

考研 数学

20年真题分类精讲

(数学三)

中公教育研究生考试研究院 ◎ 编著

书内含码 码上有课

(手机扫描书内二维码, 在线观看题目视频讲解)



核心考点免费学+在线题库任意练+考友圈答疑解惑+视频直播随时看



世界图书出版公司



考 研 数 学

20 年真题分类精讲

(数学三)

中公教育研究生考试研究院◎编著

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·20年真题分类精讲·数学三 / 中公教育研究生考试研究院编著. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2016.11

ISBN 978-7-5192-1483-8

I. ①考… II. ①中… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 300323 号

书 名 考研数学·20年真题分类精讲(数学三)
KAOYAN SHUXUE · 20 NIAN ZHENTI FENLEI JINGJIANG (SHUXUE SAN)
编 著 中公教育研究生考试研究院
责任编辑 张文丽
特约编辑 孙志荣
装帧设计 中公教育图书设计中心

出版发行 世界图书出版公司北京公司
地 址 北京市东城区朝内大街 137 号
邮 编 100010
电 话 010-64038355(发行) 64037380(客服) 64033507(总编室)
网 址 <http://www.wpcbj.com.cn>
邮 箱 wpcbjst@vip.163.com
销 售 各地新华书店
印 刷 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开 本 850mm×1168mm 1/16
印 张 20.5
字 数 492 千字
版 次 2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷
国际书号 ISBN 978-7-5192-1483-8
定 价 59.00 元

前

言

近几年,考研竞争日趋激烈,且备考难度也在逐年上升。由于考研数学(三)包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三个科目,每个科目又可分为多个知识体系,每个知识体系又包含众多考点,考生既要综合复习,又需要单独进行分类复习,因此备考相对较难。另外,虽然考研数学试卷题量不大,一共23道题目,但150分的总分值使得每道题分值很高,考生一旦复习不到位,就很容易丢分。所以一定要掌握解题方法,提升作答能力。

为了更好地复习考研数学,考生要了解考研数学的试题特点和命题规律,其中一个途径就是研究历年真题。经研究发现,在历年真题中,考研数学命题重心和考查方向相对稳定,很多考点经常被考查,因此本书对1998~2017年共20年的真题按照科目、体系、考点分类,以帮助考生在较短时间内达到较好的复习效果。

科目分类复习

考研数学(三)包含微积分、线性代数、概率论与数理统计三个科目,所占试卷分值比例分别为56%、22%、22%。由于三个科目各具特点,因此针对不同科目需要采取不同的复习方法。

微积分复习难度相对较大,所含考点较多,需要记忆的定理和公式较复杂,而且题型变化多端。考生在复习该学科时,不仅需要牢记相关定理和公式,还需通过研究真题把握不同题型的考查核心,以不变应万变。

线性代数知识点之间的综合性较强,几乎没有需要记忆的定理和公式,但计算量相对较大,考生需要在理清整个学科知识体系的前提下通过练习巩固做题思路。

概率论与数理统计复习难度相对微积分要小很多,计算过程也没有线性代数复杂,考生复习时只需重点记忆常用的公式,熟悉解题步骤。

总之,考研数学(三)三个科目之间交叉内容少,且考试的题目不会跨科考查。所以,复习考研数学(三)要分科目进行。因此,本书按科目分为三篇,帮助考生根据各个科目的特点有针对性地复习。

体系分类掌握

考研数学(三)的三个科目中,每个科目都可以分成多个知识体系,不同的知识体系考查的侧重点不同。因此考生在掌握了不同科目的特点之后,应该将每个学科分体系复习,并将考研数学真题按照不同体系分类研究。

将每个科目分体系复习,能使考生清楚掌握学科的重点。例如,微积分的体系分类相对复杂,依据历年考查重点可以将其分为八个知识体系。

下表是微积分的体系分类以及每个体系在 20 年内的出题次数,根据下表可以看出每个章节知识在 20 年内的考查频率。

1998~2017 年(数学三)微积分体系分类及考查频率

体系	函数、极限与连续	一元函数微分学	一元函数积分学	中值定理	多元函数微分学	二重积分	级数	微分方程与差分方程
考查次数	43 次	57 次	30 次	12 次	28 次	30 次	26 次	21 次

因此,本书对每一学科的知识体系分类编排为章。每章开头都设有“本章考试要求”,考生可以从中了解最新大纲对本章内容的基本要求;同时,每章均设有“历年真题分布统计”,考生可以了解本章知识在历年真题中的考查情况,从而对不同知识体系有重点地进行复习。

考点分类运用

考研数学(三)的每个科目虽然考点众多,但绝大多数真题涉及的考点较为单一。考生在研究真题时,应按照不同考点将真题分类运用,以便达到举一反三的效果。

例 1:(2017 年第 9 题) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】本题主要考查了对称区间上积分的性质和定积分的几何意义。积分区间是关于原点对称的,先考虑运用奇偶性简化计算。定积分的计算有一定的技巧性,考生复习的时候可以把有关定积分计算的题目放在一起比较分析,这样便于掌握其计算方法和技巧。

例 2:(2017 年第 7 题) 设 A, B, C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立,则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是()

- (A) A 与 B 相互独立。 (B) A 与 B 互不相容。
 (C) AB 与 C 相互独立。 (D) AB 与 C 互不相容。

【分析】本题主要考查了随机事件相互独立的条件。该题在证明过程中可以结合随机事件的分配律和加法公式,本质上要求考生掌握事件独立和不相容的关系。考生复习的时候可以把有关随机事件独立性的题目放在一起学习,这样便于掌握其要点。

因此,本书将 20 年真题按照不同的考点归类。

第一,针对每个考点都归纳出了“解题核心要点”,给出了与该考点有关的定理、公式、方法等,便于考生记忆。

第二,将真题按照考点分类,真题的答案包括三部分:“思路分析”是对本题的主体思路和重要考点的概括;“解析”是本题的详细解题过程和步骤,多数题目为一题多解;“评注”是对每种题型重要考点和解题方法的归纳。

第三,书中近十五年的真题均配有二维码,考生扫码即可观看题目视频讲解。

《考研数学·20 年真题分类精讲(数学三)》一书,旨在从科目、体系、考点三个角度帮助考生学习 20 年真题,在短时间内更好地复习考研数学。

中公教育研究生考试研究院

2017 年 3 月

目

录

第一篇 微积分

第一章 函数、极限与连续	(2)
本章考试要求	(2)
历年真题分布统计	(2)
历年真题分类精讲	(3)
考点一 函数的性质与运算	(3)
考点二 对收敛性及极限性质的考查	(4)
考点三 无穷小量的比较	(6)
考点四 极限的计算	(11)
考点五 连续性	(21)
考点六 间断点	(23)
第二章 一元函数微分学	(27)
本章考试要求	(27)
历年真题分布统计	(27)
历年真题分类精讲	(28)
考点一 对导数与微分概念的考查	(28)
考点二 导数的计算	(33)
考点三 切线与法线	(37)
考点四 单调性与凹凸性	(39)
考点五 极值与拐点	(46)
考点六 滐近线	(49)
考点七 导数的经济学应用	(51)
考点八 原函数与导函数的关系	(56)
第三章 一元函数积分学	(60)
本章考试要求	(60)
历年真题分布统计	(60)

历年真题分类精讲	(61)	
考点一	不定积分的计算	(61)
考点二	定积分的比较	(65)
考点三	定积分的计算	(66)
考点四	广义积分	(69)
考点五	对变上限积分的讨论与应用	(70)
考点六	定积分的应用	(73)
第四章	中值定理	(78)
本章考试要求	(78)	
历年真题分布统计	(78)	
历年真题分类精讲	(79)	
考点一	对定理内容的考查	(79)
考点二	闭区间上连续函数的性质	(80)
考点三	罗尔定理的使用	(81)
考点四	辅助函数的构造	(83)
考点五	双中值问题	(86)
第五章	多元函数微分学	(88)
本章考试要求	(88)	
历年真题分布统计	(88)	
历年真题分类精讲	(89)	
考点一	多元函数微分学的概念	(89)
考点二	偏导数的计算	(91)
考点三	无条件极值	(99)
考点四	条件极值	(100)
第六章	二重积分	(104)
本章考试要求	(104)	
历年真题分布统计	(104)	
历年真题分类精讲	(105)	
考点一	二重积分的性质	(105)
考点二	直角坐标	(107)
考点三	极坐标	(110)
考点四	交换积分次序	(117)
考点五	对称性	(118)
第七章	级数	(122)
本章考试要求	(122)	

历年真题分布统计	(122)
历年真题分类精讲	(123)
考点一 收敛性的判别	(123)
考点二 幂级数的收敛域	(129)
考点三 幂级数展开	(130)
考点四 幂级数求和	(131)
考点五 常数项级数求和	(138)
第八章 微分方程与差分方程	(141)
本章考试要求	(141)
历年真题分布统计	(141)
历年真题分类精讲	(142)
考点一 一阶微分方程	(142)
考点二 二阶线性微分方程	(146)
考点三 差分方程	(149)
考点四 应用问题	(150)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(156)
本章考试要求	(156)
历年真题分布统计	(156)
历年真题分类精讲	(157)
考点一 数值型行列式	(157)
考点二 抽象型行列式	(159)
第二章 矩阵	(162)
本章考试要求	(162)
历年真题分布统计	(162)
历年真题分类精讲	(163)
考点一 矩阵的运算	(163)
考点二 逆矩阵	(164)
考点三 伴随矩阵	(166)
考点四 矩阵方程	(168)
考点五 初等矩阵	(169)
考点六 矩阵的秩	(171)

第三章 向量	(176)
本章考试要求	(176)
历年真题分布统计	(176)
历年真题分类精讲	(177)
考点一 线性表出	(177)
考点二 线性相关	(182)
第四章 线性方程组	(188)
本章考试要求	(188)
历年真题分布统计	(188)
历年真题分类精讲	(189)
考点一 解的判定	(189)
考点二 解的结构	(191)
考点三 含参数的线性方程组	(196)
考点四 同解与公共解	(204)
第五章 特征值和特征向量	(208)
本章考试要求	(208)
历年真题分布统计	(208)
历年真题分类精讲	(209)
考点一 特征值与特征向量的计算	(209)
考点二 矩阵的相似	(213)
考点三 相似对角化	(216)
考点四 实对称矩阵	(220)
第六章 二次型	(229)
本章考试要求	(229)
历年真题分布统计	(229)
历年真题分类精讲	(230)
考点一 二次型及其合同标准形	(230)
考点二 惯性指数与合同规范形	(235)
考点三 正定二次型	(239)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件及其概率	(244)
本章考试要求	(244)

历年真题分布统计	(244)
历年真题分类精讲	(245)
考点一 随机事件的概念与概率	(245)
考点二 简单概型	(248)
考点三 条件概率与独立性	(248)
第二章 随机变量及其分布	(251)
本章考试要求	(251)
历年真题分布统计	(251)
历年真题分类精讲	(252)
考点一 分布函数和概率密度	(252)
考点二 常见分布	(256)
考点三 随机变量函数的分布	(258)
第三章 多维随机变量及其分布	(261)
本章考试要求	(261)
历年真题分布统计	(261)
历年真题分类精讲	(262)
考点一 分布律和概率密度	(262)
考点二 边缘分布与条件分布	(273)
考点三 常见分布	(278)
考点四 独立性	(281)
考点五 随机变量函数的分布	(282)
第四章 随机变量的数字特征	(288)
本章考试要求	(288)
历年真题分布统计	(288)
历年真题分类精讲	(289)
考点一 基本定义	(289)
考点二 常见分布的数字特征	(293)
考点三 相关系数	(294)
考点四 切比雪夫不等式	(296)
第五章 大数定律与中心极限定理	(297)
本章考试要求	(297)
历年真题分布统计	(297)
历年真题分类精讲	(297)
考点一 对大数定律的考查	(297)
考点二 对中心极限定理的考查	(298)

第六章 数理统计与参数估计	(300)
本章考试要求	(300)
历年真题分布统计	(300)
历年真题分类精讲	(301)
考点一 常见统计量	(301)
考点二 统计分布	(306)
考点三 参数估计	(310)

第一篇

微积分

第一章 函数、极限与连续

本章考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念。
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念。
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法。了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系。
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

历年真题分布统计

1998 ~ 2017 年本章真题分布统计

考点 年份	函数的性质 与运算	对收敛性及极 限性质的考查	无穷小量 的比较	极限的计算	连续性	间断点	总计
1998 年						3 分	3 分
1999 年							0 分
2000 年		3 分					3 分
2001 年				6 分			6 分
2002 年				5 分 + 3 分			8 分
2003 年					10 分		10 分
2004 年	4 分		4 分	8 分		4 分	20 分
2005 年				4 分 + 8 分			12 分
2006 年				4 分 + 7 分			11 分
2007 年			4 分	4 分			8 分
2008 年				9 分	4 分	4 分	17 分
2009 年			4 分	4 分		4 分	12 分
2010 年				4 分 + 10 分 + 4 分			18 分

(续表)

考点 年份	函数的性质 与运算	对收敛性及极 限性质的考查	无穷小量 的比较	极限的计算	连续性	间断点	总计
2011 年			4 分	10 分			14 分
2012 年				10 分 + 4 分			14 分
2013 年			4 分 + 10 分			4 分	18 分
2014 年		4 分	4 分	10 分			18 分
2015 年		4 分	10 分	4 分			18 分
2016 年				4 分 + 10 分			14 分
2017 年				10 分	4 分		14 分
总计	4 分	11 分	44 分	146 分	18 分	19 分	242 分

概述:本章在考研中几乎每年都会有考查。考题形式上:选择题、填空题、解答题均有涉及。本章的考点分布有两个特点需要引起考生重视:一是考点分布比较集中,超过 50% 的分值分布在极限的计算中;二是考点之间的关联比较明显,无穷小量的比较、函数连续性的讨论和间断点的判断从本质上讲考查的都是极限的计算。所以,考生在复习本章时,极限的计算应该是复习的核心,需要掌握各类极限的常用计算方法。

历年真题分类精讲

考点一 函数的性质与运算

(一) 解题核心要点

函数是微积分的研究对象,函数的性质和运算是微积分的基础内容,这一部分在考试中一般直接涉及的比较少,更多的是和后面的考点结合,作为解题的预备知识间接考查。

(二) 历年真题精讲

(2004 年,4 分) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?()

- (A)(-1,0)。 (B)(0,1)。 (C)(1,2)。 (D)(2,3)。



视频讲解

【答案】A

【思路分析】计算函数在各个区间端点处的极限,根据极限值的情况确定函数是否有界。

【解析】当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续,而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

所以,函数 $f(x)$ 在(-1,0) 内有界,故选 A。

评注

如果 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界。

| 考点二 对收敛性及极限性质的考查 |

(一) 解题核心要点

本题型主要考查极限收敛的条件及性质, 常见的结论有:

极限的四则运算法则

收敛 + 收敛 = 收敛, 收敛 + 发散 = 发散, 发散 + 发散 = ?;

收敛 \times 收敛 = 收敛, 收敛 \times 发散 = $\begin{cases} \text{发散}, & \text{收敛} \neq 0, \\ ?, & \text{收敛} = 0, \end{cases}$ 发散 \times 发散 = ?。

(上述结论中的问号表示结果不确定)。

夹逼定理

若存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

单调有界收敛定理

单调递增有上界的数列必有极限; 单调递减有下界的数列必有极限; 单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。

极限的保号性

有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$:

若从某一项 N 开始, 以后所有项都有 $x_n \geqslant y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geqslant \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则从某一项 N 开始, 以后所有项都有 $x_n > y_n$ 。

(二) 历年真题精讲

1. (2000 年, 3 分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

(A) 存在且一定等于零。

(B) 存在但不一定等于零。

(C) 一定不存在。

(D) 不一定存在。

【答案】D

【思路分析】举反例, 排除错误选项。

【解析】用排除法。

设 $\frac{x^2}{x^2 + 2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$, 满足条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} - \frac{x^2}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 2} = 0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2} = 1$,

由夹逼准则知, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 则选项 A 与 C 错误。

设 $\frac{x^6 + x^2}{x^4 + 1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^6 + 2x^2}{x^4 + 1}$, 满足条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^6 + 2x^2}{x^4 + 1} - \frac{x^6 + x^2}{x^4 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} = 0,$$

但是由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \text{ 极限不存在, 故不选 B, 所以选 D.}$$

2. (2014 年, 4 分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有()

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ 。

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ 。

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ 。

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$ 。



视频讲解

【答案】A

【思路分析】利用极限的定义及保号性, 可推导出结论。

【解析】因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 所以对任意的 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有 $|a_n - a| < \epsilon$ 。

取 $\epsilon = \frac{|a|}{2}$, 有 $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, 因此有 $a - \frac{|a|}{2} < a_n < a + \frac{|a|}{2}$, 故当 $a > 0$ 时, $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$;

当 $a < 0$ 时, $\frac{3a}{2} < a_n < \frac{a}{2}$ 。故 $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ 。应该选 A。

评注

数列极限的保号性: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ 。该定理可以

推广为: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > a$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > a$; 还可以进一步推广为: 如果

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > y_n$ 。

3. (2015 年, 4 分) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ 。

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ 。

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。



视频讲解

【答案】D

【思路分析】这个题目考查的是收敛的数列与其子数列间的关系, 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a 。

【解析】如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a 。

对于 A 选项, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 而 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 都是 $\{x_n\}$ 的子列, 所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 选项 A 是正确的。

选项 C 与选项 A 同理。所以选项 C 正确。

对于 B 选项, $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 的极限都等于 a , 且 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 分别是下标为偶数和奇数的子列, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。所以选项 B 是正确的。

对于 D 选项, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 但 $\{x_{3n}\}, \{x_{3n+1}\}$ 的并集没有包含 $\{x_n\}$ 的所有项, 所以不能推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 因此 D 选项不正确。