



**国家出版基金资助项目**

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

PICARD THEOREM

# Picard 定理

刘培杰数学工作室 编著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

PICARD THEOREM

# Picard 定理

刘培杰数学工作室 编著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书通过四大部分介绍了有关毕卡定理的相关知识及应用. 读者可以较全面地了解这类问题的实质, 还可以认识到它  
在其他学科中的应用.

本书适合广大数学爱好者阅读参考.

## 图书在版编目(CIP)数据

Picard 定理/刘培杰数学工作室编著. —哈尔滨:  
哈尔滨工业大学出版社, 2017. 9

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6684-5

I. ①P… II. ①刘… III. ①皮卡问题  
IV. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 136897 号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 张永芹 聂兆慈  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 牡丹江邮电印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 38 字数 434 千字  
版 次 2017 年 9 月第 1 版 2017 年 9 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5603-6684-5  
定 价 158.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

◎  
代  
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不绝。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

### 潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

### 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

### 读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

**王梓坤**

## 第一编 Goncharov 论复变函数

### 第一章 复数 //3

- 1.1 毕卡其人 //3
- 1.2 复数集 //5
- 1.3 复数的四则运算 //9
- 1.4 共轭数 //16
- 1.5 复数的三角写法·模和  
辐角 //17
- 1.6 复数运算的几何说明 //20
- 1.7 模与辐角的性质 //23
- 习题 //27

### 第二章 函数·极限·级数 //29

- 2.1 函数的概念·平面到平面上的  
映象 //29
- 2.2 数列的极限 //34
- 2.3 函数的极限·连续性 //44

- 2.4 数字级数 //50
- 2.5 几何级数(及其有关的级数) //56
- 习题 //60

### 第三章 整有理函数和分式有理函数 //62

- 3.1 多项式的概念 //62
- 3.2 多项式的性质·代数学的基本定理 //64
- 3.3 有理函数的概念 //72
- 3.4 有理函数的性质·展成初等分式 //74
- 3.5 将有理函数按  $z-z_0$  的幂展开 //81
- 习题 //92

### 第四章 初等超越函数 //94

- 4.1 指数函数·欧拉公式 //94
- 4.2 圆(三角)函数和双曲函数 //104
- 4.3 欧拉公式应用举例 //113
- 4.4 圆正切和双曲正切 //119
- 4.5 对数 //120
- 4.6 任意的幂和根 //124
- 4.7 反三角函数和反双曲函数 //127
- 习题 //129

### 第五章 导数及积分 //132

- 5.1 复变函数导数的概念 //132
- 5.2 初等函数的导数 //139
- 5.3 柯西-黎曼条件 //144
- 5.4 积分法的基本引理 //149
- 5.5 原函数 //150

- 5.6 复积分的概念 //155
- 5.7 复积分的性质 //163
- 5.8 视作原函数增量的定积分 //169
- 5.9 复积分与积分路径无关的条件 //172
- 5.10 闭曲线上的积分 //176
- 5.11 由积分来定义对数 //181
- 5.12 求有理函数的积分 //184
- 习题 //186

## 第六章 函数列和函数级数 //189

- 6.1 关于一致收敛的一般知识 //189
- 6.2 幂级数和它的性质 //197
- 6.3 泰勒级数 //212
- 6.4 幂级数的演算方法 //218
- 6.5 在所与区域内为一致收敛的由一般形状的多项式做成的级数(和序列) //227
- 6.6 分式有理函数做成的级数(序列) //233
- 6.7 另外的级数和序列 //238
- 习题 //243

## 第七章 柯西积分、解析函数的概念 //246

- 7.1 与参数有关的积分 //246
- 7.2 多项式情形的柯西积分 //254
- 7.3 以柯西积分表示复变函数的条件 //255
- 7.4 将复变函数展成幂级数 //257
- 7.5 解析(正则)函数的概念 //260
- 7.6 用多项式逼近解析函数 //266
- 7.7 解析函数的性质 //269

- 7.8 维尔斯特拉斯关于解析函数列极限的定理 // 275
- 7.9 解析拓展 // 280
- 7.10 黎曼曲面 // 292
- 7.11 解析函数与解析表示 // 299
- 习题 // 302

## 第八章 奇点、复变函数论在代数和分析上的应用 // 304

- 8.1 整函数及其在无限远点的变化 // 304
- 8.2 单值函数的孤立奇点、极点和本性奇点 // 308
- 8.3 在孤立奇点邻域内的洛朗展开式 // 314
- 8.4 柯西残数定理 // 318
- 8.5 沿闭曲线所取的对数导数的积分 ·  
多项式在所与曲线内零点的数目 ·  
代数学的基本定理 // 321
- 8.6 高斯-卢卡定理 // 325
- 8.7 几个利用残数计算定积分的例子 // 327
- 习题 // 331

## 第九章 保角映象、复变函数论在物理问题中的应用、复变函数论的流体力学解释 // 334

- 9.1 保角性 // 334
- 9.2 地图制图学问题: 球面到平面的保角映象 // 341
- 9.3 导数的几何意义 // 343
- 9.4 保角映象的图像表示法 // 347
- 9.5 黎曼关于保角映象的基本定理 // 350

- 9.6 拉普拉斯方程·调和函数及它的应用 //352
- 9.7 常数模曲线与常数辐角曲线的某些性质 //359
- 9.8 复变函数论的流体力学表示 //362
- 习题 //376

## 第二编 Markushevič 论整函数

- 第十章 整函数的概念 //381
- 第十一章 最大模和整函数的级 //397
- 第十二章 整函数的零点 //421
- 第十三章 高等代数基本定理和毕卡小定理 //430
- 第十四章 代数关系式·加法定理 //447

## 第三编 Picard 大定理

- 第十五章 毕卡大定理 //471
  - 15.1 引言 //471
  - 15.2 毕卡的证明 //472
  - 15.3 博雷尔和萧特基的证明 //479
  - 15.4 阿尔福斯的拓扑学证明 //482
  - 参考文献 //483
- 第十六章 与整函数毕卡定理相关的两个定理 //485
  - 16.1 引言 //485
  - 16.2 缺项幂级数 //486
  - 16.3 朱利亚线 //489

16.4 例和练习 //494

参考文献 //496

## 第十七章 代数曲面 //498

17.1 定义 //498

17.2 欧拉示性数和基数原理 //500

17.3 几何亏格 //502

17.4 典则除子 //504

17.5 除子的相交数 //505

17.6 符号差定理及诺特定理 //506

17.7 毕卡数 //508

17.8 奇点 //511

17.9 极大化曲线 //514

17.10 果园问题 //519

17.11 曲面的分类 //522

参考文献 //525

## 附录 I 毕业定理的另一证法 //526

§ 1 Picard 定理的另一证法 //526

§ 2 毕卡小定理 //538

§ 3 周期整函数·维尔斯特拉斯定理 //554

## 附录 II 微分多项式的 Picard 集 //564

§ 1 引言及结论 //565

§ 2 引理 //568

§ 3 定理 1 的证明 //574

§ 4 定理 2 的证明 //584

参考文献 //586

## 编辑手记 //588

---

# 第一编

Goncharov 论复变函数

---

