应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（第二版·下册）

主　编◎黄玉娟　李爱芹
副主编◎张海燕　刘吉晓　尹金生

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

高等数学

（第二版·下册）

主　编　黄玉娟　李爱芹

副主编　张海燕　刘吉晓　尹金生

·北京·

内容提要

本教材是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革的成果编写而成，并在第一版的基础上进行了修订和完善。本次修订注重联系实际，服务专业课程，增添部分章节内容，并对例题和课后练习题进行了合理的调整与增补，强调了数学思想方法的应用性。

本教材分上、下两册。上册内容包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程。下册内容包括向量代数、空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。

本教材内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当，例题丰富，可读性、应用性强，习题足量，难易适度，简化证明，注重数学知识的应用性，可作为普通高等院校“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 黄玉娟，李爱芹主编. -- 2版
. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2017.8
应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材
ISBN 978-7-5170-5596-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①黄… ②李… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第167305号

书　　名	应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材 高等数学（第二版·下册）　GAODENG SHUXUE
作　　者	主　编　黄玉娟　李爱芹 副主编　张海燕　刘吉晓　尹金生
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印　　刷	三河市龙大印装有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　14.5印张　293千字
版　　次	2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷 2017年8月第2版　2017年8月第1次印刷
印　　数	0001—6000册
定　　价	30.00元

第二版前言

本教材第二版是在第一版的基础上，根据新形势下国家对人才培养改革中教材改革的精神和近几年编者的教学实践经验，进行全面修订而成的。在修订中，我们仍然本着“难度降低、注重实用”的原则，保留了原有教材的系统与风格：

（1）体现应用型本科院校特色，根据理工科各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系。

（2）在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，采用“提出问题－讨论问题－解决问题”的思路，逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣，同时增强学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力。

（3）例题和习题的选择上难易适度、层次分明，大部分章节都配有实际应用问题，并在每一章后面配有复习题，主要是用于锻炼学生对本章知识点的综合应用能力。

（4）每一章最后附加了历史上有杰出贡献的数学家简介。通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家坚韧不拔的追求真理和维护真理的科学精神。

（5）本教材结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。弱化抽象理论的介绍，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材分上、下两册。上册内容包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程。下册内容包括向量代数、空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。

（6）为了能更好地与中学数学衔接，在附录 I 中对三角函数的常用公式做了全面总结，并在附录 II、III、IV 中分别介绍了二阶行列式、三阶行列式、各种类型的不定积分公式、常用的一些平面曲线及其图形，供学生查阅参考。

在修订过程中，我们注意借鉴同类院校的经典系列教材的优点，注重教材改革中的一些成功案例，使得新教材更适合当代大学生人才培养和教学实践的需要，成为适应时代要求又继承传统优点的教材。

为更好地实现与中学数学内容的衔接，上册中对反三角函数的相关内容进行了详细描述；为了保证内容更加系统，将泰勒公式从无穷级数部分分离出，移至微分学的应用模块，单独作为一节内容叙述；增加了积分学中有理函数的积分，

此部分内容重点强调了常用几种有理函数的积分方法。另外，根据现有高等数学课程课时数的要求，对部分内容进行了适当精简和合并；在应用方面，特别是微分方程部分，增加了在科学技术、经济管理等方面的应用型例题和习题。

参加教材第二版修订的有黄玉娟（第4、5章），李爱芹（第1、2、3章），张海燕（第7、8、9章），刘吉晓（第6、10、11章）。全书由黄玉娟、李爱芹、尹金生统稿及审稿，并经多次修改后定稿。在此次修订过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心支持本教材编写、修改工作的教师表示衷心的感谢。

限于编写水平，书中难免有不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2017年5月

目　录

第 7 章

空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数的方法来研究几何问题. 空间解析几何是多元函数微积分的基础. 在研究空间解析几何时，向量代数是一个有力的工具.

本章首先简单介绍向量的概念及向量的线性运算，然后再建立空间直角坐标系，利用坐标讨论向量的运算，并以向量为工具讨论空间解析几何的有关内容.

7.1 向量及其线性运算

7.1.1 向量的概念

在日常生活中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等，这一类量称为**向量**（或**矢量**）.

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（如图 7.1 所示）. 有时也用一个粗体字母或者用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{F}$ 等. 需要特别说明的是，我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**.

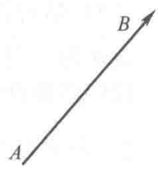

图 7.1

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫作向量的**模**. 用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的模. 特别地，模为1的向量称为**单位向量**. 模为0的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 规定零向量的方向为任意方向.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的夹角**（如图 7.2 所示），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值. 特

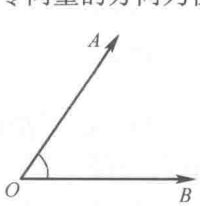

图 7.2

别地，当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或$\pi$时，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**平行**，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$时，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**垂直**，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接$AC$（如图7.3所示），那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**和**，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法叫作向量相加的**三角形法则**.

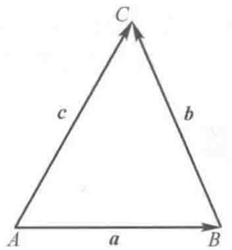

图 7.3

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

设$\boldsymbol{a}$为一向量，与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量叫作$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

2. 向量与数的乘法

向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积是一个向量，记作$\lambda\boldsymbol{a}$，并且规定：它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；它的方向当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反，当$\lambda=0$时为零向量.

向量与数的乘法符合下列运算规律：

（1）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法与数乘向量统称为**向量的线性运算**.

设$\boldsymbol{a}$是一个非零向量，把与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量记为$\boldsymbol{e}_a$，则$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 7.1.1　在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，这里$M$表示平行四边形对角线的交点（如图7.4所示）.

解　因为平行四边形的对角线互相平分，

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即 $$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

由于 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

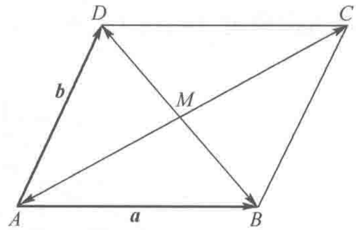

图 7.4

由向量与数的乘法，可以得到两向量平行的充要条件，即有

定理 7.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明略.

定理 7.1.1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此只需给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 Ox（如图 7.5 所示），则对于数轴上任一点 P，对应着一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{e}$，故存在唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

图 7.5

$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}\leftrightarrow 实数\ x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此定义实数 x 为数轴 Ox 上点 P 的坐标.

7.1.3 空间直角坐标系

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组对应起来. 同样，为了把空间中的任一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系.

在空间选定一点 O 作为原点，过原点 O 作三条两两垂直的数轴，分别记为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$（如图 7.6 所示）．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅垂线．它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．

三条坐标轴中每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**，分别记为 xOy 面，yOz 面和 xOz 面．三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**．其中，含有 x 轴，y 轴，z 轴正半轴的卦限称为第Ⅰ卦限，第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定．第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限按逆时针方向确定（如图 7.7 所示）．

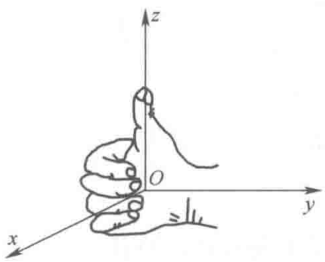

图 7.6

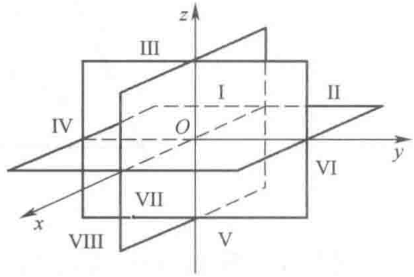

图 7.7

定义了空间直角坐标系后，就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系．设点 M 是空间中任意一点（如图 7.8 所示），过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面，它们与 x 轴，y 轴，z 轴分别交于 P，Q，R 三点．设 P，Q，R 三点在三条坐标轴上的坐标分别为 x，y，z，那么点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)．反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，可依次在 x 轴，y 轴，z 轴上找到坐标分别为 x，y，z 的三点 P，Q，R．过这三点分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面，这三个平面的交点就是有序数组所确定的唯一的点 M．

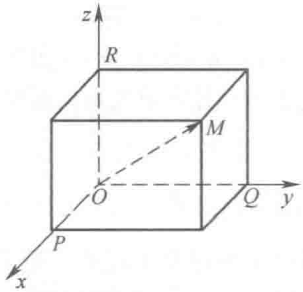

图 7.8

这样，通过空间直角坐标系，在空间中的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系，这组数 x，y，z 称为**点 M 的坐标**，记作 $M(x,y,z)$. 其中 x，y，z 依次称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

坐标轴和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴上的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是其坐标为 $(x,0,0)$. 同理，y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

7.1.4 向量的坐标表示

任意给定空间一向量 $\boldsymbol{r}$，作向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，设点 M 的坐标为 (x,y,z). 过点 M 作垂直于三条坐标轴的平面，与 x 轴，y 轴，z 轴的交点分别为 P，Q，R（如图 7.9 所示）. 由向量的加法法则，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

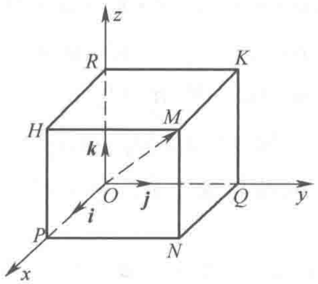

图 7.9

因为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x，y，z 轴正向的单位向量，所以可设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

从而 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**. $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴，y 轴，z 轴方向的**分向量**.

可以看出，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 与 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，从而确定了 x，y，z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x，y，z，也就确定了点 M 与向量 $\boldsymbol{r}$. 于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x，y，z 之间存在一一对应关系，我们称有序数 x，y，z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

如果在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，任意给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

$$= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

即 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的对应坐标.

7.1.5 利用坐标做向量的线性运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，就可以把向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算用坐标来表示.

设
$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z),\quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),$$
即
$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$$
利用向量加法的交换律与结合律以及向量数乘运算的结合律与分配律，有
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}\quad（\lambda \text{ 为实数}）.$$
即
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$
由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由定理 7.1.1，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，利用向量的坐标可得如下等式:
$$b_x = \lambda a_x,\ b_y = \lambda a_y,\ b_z = \lambda a_z,$$
即
$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 7.1.2 已知 $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解 因为
$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$$
$$= 4(3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) + 3(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) - (5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$$
$$= 13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k},$$
因此向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

7.1.6 向量的模与方向余弦

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，作 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$，如图 7.9 所示，有 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$，

由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由于 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，得 $|OP|=|x|$，$|OQ|=|y|$，$|OR|=|z|$，于是**向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$**.

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，即得 A 与 B **两点间的距离**

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 7.1.3 在 y 轴上求一点，使得与 $A(1,-2,1)$ 和 $B(2,1-2)$ 两点的距离相等.

解 因为所求的点在 y 轴上，设该点的坐标为 $M(0,y,0)$，由题意得

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(1-0)^2+(-2-y)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(1-y)^2+(-2-0)^2},$$

解得

$$y=\frac{1}{2},$$

因此所求的点为

$$M\left(0,\frac{1}{2},0\right).$$

例 7.1.4 已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(4,2,6)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

解 由于

$$\overrightarrow{AB}=(3,0,3),$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2},$$

所以

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{(3,0,3)}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1).$$

例 7.1.5 已知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为4，且力 $\boldsymbol{F}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求力 $\boldsymbol{F}$.

解 已知力 $\boldsymbol{F}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，

所以

$$\boldsymbol{e}_F=\pm\boldsymbol{e}_a=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{3}(2,1,-2),$$

又已知 $|\boldsymbol{F}|=4$，故 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\cdot\boldsymbol{e}_F=\pm4\cdot\frac{1}{3}(2,1,-2)=\pm\frac{4}{3}(2,1,-2)$.

2. 方向角与方向余弦

设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**（如图 7.10 所示），称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.