



国家出版基金资助项目
“十三五”国家重点图书
材料研究与应用著作

塑性成形有限元方法

FINITE ELEMENT
METHODS ON
PLASTIC FORMING
PROCESS

王忠金 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目
“十三五”国家重点图书
材料研究与应用著作

塑性成形有限元方法

FINITE ELEMENT
METHODS ON
PLASTIC FORMING
PROCESS

王忠金 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

有限单元法作为解决复杂实际工程问题应运而生的数值计算方法,自问世以来,在塑性成形计算中扮演着越来越重要的角色。本书以作者多年来的学术研究成果为基础,从刚黏塑性有限元方法、弹塑性动力分析有限元方法的基础理论推导和建立过程出发,系统地阐述了塑性成形过程有限元法的基本原理、技术发展和工程应用。其内容涵盖了金属塑性成形中非线性问题的求解、材料参数的影响、接触问题的处理、几何形状的描述和网格划分与重新划分等,并给出了相应的有限元程序流程,提供了具体的应用案例,有助于有志于深入研究的读者的进一步研究探索。

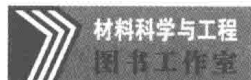
本书可供材料加工工程、机械、力学、土木、航空等专业的科技工作者及研究生、高年级本科生参考,也可供从事相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

塑性成形有限元方法/王忠金著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6
ISBN 978-7-5603-6190-1

I. ①塑… II. ①王… III. ①塑性变形—数值分析—分析方法 IV. ①TB301.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 217437 号



策划编辑 许雅莹 张秀华

责任编辑 刘 瑶 张 瑞

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 660mm×980mm 1/16 印张 18.75 字数 330 千字

版 次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6190-1

定 价 98.00 元



(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

《材料研究与应用著作》

编写委员会

(按姓氏音序排列)

毕见强	曹传宝	程伟东	傅恒志
胡巧玲	黄龙男	贾宏葛	姜 越
兰天宇	李保强	刘爱国	刘仲武
钱春香	强亮生	单丽岩	苏彦庆
谭忆秋	王 铀	王超会	王雅珍
王振廷	王忠金	徐亦冬	杨玉林
叶 枫	于德湖	藏 雨	湛永钟
张东兴	张金升	赵九蓬	郑文忠
周 玉	朱 晶	祝英杰	

前 言

书稿终于付梓,一个个符号、一行行公式、一幅幅图形,显得那么亲切。回首数年的耕耘,不禁让人追忆起往昔那些“欣于所遇,暂得于己”的韶华时光,推导公式、构思流程、调试程序,常常被一个“Bug”搞得数日寝食难安,一旦“Debug”又欣喜若狂,这可能就是有限元的魅力所在,对它既保持高度热情、默默付出,而又不乏因收获的喜悦而带来的浓厚兴趣。付出与收获、启迪和思考,一直伴随着笔者的学习和研究的过程。正所谓春华秋实,随着学习和探索的深入,笔者的认识也得到了进一步的提高,并有幸在国家自然科学基金和 863 等项目的资助下,开展了与塑性成形工程应用相关课题的研究,对塑性成形有限元方法进行了探索和实践。

塑性成形的目的是为了获得满足一定形状和预期性能的构件,由于塑性成形过程会在形状改变的同时使材料性能也发生变化,因而对塑性成形有限元分析必须充分考虑材料性能的变化对变形的影响,因此本书第 1、2 章提出了考虑材料参数 n, m 值影响的刚黏塑性有限元方法来探究这一问题。塑性成形的目的性使得界面处理问题在塑性成形有限元分析中显得尤为重要,受到高次代数解析法的启发,将其引入模具形状的表达,并在此基础上结合间接四边形网格划分方法应用于盘形件等成形过程,这在确保形状表示精度有效提高的同时,也极大地方便了变形体与模具的接触处理(第 3、4、5 章)。网格划分方法的方案优化与当前构形息息相关,对于塑性成形而言,构形的改变与网格的变化存在“有据可依”的内在联系,将构形表示与网格划分这两个有限元分析的基础问题加以统一考虑,有助于界面接触处理和网格划分策略的选择,由此提出了基于构形的 B 样条曲面表示方法和 Medial 中轴剖分的六面体网格 B 样条曲面拟合插值划分方法,并对法兰件等成形过程做了分析(第 6、7、8 章)。由衷地祝愿读者阅读本书时能够有所共鸣,从中汲取到所需的知识和方法。

这些思考和工作倾注着作者及其不同时期指导的研究生的心血结晶,他们是吕军博士(协助指导)、程利冬博士、张娟娟硕士、杨静硕士等。每念及此,不免顿感记忆犹新,师生间直抒胸臆的研讨、甚至因争执而略显紧张的情景仿佛被岁月的相册定格在昨天。但愿这种由思想碰撞迸发出的火

花,激发出的灵感和热情与求知务真的精神,能够不断传承下去。

掩卷沉思,饮水思源,在此需要特别提到的是作者在不同学习、工作阶段得到了吉林工业大学(现吉林大学)冯肇华教授、傅沛福教授、李运兴教授、哈尔滨工业大学王仲仁教授的热心指导和大力支持,使作者能在科研的道路上砥砺前行,并有所收获。

本书能够付诸出版,作者谨向在本书的前期筹备过程中提供过帮助的各位学生致谢,他们是博士研究生戴春俊、蔡舒鹏和硕士研究生冯业坤、方骁等;并要特别感谢哈尔滨工业大学王仲仁教授、吉林大学冯肇华教授的殷切鼓励。

由于塑性成形有限元方法涉及塑性力学、计算几何、传热学、计算方法等跨学科的知识,尽管作者一直对此保持密切的关注和研究的热情,但所了解的仍是“沧海一粟”。如果说塑性成形有限元法是潮平岸阔的名川大河,那么其所容纳的这些内容分支就像涓涓细流,虽默淌缓流,但这些都是作者撰写本书的知识和灵感取之不竭的源泉。“不积小流,无以成江海”,除了要求作者能持之以恒之外,同时还要具备较强的学术功底与整合能力,作者对此深刻感受到了“吾生也有涯,而知也无涯”的意涵。

由于时间仓促和作者本人知识水平所限,书中难免存在疏漏和不妥之处,在此热忱期望广大读者不吝指正。

王忠金

2016年12月于哈尔滨

目 录

第 1 章 考虑材料参数 n, m 影响的三维刚黏塑性有限元方法	1
1.1 概述	1
1.2 刚黏塑性流动理论的基本假设和方程	2
1.3 考虑材料参数 n, m 影响的三维刚黏塑性有限元列式	3
1.4 考虑材料参数 n, m 影响的三维刚黏塑性有限元初始速度场 自动生成方法	12
1.5 有限元求解过程技术问题的处理	13
1.6 摩擦边界问题处理	16
1.7 有限元方程集成及约束处理	23
1.8 考虑材料参数 n, m 影响的三维刚黏塑性有限元分析数值 实例	23
参考文献	26
第 2 章 塑性成形过程温度场有限元分析	29
2.1 引言	29
2.2 温度场初始值和边值问题	30
2.3 非线性瞬态温度场的有限元列式	32
2.4 热力耦合计算的数学模型	36
2.5 时间域的离散和热力耦合计算模式	39
参考文献	42
第 3 章 高速体积成形的动力分析有限元列式	44
3.1 引言	44
3.2 基于能量法的锤头速度计算	44
3.3 有限变形弹塑性本构关系	47
3.4 动力分析有限元列式	49
3.5 考虑热效应的热力耦合计算	53
3.6 动力有限元分析中的沙漏控制	54
3.7 流动应力模型的选择	56

3.8	金属高速变形过程中的应力波	58
3.9	应力波传播过程的有限元分析	60
	参考文献	70
第 4 章	接触界面几何描述及动态边界条件处理	71
4.1	引言	71
4.2	模具形状的解析表达	77
4.3	基于模具形状解析表达的接触判断方法	85
4.4	圆柱体曲面凸模压缩过程有限元分析	93
4.5	空间曲面的几何描述及动态边界条件处理	105
	参考文献	112
第 5 章	二维平面网格划分方法	115
5.1	引言	115
5.2	网格划分方法研究概述	115
5.3	间接法划分四边形网格	123
5.4	网格重划分	141
5.5	圆柱体平砧镦粗过程有限元分析	145
5.6	圆柱体曲面凸模压缩过程有限元分析	152
	参考文献	155
第 6 章	单元类型选择及六面体网格划分方法	159
6.1	引言	159
6.2	单元类型选择	160
6.3	四面体单元和六面体单元的计算对比分析	162
6.4	六面体网格划分方法	165
6.5	基于三维 Delaunay 三角划分的中轴面分解技术	171
6.6	基于形状特征识别的有限元六面体网格自动划分及重划	195
6.7	六面体网格的重新划分技术	202
	参考文献	206
第 7 章	盘形件锤锻过程有限元分析	210
7.1	引言	210
7.2	圆柱体高速镦粗过程的有限元分析	210
7.3	盘形件锤锻变形过程的有限元分析	224
	参考文献	239

第 8 章 法兰锻造过程有限元分析与试验研究	240
8.1 引言	240
8.2 方法兰锻造成形过程的数值模拟	241
8.3 方法兰锻造成形试验研究	251
第 9 章 塑性体积成形过程有限元分析系统(H-FORGE3D)	254
9.1 系统基本思想和功能	254
9.2 系统结构	255
9.3 算例及系统可靠性验证	268
参考文献	276
名词索引	277
附部分彩图	281

第 1 章 考虑材料参数 n, m 影响的 三维刚黏塑性有限元方法

1.1 概 述

刚塑性有限元方法的基础是马尔可夫的刚塑性变分原理。Kobayashi S 和 Lee C^[1]把材料体积不可压缩条件用 Lagrange(拉格朗日)乘子法引入泛函,首次提出了基于不完全广义变分原理的刚塑性有限元法。之后, Zienkiewicz^[2]采用罚函数法处理材料体积不可压缩条件,Osakada^[3]给出了可压缩性材料的刚塑性有限元法。刚塑性有限元法虽然本构关系还是小变形理论,但计算时每次加载增量步长可以取得大些,因此适合于金属塑性成形分析。1982 年,Osakada^[4]指出,当加载增量步较大时,对于应变硬化材料应该在泛函中考虑应变硬化的影响,否则在某些情况下,会因每一加载步内材料的形状和性能的变化而使解出现错误,并会随加载步长的加大和加载次数的增多而积累。1985 年, Kim 和 Yang^[5]给出了考虑应变硬化影响的能量泛函,实际上是对马尔可夫变分原理的能量泛函做了修正。大多数韧性材料都具有应变硬化(n)和应变速率敏感性(m),其在塑性变形中的表现因材料和变形条件的不同而存在差异。 n 和 m 值分别反映了材料的这两种特性。就通常情况而言,在室温下变形,以应变硬化影响为主;高温或超塑性材料在超塑性变形温度下,应变速率敏感性影响较大,而对于某些应变速率敏感性材料在常温下就表现出这种现象,同时材料的 m 值还是应变速率的函数。因此,应变速率敏感性在材料变形过程中起重要作用。目前,在刚塑性有限元列式求解的能量泛函极值变分过程中,一般假定流动应力与应变速率无关,这对于应变速率敏感性材料在加载增量步较大的情况下就不尽合理,可能会使解出现错误。本章对文献[5]刚塑性有限元方法做了进一步发展,建立同时考虑材料应变硬化和应变速率敏感性影响的一般三维刚黏塑性有限元方法,使每一加载步内材料变形的有限元分析更符合实际,解更稳定。这对于复杂、计算量大的三维复杂形状锻件成形过程数值模拟就更显重要,并可以分析材料参数 n, m 对成形规律和初速度场生成方法的影响。

1.2 刚黏塑性流动理论的基本假设和方程

在金属塑性成形过程中,材料的弹性变形远远小于其塑性变形,忽略弹性变形,而采用刚塑性材料假设是合理的。本章所建立的刚黏塑性有限元求解列式基于下列假设。

- ①忽略弹性变形,不考虑质量和惯性力。
- ②材料均质,且各向同性。
- ③材料服从米塞斯(Mises)屈服准则,且等向强化。
- ④体积不可压缩。
- ⑤材料存在应变强化和应变速率敏感性。
- ⑥塑性区与刚性区界面随加载变形流动而变化。

对刚塑性变形体 V ,一部分表面 S_V 上给定速度 $\bar{u}_i$,另一部分表面 S_F 上给定外力 $\bar{F}$,不考虑速度间断面。塑性变形区内应满足如下方程和边界条件。

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.2.1)$$

(2) 本构关系(Levy-Mises 关系)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \sigma'_{ij} \quad (1.2.2)$$

(3) 几何方程(变形协调条件)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1.2.3)$$

(4) 屈服条件

$$\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = k^2 \quad (1.2.4)$$

式中 k ——剪切屈服极限。

(5) 体积不可压缩条件

$$\dot{\epsilon}_{ij}\delta_{ij} = 0 \quad (1.2.5)$$

(6) 边界条件

$$\sigma_{ij}n_i = \bar{F}_i \quad (\text{在 } S_F \text{ 上}) \quad (1.2.6)$$

$$\dot{u}_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } S_V \text{ 上}) \quad (1.2.7)$$

1.3 考虑材料参数 n, m 影响的三维刚黏塑性有限元列式

1.3.1 能量泛函

本章采用 Euler(欧拉)描述法,求解刚塑性准静态塑性流动问题。设变形体在当前时刻 t 的构形为 V , 表面积 S 由 S_F 和 S_V 组成。假定在 t 时刻, Cauchy(柯西)应力 σ_{ij} 、已知 Cauchy 应变 ϵ_{ij} 和 S_F 上表面力 $\bar{F}_i$, 且满足平衡条件。在 $t + \Delta t$ 时刻速度为 $\bar{u}_i$, S_F 上表面力为 $\bar{F}_i + \Delta t \dot{\bar{F}}_i$ 。

在 Δt 时间间隔内, Cauchy 应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 满足协调方程

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1.3.1)$$

等效 Cauchy 应变速率为

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.3.2)$$

令 $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ 和 H' 分别表示 t 时刻的等效 Cauchy 应变、应力和应变硬化率, 即

$$H' = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \quad (1.3.3)$$

于是, $t + \Delta t$ 时刻的 Cauchy 应力 $\hat{\sigma}_{ij}$ 和等效 Cauchy 应力 $\hat{\sigma}$ 分别为

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta t \dot{\sigma}_{ij} \quad (1.3.4)$$

$$\hat{\sigma} = \bar{\sigma} + \Delta t \dot{\bar{\sigma}} H' \quad (1.3.5)$$

考虑材料的应变硬化和应变速率敏感性, 给出一般形式的材料本构关系为

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 (a_1 + a_2 \bar{\epsilon})^n (a_3 + a_4 \dot{\bar{\epsilon}}^m) \quad (1.3.6)$$

式中 $\sigma_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ —— 材料常数。

当 $a_3 = 1, a_4 = 0$ 时, 式(1.3.6)简化为 $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$ 的形式; 当 $a_1 = 1, a_2 = 0$ 时, 式(1.3.6)简化为 $\bar{\sigma} = f(\dot{\bar{\epsilon}})$; 当 $a_2 \neq 0, a_4 \neq 0$ 时, 式(1.3.6)简化为 $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}})$ 的形式。

由虚功互等定理

$$\hat{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon} = \hat{\sigma} \delta \dot{\epsilon} \quad (1.3.7)$$

知 $t + \Delta t$ 时刻的虚功率方程为

$$\int_V (\bar{\sigma} + \Delta t \dot{\epsilon} H') \delta \dot{\epsilon} = \int_{S_F} (\bar{F}_i + \Delta t \dot{F}) \delta \dot{u}_i dS \quad (1.3.8)$$

因此,若定义如下泛函

$$\Pi_1 = \int_V (\bar{\sigma} \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\epsilon}^2 H') dV - \int_{S_F} (\bar{F}_i + \Delta t \dot{F}_i) \dot{u}_i dS \quad (1.3.9)$$

则对于任何满足边界条件的速度 $\dot{u}_i$, 真实速度场应使 Π_1 取得极小值, 即

$$\delta \Pi_1 = 0 \quad (1.3.10)$$

对于塑性成形体积不可压缩条件: $\dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_{ii} = \dot{u}_{i,i} = 0$, 可以采用 Lagrange 乘子法和罚函数法将约束条件引入式(1.3.9)中, 使其成为无约束泛函。

Lagrange 乘子法是假定满足边界条件, 但不一定满足体积不可压缩条件的任意速度场 $\dot{u}_i$, 用乘子 λ 将体积不可压缩条件引入泛函, 其修正的泛函为

$$\Pi_2 = \Pi_1 + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_V dV \quad (1.3.11)$$

使 $\dot{\epsilon} = 0$ 成为变分后的自然条件。当式(1.3.11)取驻值时, 乘子 λ 具有明确的物理意义, 它等于静水压力 σ_m , 即

$$\lambda = \sigma_m \quad (1.3.12)$$

该方法的特点是引入了附加的乘子 λ , λ 作为独立的未知量, 每个单元上都有各自独立的 λ_i , 增加了计算量。但是, 它迭代计算的收敛性和稳定性好, 易于初始速度场的选择, 并可求得单元的静水压力。

罚函数法是将罚数 ξ 引入泛函中, 其修正的泛函为

$$\Pi_2 = \Pi_1 + \frac{\xi}{2} \int_V \dot{\epsilon}_V^2 dV \quad (1.3.13)$$

式(1.3.13)中的 ξ 是一个很大的正数, 要使泛函 Π_2 取极值, 只有 $\dot{\epsilon}_V$ 很小才有可能, 这样使 $\dot{\epsilon}_V = 0$ 近似得到满足。对于罚函数的约束项 $\int_V \dot{\epsilon}_V^2 dV$ 的被积函数是二次式 $\dot{\epsilon}_V^2$, 要求在单元上每点处 $\dot{\epsilon}_V$ 都等于零, 这个条件很难满足, 而且会使系统具有过刚的性质。解决的方法是采用降阶积分法^[6,7] 和平均值法。降阶积分法是通过减少 $\int_V \dot{\epsilon}_V^2 dV$ 在数值积分时的积分点, 从而放松过分的约束条件。平均值法就是修正罚函数(也称为修正的罚函数

法), 假定平均应变速率 $\dot{\epsilon}_V^{\frac{m}{m+1}}$ 为

$$\dot{\epsilon}_V^{\frac{m}{m+1}} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_V dV \quad (1.3.14)$$

修正的罚函数法泛函为

$$\Pi'_2 = \Pi_1 + \frac{\xi}{2V} \left[\int_V \dot{\epsilon}_V dV \right]^2 \quad (1.3.15)$$

即要求单元内体积应变的平均值很小。平方在积分 $\int_V \dot{\epsilon}_V dV$ 之外, 从而使公式解除过分约束。同时, 当允许速度场 $\dot{u}_i$ 接近其真实解时, 平均应力为

$$\sigma_m = \lambda = \frac{\xi}{V} \int_V \dot{\epsilon}_V dV \quad (1.3.16)$$

这与 Lagrange 乘子法的假定是相同的, 罚数 ξ 的物理意义为 $\frac{\sigma_m}{\dot{\epsilon}_V^{\frac{m}{m+1}}}$ 。

1.3.2 塑性区与刚性区域界面的处理

金属在塑性成形过程中, 变形体一般不会同时进入塑性状态, 尤其是加载具有局部性或存在自由表面, 一部分区域处于刚性状态或接近于刚性状态的较小弹性变形, 两种情况做刚性区处理, 其等效 Cauchy 应变率趋近于零。此时, 由塑性流动理论可知, 应力偏量 σ'_{ij} 无法确定, 塑性本构关系不能成立。为此, 引入一个小参数 $e (e \ll 1)$ 作为塑性区和刚性区等效 Cauchy 应变率的临界值, 当单元的等效 Cauchy 应变率 $\dot{\epsilon} > e$ 时, 做塑性区处理, 当单元的等效 Cauchy 应变率 $\dot{\epsilon} < e$ 时, 认为单元处于刚性状态。对于刚性区, 令 $t + \Delta t$ 时刻的等效 Cauchy 应力近似地表示为

$$\bar{\sigma} + \Delta t \dot{\sigma} \cong \frac{\bar{\sigma} \dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 + e^2)^{1/2}} + \Delta t \dot{\sigma} \quad (1.3.17)$$

于是式(1.3.9)的泛函可以表示为

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} (\bar{\sigma} + \Delta t \dot{\sigma}) (\dot{\epsilon}^2 + e^2)^{1/2} - \int_{S_F} (\bar{F} + \Delta t \dot{F}_i) \dot{u}_i dS \quad (1.3.18)$$

式中, 因子 $1/2$ 是由于在刚性区 σ_{ij} 和 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 呈线性关系。对于模锻问题, 取 $e = 10^{-3}$ 。

1.3.3 有限元列式

对式(1.3.13)泛函假定每个时间步长充分小, 在 Δt 时间间隔内采用 Euler(欧拉)显示积分, 则

$$\int_0^{\Delta t} \Pi_2 dt = \int_V \left\{ \int_0^{\Delta t} \left[\bar{\sigma} \frac{d\dot{\epsilon}}{dt} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{d\dot{\epsilon}}{dt} \right)^2 H' \right] dt \right\} dV +$$

$$\frac{\xi}{2} \int_V \left[\int_0^{\Delta t} \Delta t \left(\frac{d\epsilon_V}{dt} \right)^2 dt \right] dV - \int_{S_F} \left[\int_0^{\Delta t} (\bar{F}_i + \Delta t \cdot \dot{\bar{F}}_i) \frac{du_i}{dt} \cdot dt \right] dS \quad (1.3.19)$$

考虑到 $dt \cong \Delta t$, $d\bar{\sigma} = H' d\bar{\epsilon}$, 由 Δt 间隔内的积分中值定理, 可以得到如下增量形式的能量泛函

$$\tilde{\Pi} = \int_V \left(\bar{\sigma} \Delta \bar{\epsilon} + \frac{1}{2} \Delta \bar{\sigma} \Delta \bar{\epsilon} \right) dV + \frac{\xi}{2} \int_V (\Delta \epsilon_V)^2 dV - \int_{S_F} (\bar{F}_i + \Delta \bar{F}_i) \Delta u_i dS \quad (1.3.20)$$

将 V 离散成 n_e 个单元, 首先考察在一个单元 e 的情况, 然后集成成整体。

在等参单元体 v 上位移增量为 $\Delta \mathbf{u}$ (以矩阵形式表示, $\Delta \mathbf{u}^T = [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3]$), 令

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{d} \quad (1.3.21)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, \dots, N_n \mathbf{I}]$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{N}$ ——形函数矩阵;

$\Delta \mathbf{d}$ ——节点位移增量, $\Delta \mathbf{d}^T = [\Delta d_{1x}, \Delta d_{1y}, \Delta d_{1z}, \dots, \Delta d_{nz}]$ 。

由式(1.2.3), Cauchy 应变增量 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ 可表示为

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{d} \quad (1.3.22)$$

式中 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^T = [\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \Delta \epsilon_z, 2\Delta \epsilon_{xy}, 2\Delta \epsilon_{yz}, 2\Delta \epsilon_{zx}]$

$\mathbf{B}$ ——当前时刻的应变矩阵。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (1.3.23)$$

体积应变增量可表示为

$$\Delta \epsilon_v = \Delta \epsilon_{11} + \Delta \epsilon_{22} + \Delta \epsilon_{33} = \sum (B_{1i} + B_{2i} + B_{3i}) \Delta d_i = \mathbf{CB} \Delta \mathbf{d} \quad (1.3.24)$$

式中 $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ 。

考虑到等效 Cauchy 应力 $\bar{\sigma}$ 在加载增量步内与 Cauchy 应变率有关, 式 (1.3.20) 泛函中只含未知数 $\Delta \mathbf{d}$, 对其变分并求驻值

$$\delta \Pi^e = 0 \quad (1.3.25)$$

可等价写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} = & \int_v \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \Delta \bar{\epsilon} + \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right] dV + \frac{1}{2} \int_v \left[\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \Delta \bar{\epsilon} + \Delta \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right] dV + \\ & \xi \int_v \Delta \epsilon_v \frac{\partial \Delta \epsilon_v}{\partial \Delta \mathbf{d}} dV - \int_{s_f} \mathbf{N}^T (\bar{\mathbf{F}} + \Delta \bar{\mathbf{F}}) ds \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

若令

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \right)^T = \left(\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \epsilon_{11}}, \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \epsilon_{22}}, \dots, \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \epsilon_{12}} \right)^T \stackrel{\text{记}}{=} (Q_1, Q_2, \dots, Q_6)^T \quad (1.3.27)$$

则有

$$\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \mathbf{d}} = \left[\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]^T = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} = \mathbf{b} \quad (1.3.28)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\Delta \bar{\epsilon}} \mathbf{DB} \Delta \mathbf{d} \quad (1.3.29)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.30)$$

注意到

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{d}} = m \sigma_0 (a_1 + a_2 \bar{\epsilon})^n [a_4 (\Delta \bar{\epsilon})^{m-1}] \quad (1.3.31)$$

$$\Delta \bar{\sigma} \cong \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \Delta \bar{\epsilon} \quad (1.3.32)$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{d}} = n \sigma_0 (a_1 + a_2 \bar{\epsilon})^{n-1} [a_3 + a_4 (\Delta \bar{\epsilon})^m] b \quad (1.3.33)$$

由式 (1.3.24) 得

$$\Delta \epsilon_V \left(\frac{\partial \Delta \epsilon_V}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right) = (\mathbf{CB})^T (\mathbf{CB}) \Delta \mathbf{d} \quad (1.3.34)$$

令

$$\mathbf{E} = \mathbf{CB} \quad (1.3.35)$$

式(1.3.26)可以写成

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} = \int_v \gamma \mathbf{b} dv + \xi \int_v \mathbf{E}^T \mathbf{E} \Delta \mathbf{d} dv - \int_{s_f} \mathbf{N}^T (\bar{\mathbf{F}} + \Delta \bar{\mathbf{F}}) ds = 0 \quad (1.3.36)$$

式中

$$\gamma = \sigma_0 (a_1 + a_2 \bar{\epsilon})^n \{ a_3 + a_4 (m+1) (\Delta \bar{\epsilon})^m + \frac{a_2 n}{2(a_1 + a_2 \bar{\epsilon})} [2a_3 \Delta \bar{\epsilon} + a_4 (m+2) (\Delta \bar{\epsilon})^{m+1}] \} \quad (1.3.37)$$

式(1.3.36)为非线性方程组,将其 Taylor 展开,并线性化(忽略高阶项),则有

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} + \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{d}} \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right) d(\Delta \mathbf{d}) = 0 \quad (1.3.38)$$

将式(1.3.34)代入式(1.3.38),再对 $\Delta \mathbf{d}$ 求偏导,并设

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right)^T = \int_v \gamma \mathbf{b}^T dv + \int_v \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} dv - \int_{s_f} (\bar{\mathbf{F}} + \Delta \bar{\mathbf{F}})^T \mathbf{N} ds \quad (1.3.39)$$

则

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{d}} \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right)^T \quad (1.3.40)$$

式中 $\mathbf{K}^e$ ——单元 e 刚度阵。

考虑到

$$\mathbf{b}^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{Q}), \quad \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial \Delta \mathbf{d}} = \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \Delta \mathbf{d}} \mathbf{B} \quad (1.3.41)$$

而

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \Delta \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{d}} (Q_1, Q_2, \dots, Q_6) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \Delta d_{1x}} & \frac{\partial Q_2}{\partial \Delta d_{1x}} & \dots & \frac{\partial Q_6}{\partial \Delta d_{1x}} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \Delta d_{1y}} & \frac{\partial Q_2}{\partial \Delta d_{1y}} & \dots & \frac{\partial Q_6}{\partial \Delta d_{1y}} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \Delta d_{1z}} & \frac{\partial Q_2}{\partial \Delta d_{1z}} & \dots & \frac{\partial Q_6}{\partial \Delta d_{1z}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \Delta d_{nz}} & \frac{\partial Q_2}{\partial \Delta d_{nz}} & \dots & \frac{\partial Q_6}{\partial \Delta d_{nz}} \end{bmatrix} \quad (1.3.42)$$