高等院校基础教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计学习指导 第2版

王琼 王世飞 ◎ 主编
何哲飞 李军 张芳 王言芹 ◎ 副主编

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

院校基础教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计学习指导

第2版

王琼 王世飞 ◎ 主编
何哲飞 李军 张芳 王言芹 ◎ 副主编

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导 / 王琼，王世飞主编
. -- 2版. -- 北京 : 人民邮电出版社，2017.8(2017.9重印)
高等院校基础教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-115-45645-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①王… ②王… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第209907号

内容提要

本书是《概率论与数理统计》的配套学习指导书，按主教材章节顺序编排，系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容．主要内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样和抽样分布、参数估计和假设检验．书中通过对各章知识点的梳理，对典型例题的分析解答，帮助学生澄清一些易混淆和易理解错误的概念，使学生熟悉“概率论与数理统计”课程的解题方法和技巧，提高学生分析问题和解决问题的能力．

本书可作为高等院校理工科各专业本科生、研究生的辅导教材或复习参考书，也可作为报考硕士研究生人员的考前强化复习训练指导书．

◆ 主　　编　王　琼　王世飞
副 主 编　何哲飞　李　军　张　芳　王言芹
责任编辑　王亚娜
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12　　　2017 年 8 月第 2 版
字数：328 千字　　　2017 年 9 月河北第 2 次印刷

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

“概率论与数理统计”是研究随机现象统计规律性的数学学科，是高等院校理工科各专业的一门重要基础理论课．作为一门应用数学学科，“概率论与数理统计”不仅理论严谨，应用广泛，更有其独特的概念和方法．将概率论的结果深入地分析、统计，观察某些现象并发现其内在规律性，再加以研究，从而做出相应的判断和预测，然后将这些结果归纳整理得到一定的数学模型，这是数理统计所研究的问题．为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法，更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析、解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了此指导书．

本书参照原国家教委工科数学课程教学指导委员会审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》和近年来《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》的基本要求来编写，与主教材《概率论与数理统计》相配套．本书针对学生在学习过程中经常遇到的诸如对题目的理解、解决问题的思路和方法，以及如何使用公式或理论等问题，精心挑选了一些既符合课程要求，又具有代表性的典型例题，进行了分析和详细的解答，借以展示解决各类问题的一般途径和方法，帮助学生正确理解概率统计思想的实质，达到举一反三的效果．书中对各章知识点分别给出了同步练习，以供学生检查学习效果之用．同时，为满足不同层次读者的需要，本书还挑选了一些历年硕士研究生入学考试试题，借以为有志于报考研究生或提高自己解题能力的学生提供帮助．

本书由王琼、王世飞、何哲飞、李军、张芳、王言芹共同编写，其中，王琼和王世飞任主编．本书在编写过程中，也引用了其他图书中的一些例子，恕不能在此一一指明出处，谨向相关作者表示感谢．

本书的出版得到了常州大学各级领导及同事们的大力支持，特别是学校教材委员会的大力支持，特在此深表谢意．

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请专家、同行和读者批评指正．

编者

2017 年 5 月于江苏常州

目录

第一章

概率论的基本概念

一、基本要求

1．了解随机试验、基本事件空间（样本空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系和运算及其基本性质.

2．理解事件概率、条件概率的概念和独立性的概念；掌握概率的基本性质和基本运算公式；掌握与条件概率有关的三个基本公式（乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式）.

3．掌握计算事件概率的基本计算方法.

（1）概率的直接计算：古典型概率和几何型概率.

（2）概率的推算：利用概率的基本性质、基本公式和事件的独立性，由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

4．理解两个或多个（随机）试验的独立性的概念，理解独立重复试验，特别是伯努利试验的基本特点，以及重复伯努利试验中有关事件概率的计算.

二、知识网络图

随机现象

随机试验

随机事件

- 关系
  - 包含　相等
  - 互斥　独立
- 运算
  - 并（和）
  - 交（积）
  - 差
  - 对立（补）
- 概率
  - 概型
    - 古典概型
    - 几何概型
    - 贝努里概型
  - 公式
    - 加法公式
    - 减法公式
    - 乘法公式
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式

三、内容提要

（一）随机试验、样本空间与随机事件

1. 随机试验：具有以下 3 个特点的试验称为随机试验，记为E.

（1）试验可在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的结果具有多种可能性，但试验之前可确知试验的所有可能结果；

（3）每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间：随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为Ω；试验的每一个可能结果，即Ω中的元素，称为样本点，记为ω.

3. 随机事件：在一定条件下，可能出现也可能不出现的事件称为随机事件，简称事件；也可表述为事件就是样本空间的子集. 必然事件记为Ω，不可能事件记为ϕ.

（二）事件的关系

1. 包含：$A\subset B$，读作“事件B包含A”或“A包含于B”，表示每当A发生时，必导致B发生.

2. 相等：$A=B$，读作“事件A等于B”或“A与B等价”，表示A与B或都发生，或都不发生.

3. 相容：若$AB\neq\phi$，则称事件“A和B相容”；若$AB=\phi$，则称“事件A与B不相容”；

4. 对立事件：称事件A和B互为对立事件，即满足$A+B=\Omega$且$AB=\phi$，即$B=\overline{A}$.

（三）事件的运算

1. 和事件（并）：$A\cup B$或$A+B$，表示事件“A与B至少有一个发生”，称作事件A与B的和或并；一般地，

$$\bigcup_i A_i \quad 或 \quad \sum_i A_i$$

表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$至少有一个发生”.

2. 积事件（交）：AB或$A\cap B$，表示事件“A与B都发生”，称作A与B的交或积；一般地，

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots \quad 或 \quad \bigcap_i A_i$$

表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$都发生”.

3. 差事件：$A-B$，表示事件“A发生但是B不发生”，称作A与B的差，或A减B.

4. 对立事件：称事件A和$\overline{A}$互为对立事件，若$A+\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\phi$，即$\overline{A}$表示$A$不发生.

5. 文氏图：事件的关系和运算可以用所谓文氏图形象地表示出来（见图 1-1，图中的矩形表示必然事件Ω）.

（四）事件的运算法则

对于任意事件 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

1. 交换律 $A+B=B+A,\ AB=BA$.

2. 结合律 $A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$；

$ABC=A(BC)=(AB)C$.

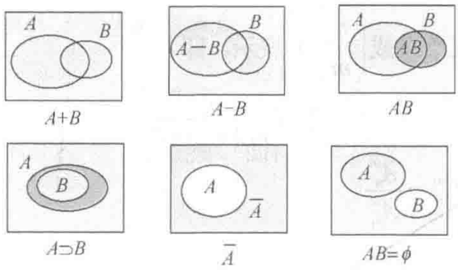

图 1-1 文氏图

3. 分配律 $A(B+C)=AB+AC$；

$$A\left(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots\right)=AA_1+AA_2+\cdots+AA_n+\cdots.$$

4. 对偶律 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n\cdots;$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n\cdots}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n+\cdots.$$

（五）排列组合

1. 加法原理

完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类中的一种方法，这件事就可以完成. 若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，……，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事就有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

2. 乘法原理

若完成一件事有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，……，第 n 步有 m_n 种方法，并且完成这件事必须经过每一步，则完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种方法.

3. 允许重复排列

从 n 个不同元素中，有放回地逐一取出 m 个元素进行排列（简称为可重复排列），共有 n^m 种不同的排列.

4. 不允许重复排列

从 n 个不同元素中，无放回地取出 m 个（$m\leqslant n$）元素进行排列（简称为选排列），共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种不同的排列. 选排列的种数用 A_n^m （或 P_n^m ）表示，即

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

特别地，当 $m=n$ 时的排列（简称为全排列）共有

$$n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

种. 全排列的种数用 A_n（或 A_n^n ）表示，即 $A_n^n=n!$，并规定 $0!=1$.

5. 一般组合

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合（不考虑其先后顺序，简称为一般组合）共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种．一般组合的组合种数用 C_n^m （或$\binom{n}{m}$）表示，即

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

并且规定 $C_n^0 = 1$．不难看出 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$．

6．不同类元素的组合

从不同的 k 类元素中，取出 m 个元素．从第 1 类 n_1 个不同元素中取出 m_1 个，从第 2 类 n_2 个不同的元素中取出 m_2 个，……，从第 k 类 n_k 个不同的元素中取出 m_k 个，并且 $n_i \geqslant m_i > 0(i=1,2,\cdots,k)$（简称为**不同类元素的组合**），共有

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法.

（六）概率的概念

1．频率

若事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$．

2．统计概率

若频率具有稳定性，即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 随 n 的增大越靠近某个常数 p，称 p 为事件 A 的概率．在实际问题中，当 n 很大时，取 $P(A) = p \approx \frac{n_A}{n}$，称之为（统计）概率.

3．概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，如果满足

（1）非负性：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

（2）规范性：$P(\Omega) = 1$；

（3）可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是可列个互不相容事件，有 $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$；

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

4．古典概率

若试验的基本结果数为有限个，且每个事件发生的可能性相等，则（试验所对应的概率模型为古典概型）事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{中所含样本点数}}{\Omega\text{中所含样本点数}} = \frac{m}{n}.$$

5．几何概率

若试验基本结果数无限，随机点落在某区域 G 的概率与区域 G 的度量（长度、面积、体积等）成正比，而与其位置及形状无关，则（试验所对应的概率模型为几何概型）“在区域 Ω 中随机地

取一点落在区域 G 中”这一事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)},$$

其中 $\mu(G)$ 为区域（或区间）G 的度量（如长度、面积、体积等）.

（七）概率的基本性质

1. 规范性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$（特别地 $P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$）.

2. 有限可加性：对于任意有限个两两不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，即 $A_iA_j=\phi\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，有

$$\boldsymbol{P}\left(A_1+A_2+\cdots+A_n\right)=\boldsymbol{P}\left(A_1\right)+\boldsymbol{P}\left(A_2\right)+\cdots+\boldsymbol{P}\left(A_n\right).$$

3. 单调不减性：若事件 $B\supset A$，则 $P(B)\geqslant P(A)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

4. 互逆性：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

5. 加法公式：对任意两事件 A,B，有 $\boldsymbol{P}(A+B)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B)-\boldsymbol{P}(AB)$. 此性质可推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形.

6. 可分性：对任意两事件 A,B，有 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，且

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B).$$

（八）条件概率与乘法公式

1. 条件概率：设 A,B 是两个事件，即 $A,B\in\Omega$，且 $P(A)>0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式：设 $A,B\in\Omega$ 且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

称为事件 A,B 的概率乘法公式.

（九）全概率公式与贝叶斯（Bayes）公式

1. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为 Ω 中的一组事件，若

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\Omega,\ A_iA_j=\phi\ (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots).$$

换句话说，如果有限个或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两不相容，并且“所有事件的和”是必然事件，则称它们构成一个完备事件组.

2. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任何事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),$$

称之为全概率公式.

3. 贝叶斯（Bayes）公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任何事件 B，有

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)},$$

称之为贝叶斯公式或逆概率公式.

（十）事件的独立性和独立试验

1. 事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 和 B 独立；若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之中任意 m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件的交的概率都等于各事件概率的乘积，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

2. 事件的独立性的性质

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则其中

（1）任意 m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件也相互独立；

（2）任意一个事件，与其余任意 m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件运算仍相互独立；

（3）将任意 m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件换成其对立事件后，所得 n 个事件仍相互独立.

3. 独立试验

如果分别与各试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 相联系的任意 n 个事件之间相互独立，则称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为相互独立的.

（1）**独立重复试验**：独立表示“与各试验相联系的事件之间相互独立”，“重复”表示“每个事件在各次试验中出现的概率不变”.

（2）**伯努利试验**：只计“成功”和“失败”两种对立结果的试验，称作**伯努利试验**. 将一伯努利试验独立地重复做 n 次，称作 n 次（n 重）伯努利试验，亦简称伯努利试验. 伯努利试验的特点是：①只有两种对立的结果；②各次试验相互独立；③各次试验成功的概率相同. 设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 重贝努里试验中事件 A 发生 k 次的概率为：

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \, (k=0,1,\cdots,n).$$

（十一）事件概率的计算

（1）直接计算：古典概型和几何概型的概率可直接计算.

（2）用频率估计概率：当 n 充分大时，用 n 次独立重复试验中事件 A 出现的频率，估计在每次试验中事件 A 的概率.

（3）概率的推算：利用概率的性质、基本公式和事件的独立性，由简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

（4）利用概率分布：利用随机变量的概率分布，计算与随机变量相联系的事件的概率（见“第二章 随机变量及其分布”）.

四、典型例题

【例 1.1】 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点.

（1）掷一颗骰子，出现奇数点.

（2）投掷一枚质地均匀的硬币两次：

① 第一次出现正面；

② 两次出现同一面；

③ 至少有一次出现正面.

【分析】 可对照集合的概念来理解样本空间和样本点：样本空间可指全集，样本点是元素，事件则是包含在全集中的子集.

【解】（1）掷一颗骰子，有6种可能结果，如果用“1”表示“出现1点”这个样本点，其余类似，则样本空间为：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，出现奇数点的事件为：$\{1,3,5\}$.

（2）投掷一枚均匀硬币两次，其结果有四种可能，若用（正，反）表示“第一次出现正面，第二次出现反面”这一样本点，其余类似，则样本空间为：$\Omega=\{$（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）$\}$，用 A,B,C 分别表示上述事件①，②，③，则事件 $A=\{$（正，正），（正，反）$\}$；事件 $B=\{$（正，正），（反，反）$\}$；事件 $C=\{$（正，正），（正，反），（反，正）$\}$.

【解毕】

【例 1.2】 以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报．试用 A,B,C 表示以下事件.

（1）只订阅日报；　（2）只订日报和晚报；　（3）只订一种报；

（4）正好订两种报；　（5）至少订阅一种报；　（6）不订阅任何报；

（7）最多订阅一种报；　（8）三种报纸都订阅；　（9）三种报纸不全订阅.

【分析】 利用事件的运算关系及性质来描述事件.

【解】（1）$A\overline{B}\overline{C}$；　（2）$AB\overline{C}$；　（3）$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

（4）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；　（5）$A+B+C$；　（6）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（7）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+\overline{B}\overline{C}$；

（8）ABC；　（9）$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

【解毕】

【例 1.3】 设 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，试就以下四种情况分别求 $P(B\overline{A})$.

（1）$AB=\phi$；　（2）$A\subset B$；　（3）$P(AB)=\dfrac{1}{8}$；　（4）A,B 独立.

【分析】 按概率的性质进行计算.

【解】（1）$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}$；

（2）$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\dfrac{1}{6}$；

（3）$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$；

（4）$P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$.

【解毕】

【例 1.4】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，$P(AB)=0$．求事件 A,B,C 全不发生的概率.

【技巧】 同时利用事件运算的德摩根律及逆事件概率公式，是解概率题中常用的技巧之一.

【解】 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P\left(\overline{A+B+C}\right)=1-P(A+B+C)$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

$$=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right]=\frac{3}{8}.$$

【解毕】

【例 1.5】 一个小孩用 13 个字母 $A,A,A,C,E,H,I,I,M,M,N,T,T$ 作组字游戏. 如果字母的各种排列是随机的（等可能的），问恰好组成“MATHEMATICIAN”一词的概率为多大?

【分析】 此题考查的是古典概型概率的计算.

【解】 显然样本点总数为$13!$，事件A“恰好组成‘MATHEMATICIAN’”包含$3!2!2!2!$个样本点，所以$P(A)=\dfrac{3!2!2!2!}{13!}=\dfrac{48}{13!}$. 【解毕】

【例 1.6】 袋中有α个白球及β个黑球.

（1）从袋中任取$a+b$个球，试求所取的球恰含有a个白球和b个黑球的概率（$a\leqslant\alpha,b\leqslant\beta$）;

（2）从袋中任意地接连取出$k+1$（$k+1\leqslant\alpha+\beta$）个球，如果每球被取出后不放回，试求最后取出的球是白球的概率.

【分析】 这是一个古典概型概率的计算问题.

【解】（1）从$\alpha+\beta$个球中取出$a+b$个球，这种取法总共有$C_{\alpha+\beta}^{a+b}$种.

设$A=\{$恰好取中a个白球和b个黑球$\}$，故A中所含样本总数为$C_{\alpha}^{a}\cdot C_{\beta}^{b}$，从而

$$P(A)=\frac{C_{\alpha}^{a}\cdot C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

（2）从$\alpha+\beta$个球中接连不放回地取出$k+1$个球，由于具有次序，所以应考虑排列问题，因此，共有$A_{\alpha+\beta}^{k+1}$种取法.

设$B=\{$最后取出的球为白球$\}$，则B中所含样本点数可以通过乘法原理来计算：考虑有$k+1$个位子，编号分别为$1,2,\cdots,k,k+1$，将第n次取出的球放入第n号位子. 第$k+1$次取出的球是白球，相当于第$k+1$号位子是白球. 为保证第$k+1$号位子是白球，先从α个白球中任意取一个放入第$k+1$号位子，有α种取法；而其余的k个位子随便放，共有$A_{\alpha+\beta-1}^{k}$种不同的取法（同样要考虑排列）. 因而B中包含地样本点共有$\alpha\cdot A_{\alpha+\beta-1}^{k}$个，故

$$P(B)=\frac{\alpha\cdot A_{\alpha+\beta-1}^{k}}{A_{\alpha+\beta-1}^{k+1}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

【解毕】

【注】 ①从上例知，在计算样本点总数以及事件所含样本点的数目时，必须在同一确定的样本空间中考虑，如果一个考虑了顺序，则另一个也必须按同样的方法考虑顺序.

② 如果我们将“白球”“黑球”换成“合格品”“次品”，等等，就得到各种各样的摸球问题，这就是抽球问题的原型意义所在.

③ 在上例的两个问题中，我们采取的抽样方式实际上都是不放回的抽样，如果我们改用有放回的抽样，即每次摸出球后仍放回袋中，则容易知道

$$P(A)=C_{a+b}^{a}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{a}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{b},$$

$$P(B)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

对第一个问题（即事件A），在“不放回抽样”与“有放回抽样”情形下问题的答案，恰好是我们以后所介绍的“超几何分布”与“二项分布”的实际背景．对第二个问题（即事件B），无论是“不放回抽样”，还是“有放回抽样”，答案都是$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，其结果与$k$无关，此结果说明了日常生活中抓阄、分票的合理性．

【例 1.7】 将n个人等可能地分配到$N(n \leqslant N)$间房中去，试求下列事件的概率．

$A=\{$某指定的n间房中各有一个人$\}$；

$B=\{$恰有n间房，其中各有一人$\}$；

$C=\{$某指定的房中恰有$m(m \leqslant n)$个人$\}$．

【分析】 这是一个典型的古典概型概率的计算问题．

【解】 把n个人等可能地分配到N间房中去，由于并没有限定每一房中的人数，故是一可重复的排列问题，这样的分法共有N^n种．对于事件A，今固定某n间房，第一个人可分配到n间房的任一间，有n种方法；第二个人可分配到余下的$n-1$间房中的任一间，有$n-1$种分法，依次类推，得到A共含有$n!$个样本点，故$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$.

对于事件B，因为n间房没有指定，所以可先在N间房中任意选出n间房（共有C_N^n种选法），然后对于选出来的某n间房，按照上面的分析，可知B共含有$C_N^n \cdot n!$个样本点，从而

$$P(B)=\frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}.$$

对于事件C，由于m个人可自n个人中任意选出，并不是指定的，因此有C_n^m种选法，而其余的$n-m$个人可任意地分配到其余的$N-1$间房中，共有$(N-1)^{n-m}$种分配方法，故C中共含有$C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}$个样本点，因此

$$P(C)=\frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$ **【解毕】**

【注】 可归入“分房问题”处理的古典概型的实际问题非常多，例如下面几类．

① 生日问题：n个人的生日的可能情形，这时$N=365$天$(n \leqslant 365)$．

② 旅客下站问题：一客车上有n名旅客，它在N个站上都停，旅客下站的各种可能情形．

③ 印刷错误问题：n个印刷错误在一本有N页的书中的一切可能的分布（n一般不超过每一页的字符数）．

④ 放球问题：将n个球放入N个盒子的可能情形．

值得注意的是，在处理这类问题时，要分清楚什么是“人”什么是“房”，一般不能颠倒．

【例 1.8】 从$0,1,2,\cdots,9$这 10 个数字中，任意选出 3 个不同的数字，试求下列事件的概率：$A_1=\{$3 个数字中不含 0 和 5$\}$；$A_2=\{$3 个数字中不含 0 或 5$\}$．

【分析】 这是一个古典概率的计算问题，综合运用概率的性质进行计算．

【解】 随机试验是从 10 个数字中任取 3 个数字，故样本空间Ω的样本总数为C_{10}^3.

如果取得的 3 个数字不含 0 和 5，则这 3 个数字必须在其余的 8 个数字中取得，故事件A_1所含的样本点的个数为C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

对事件 A_2，我们引入下列事件：$B_1=\{3$ 个数字中含 0，不含 5$\}$；$B_2=\{3$ 个数字中含 5，不含 0$\}$；$B_3=\{3$ 个数字中既不含 0，又不含 5$\}$．则 $A_2=B_1\cup B_2\cup B_3$ 且 B_1,B_2,B_3 两两互不相容，于是有

$$P(A_2)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$ 【解毕】

【注】① 对事件 A_2 的概率求法，我们还有下列另外两种方法.

（方法 1）利用逆事件进行计算.

若注意到 $\overline{A}_2=\{3$ 个数字中既含有 0 又含 5$\}$，则有

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}.$$

（方法 2）利用加法公式进行计算.

若引入事件：$C_1=\{3$ 个数字中不含 0$\}$；$C_2=\{3$ 个数字中不含 5$\}$．则 $A_2=C_1\cup C_2$，从而有

$$P(A_2)=P(C_1)+P(C_2)-P(C_1C_2)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}$$

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{14}{15}.$$

② 由此例可见，如果能利用事件间的运算关系，将一个较为复杂的事件分解成若干个比较简单的事件的和、差、积等，再利用相应的概率公式，就能比较简便地计算较复杂事件的概率，这种思想方法希望读者熟练掌握.

【例 1.9】 在区间[0,1]中，随机地取出两个数，求两数之和小于 1.2 的概率.

【分析】 本题的难点是把所求问题归结为一个几何概型的问题，这类问题其实在考虑均匀分布的相关概率时是比较常见的，读者可以将它理解成这样一个问题：设 X 与 Y 相互独立，且 X,Y 等可能在区间[0,1]上取值，于是随机点 (X,Y) 等可能落在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上．于是，相当于 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$A=\{(X,Y)\,|\,X+Y<1.2\}\subset\Omega$，虽然题目中没有明确给出“独立性”这一条件，但一般字眼“随机地”除了表示试验结果是等可能的外，还表示了取出的两个数是相互独立的．同时，由于问题所涉及的区域往往是较为规则的几何图形，因此，许多情形下，只须利用初等数学的方法就能求出这些图形的面积.

【解】 设 x,y 为区间[0,1]中随机地取出的两个数，则试验的样本空间

$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，而所求的事件 $A=\{(x,y):(x,y)\in\Omega,x+y<1.2\}$．从而，由几何概率的计算公式知

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times 0.8^2}{1}=0.68.$$ 【解毕】

【例 1.10】 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取 2 件产品中有 1 件不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

【分析】 在已知“所取 2 件产品中有 1 件不合格品”的条件下求“另一件也是不合格品”的概率，所以是条件概率问题．根据公式 $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，必须求出 $P(A),P(AB)$.

【解】 令 $A=$“两件中至少有一件不合格”，$B=$“两件都不合格”，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-P(\overline{A})}=\frac{C_4^2\Big/C_{10}^2}{1-C_6^2\Big/C_{10}^2}=\frac{1}{5}.$$

【解毕】

【例 1.11】 11 个人用轮流抽签的方法，分配 7 张电影票（每张电影票只能分给一个人），试求事件“在第三个人抽中的情况下，第一个人抽中而第二个人没有抽中”的概率.

【分析】 此题考查条件概率的应用.

【解】 设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示“第 i 个人抽中”，则

$$P\left(A_3\right)=\frac{7}{10},$$

$$P\left(A_1\overline{A}_2\mid A_3\right)=\frac{P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right)}{P\left(A_3\right)}=\frac{P\left(A_1\right)P\left(\overline{A}_2\mid A_1\right)P\left(A_3\mid A_1\overline{A}_2\right)}{P\left(A_3\right)}=\frac{\frac{7}{11}\times\frac{3}{10}\times\frac{6}{9}}{\frac{7}{11}}=\frac{1}{5}.$$

【例 1.12】 加工零件需要经过两道工序，第一道工序出现合格品的概率为 0.85，出现次品的概率为 0.15；第一道工序加工出来的合格品，在第二道工序中出现合格品的概率为 0.75，出现次品的概率为 0.25；第一道工序加工出来的次品，在第二道工序中出现次品的概率为 0.65，出现废品的概率为 0.35. 求经过两道工序加工出来的零件是合格品、次品及废品的概率.

【分析】 本题考查加法公式和乘法公式的应用.

【解】 设 $A_i(i=1,2)$ 分别表示第一道工序加工出合格品及次品的事件，$B_i(i=1,2,3)$ 分别表示第二道工序加工出合格品、次品及废品的事件，$C_i(1,2,3)$ 分别表示经两道工序加工出零件为合格品、次品及废品的事件，

则 $P(C_1)=P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)=0.85\times0.75=0.637\,5$,

$P(C_3)=P(A_2B_3)=P(A_2)P(B_3|A_2)=0.15\times0.35=0.052\,5$,

$P(C_2)=1-[P(C_1)+P(C_3)]=0.31$.

另一种解法：

$P(C_2)=P(A_1B_2+A_2B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)=0.85\times0.25+0.15\times0.65=0.31$.

【解毕】

【例 1.13】 设有白球和黑球各 4 只，从中任取 4 只放入甲盒，余下 4 只放入乙盒，然后分别在两盒中各任取一只，颜色正好相同，试问放入甲盒的 4 只球有几只白球的概率最大，且求出此概率.

【分析】 本题应用全概率公式和贝叶斯公式计算.

【解】 设 A={从甲、乙两盒中各取一球，颜色相同}，$B_i=\{$甲盒中有 i 只白球$\}$，$i=0,1,2,3,4$.

显然 $B_0,B_1,\cdots,B_4$ 构成一完备事件组，又由题设知

$$P\left(B_i\right)=\frac{C_4^iC_4^{4-i}}{C_8^4},i=0,1,\cdots,4.$$

且

$$P\left(A\mid B_1\right)=\frac{3}{8},P\left(A\mid B_2\right)=\frac{4}{8},P\left(A\mid B_3\right)=\frac{3}{8},$$

$$P\left(A\mid B_0\right)=P\left(A\mid B_4\right)=0.$$