所说的周期，一般是指它最小的正周期.

②周期函数不一定存在最小正周期. 如 $y=2$ 就是一个以任意正实数为一个周期的周期函数，由于不存在最小正实数，所以 $y=2$ 不存在最小正周期.

常见题型

1. 判断函数是否等价

例 1 下列各组函数，哪些是同一函数，哪些不是?

① $\log_a x^2$ 与 $2\log_a x$. ② $\sec^2 x-\tan^2 x$ 与 1.

③ $\cos^2 x-\sin^2 x$ 与 $\cos 2x$. ④ $x-1$ 与 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

【思路点拨】 判断两个函数是否等价一般考虑两点：第一，对应关系是否一致；第二，考虑两个函数的定义域是否相同.

解 ① 不等同，两者定义域不同.

② 不等同，两者定义域不同，前者在 $\cos x\neq 0$ 时才有意义.

③ 两者等同.

④ 不等同，两者定义域不同.

2. 求函数的定义域

例 2 求下列函数的定义域

① $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$；

② 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$，若函数 $f(2x-a)+f(x-a)$ 的定义域不是空集，求 a 的范围.

【思路点拨】 这类题目所求的是复合函数 $f(x)=u(v(x))$ 的定义域，按照复合函数的定义，只要求出 x 的取值集合 D，使得对 $\forall x\in D$，$v(x)$ 的取值均落在外层函数 $u(\cdot)$ 的定义域内即可.

解 ① $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\x>-1\end{cases}$,所以定义域为$(-1,3]$.

$f(2x-a)$的定义域可由$0\leqslant 2x-a<2$解得为$\left[\frac{a}{2},1+\frac{a}{2}\right)$,同理可得$f(x-a)$的定义域为$[a,a+2)$. 这两个区间有交的条件为

$$a\leqslant\frac{a}{2}<a+2\text{ 或 }a<1+\frac{a}{2}\leqslant a+2,$$

得a的范围为$-4<a\leqslant 0$或$-2\leqslant a<2$,即$-4<a<2$.

例 3 设函数$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$且$\varphi(x)\geqslant 0$,求函数$\varphi(x)$的定义域.

【思路点拨】 先确定函数$\varphi(x)$的解析表达式,再求其定义域.

解 由函数$f(x)$的定义知,$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,从而有$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,由此解得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

易知,$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

3. 求函数的表达式

例 4 已知$f(x)$满足$af(x)+bf(1/x)=c/x$(a,b,c均为常数,且$|a|\neq|b|$),求$f(x)$.

【思路点拨】 由已知条件的形式知,如果作变量代换$x=1/t$,则在已知条件中会出现关于$f(t)$和$f(1/t)$的关系式,再将其根据函数表示的"变量无关性",将其变量改用x表示,从而得到关于$f(x)$和$f(1/x)$的方程组,解此方程组就可求得$f(x)$.

解 令$x=\frac{1}{t}$,由已知条件可得$af(1/t)+bf(t)=ct$,将t改记为x得

$$af(1/x)+bf(x)=cx.$$

将上式与已知条件联立,得

$$\begin{cases}af(x)+bf(1/x)=c/x,\\af(1/x)+bf(x)=cx.\end{cases}$$

解此函数方程组得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right).$$

例 5 汽车在笔直的公路上行驶10小时,首先用1小时作匀加速运动,使得汽车的速度由零加速到50km/h,匀速行驶8小时后,再用1小时作匀减速运动将速度减至零. 试将汽车行驶的路程表示为时间的函数.

【思路点拨】 对于应用题式的求解函数表达式的问题,关键要根据目标函数与讨论变量之间的逻辑关系,构造函数表达式,此类问题,一般分段函数较为常见.

解 设路程函数为$S(t)$,则

$$S(t)=\begin{cases}25t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\25+50(t-1), & 1<t\leqslant 9,\\425+50(t-9)-25(t-9)^2, & 9<t\leqslant 10.\end{cases}$$

显然，$S(t)$是定义在闭区间$[0,10]$上的分段函数.

4. 讨论函数的奇偶性、单调性、有界性、周期性

例 6 判断下列函数的奇偶性.

① $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$.　　② $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

③ $f(x)=4x+\cos x$.

【思路点拨】 讨论函数的奇偶性，一般分两个步骤：第一步，检查函数定义域是否对称，定义域不对称，没有奇偶性；第二步，检验$f(-x)$与$f(x)$以及$-f(x)$的关系，辨别奇偶性. 当然，还可以根据函数图形的对称性来识别函数的奇偶性.

解 ① 函数的定义域是$(-\infty,\infty)$，且$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数.

② 函数的定义域是$(-\infty,\infty)$，且$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$，因为

$$f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=0,$$

即$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

③ 函数的定义域是$(-\infty,\infty)$，$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$，显然，$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$，所以函数$f(x)=4x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

例 7 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界.

【思路点拨】 讨论函数$f(x)$的有界性，常常联系函数图形来判断，也比较多的利用有界函数的定义来证明函数是有界的. 判别函数无界，除了用无界的定义来讨论外，使用更多的一种方法就是取一个符合函数定义要求的函数子列，若该子列是无界的，则函数在讨论的区间上也是无界的.

解 取数列$\left\{x_k \mid x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2},k=0,1,2,\cdots\right\}$，$\{x_k\}\in(0,1)$，且对$\forall M>0$，只要$k$充分大，就有$f(x_k)=\dfrac{1}{x_k}\sin\dfrac{1}{x_k}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，故$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界.

例 8 设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上有定义，且$f(x)/x$在$(0,+\infty)$内单调减小，证明：对任意两点$x_1>0,x_2>0$，有$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思想点拨】 $f(x)/x$单调减小是唯一的条件，因此，要从$f(x)/x$出发，逐步构造和结论联系的桥梁.

解 不妨设$0<x_1\leqslant x_2$，由已知$f(x_2)/x_2\leqslant f(x_1)/x_1$，即$x_1 f(x_2)\leqslant$

$x_2f(x_1)$. 又因为 $x_2<x_1+x_2$，所以有

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

由此可得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2[f(x_1)+f(x_2)],$$

即
$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

5. 反函数以及复合函数的有关问题

例 9 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2;\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2;\\ 1-(x-2)^2, & x>2.\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

【思路点拨】 求分段函数 $y=f(x)$ 的反函数，首先要检查 $y=f(x)$ 在定义域内的每个分段区间内是否严格单调，如果不是严格单调的，则 $y=f(x)$ 没有反函数，其次再求出 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$.

解 当 $x<-2$ 时，$y>3+8=11$，由 $y=3-x^3$ 解得 $x=\sqrt[3]{3-y}$；当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$3\leqslant y\leqslant 7$，由 $y=5-x$ 解得 $x=5-y$；当 $x>2$ 时，$y<1$，由 $y=1-(x-2)^2$ 解得 $x=2+\sqrt{1-y}$，从而有

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}2+\sqrt{1-y}, & y<1;\\ 5-y, & 3\leqslant y\leqslant 7;.\\ \sqrt[3]{3-y}, & y>11.\end{cases}$$

将上式中 x 与 y 的地位互换，得 $y=f(x)$ 的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x} & x<1;\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7;\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11.\end{cases}$$

例 10 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称（$a<b$），证明函数 $y=f(x)$ 是周期函数并求其周期.

【思路点拨】 从已知条件出发寻求正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 即可.

解 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，由已知可得 $f(a+x)=f(a-x)$ 及 $f(b+x)=f(b-x)$，所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x+a-a)=f[a+(x-a)]\\&=f[a-(x-a)]=f(2a-x)\\&=f(2a-x+b-b)=f(b+(2a-b-x))\\&=f(b-(2a-b-x))=f(x+2b-2a).\end{aligned}$$

因为 $b>a$，所以 $2b-2a>0$，由此知函数 $f(x)$ 是周期函数，它的一个周期为 $2b-2a$.

常规训练

(1) 填空题：

① 设函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $f(2)=$________，$f(x+1)=$________.

② 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-2))=$________.

③ 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$的定义域为________.

④ 判断下列函数的奇偶性.

$f(x)=5x^4-x^2+1$ ________.

$f(x)=2x^2+x\cos x$ ________.

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$________.

$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0;\\ 1+x, & x>0\end{cases}$________.

⑤ 指出下列函数的复合过程：

$y=\sqrt[3]{\tan(x^2)}$ ________________.

$y=\ln\cos\dfrac{x}{2}$ ________________.

$y=2^{\tan^3(2x+1)}$ ________________.

⑥ 已知函数 $y=f(x)$的定义域是$[-3,1]$，则 $f(2x+1)$的定义域为________.

(2) 选择题：

① 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0;\\ x^2+x & x>0;\end{cases}$ 则(　　).

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0;\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

B. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0;\\ -(x^2+x), & x<0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0;\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

D. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0;\\ x^2-x, & x<0\end{cases}$

② 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$(　　).

A. 0

B. 1

C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1;\\ 1, & |x|>1\end{cases}$