

# 管理类联考综合能力 —— 数学 —— 套路化攻略

主编：朱杰 | 副主编：吴晶雯 朱媛

- 紧扣大纲，贴近考试
- 科学选题，杜绝题海
- 解题技巧，应试秒杀
- 分层精练，一本高分

## 本书内含：

近6年真题及答案/20年重点真题分类讲解/数学知识点清单/数学必考思维/数学应试技巧/数学经验结论与公式/数学易错点

## 适用专业：

MBA/MPA/MPAcc/审计/工程管理/旅游管理/图书情报

管理类联考综合能力  
—— 数学 ——  
套路化攻略

主编：朱杰 | 副主编：吴晶雯 朱媛

---

图书在版编目(CIP)数据

管理类联考综合能力·数学套路化攻略 / 朱杰主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2016.3  
ISBN 978-7-5682-1988-4

I. ①管… II. ①朱… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 048128 号

---

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京长阳汇文印刷厂

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 21

字 数 / 524 千字

版 次 / 2016 年 3 月第 1 版 2016 年 3 月第 1 次印刷

定 价 / 56.00 元

责任编辑/梁铜华

文案编辑/多海鹏

责任校对/孟祥敬

责任印刷/边心超

## 一、管理类专业学位联考考试介绍

### 1. 概况

管理类专业学位联考(简称管理类联考,包括会计硕士、图书情报硕士、工商管理硕士、公共管理硕士、旅游管理硕士、工程管理硕士和审计硕士等)是专门为未来职场精英设计的选拔性考试,从内容和形式上都类似于国外商学院入学考试(GMAT)。

参加管理类联考的主体对象为 MBA(工商管理硕士)、MPA(公共管理硕士)、MPAcc(会计硕士)等考生,其中 MBA 考生(有工作经验)是最大户(每年 10 多万人报考),这点决定了考试不会很难,对于报考 MPAcc 等应届生来说,得高分是必须的。

### 2. 考试形式

考试分两张试卷进行,综合能力试卷和英语试卷。

(1)综合能力试卷(满分 200 分,180 分钟)由下列三个部分组成。

数学基础:75 分,25 题,用时 60~75 分钟。

逻辑推理:60 分,30 题,用时 50~60 分钟。

写作:65 分,2 篇(约 1 300 字),用时 50~60 分钟。

特别注意:综合能力试卷时间紧、内容多、强度大,例如,数学基础部分一共 25 题,每题用时在 2 分 42 秒至 3 分钟之间;逻辑推理部分文字的阅读量也比较大,思维要求高;写作部分更要求思维流畅、奋笔疾书。

(2)英语试卷考查的是英语二,难度在四六级之间,没有听力。

### 3. 学生分类指导

(1)应届生。

主要对象是报考 MPAcc、审计硕士的考生。众所周知,管理类联考不考高数、政治,考试初试只考综合能力与英语,所以受到不少学生的青睐,但是我们也要提醒各位应届生:

①MPAcc、审计硕士等现在也很热门,考生人数每年都在激增;

②初试两张试卷总得分往往至少在 220 分才有复试的机会,门槛绝对不低;

③能不能顺利通过复试,还取决于专业课的成绩,初试与专业课成绩一般各占 50%,所以一定要重视专业课的复试。

(2)非应届生。

主要对象是报考 MBA 的考生,该类考生往往要先参加各个高校的提前面试,如果是“三好学生”(笔者认为是出身背景好、工作收入好、面试表现好),通过提前面试拿到比较

好的成绩,那笔试往往只要过国家最低线即可.

二、管理类专业学位联考数学试题概况

1.数学考查内容

综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力,通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试.

我们教学重视如下三要素:

- ★基本计算;
- ★核心知识点(考点)及其普适性解法;
- ★实用解题技巧及使用条件.

2. 数学考点分析(重点、难点)

管理类联考历年真题知识点分布表

单位:分

| 模块                    | (一)算数<br>【14.1%】 |      |      |        | (二)代数<br>【29.1%】 |        |      |      |      |       | (三)几何<br>【21.8%】 |        |       | (四)数据分析<br>【17.9%】 |      |      | (五)应用题<br>【17.1%】 |
|-----------------------|------------------|------|------|--------|------------------|--------|------|------|------|-------|------------------|--------|-------|--------------------|------|------|-------------------|
| 知<br>识<br>年<br>份<br>点 | 整数               | 实数   | 比与比例 | 数轴与绝对值 | 整式               | 分式及其运算 | 函数   | 代数方程 | 不等式  | 数列    | 平面图形             | 平面解析几何 | 空间几何体 | 计数原理               | 概率   | 数据描述 | 应用题               |
| 2016 年                | 3                |      | 3    |        |                  |        | 4.5  | 3    | 4.5  | 6     | 9                | 6      | 6     | 6                  | 6    | 6    | 12                |
| 2015 年                | 1.5              |      | 3    | 3      |                  | 3      | 1.5  | 3    | 7.5  | 10.5  | 6                | 7.5    | 4.5   | 3                  | 6    | 3    | 12                |
| 2014 年在职              | 7.5              |      | 3    |        | 3                |        |      | 6    | 7.5  | 7.5   | 13.5             | 9      | 3     | 6                  | 4.5  | 1.5  | 3                 |
| 2014 年                | 3                |      |      |        |                  | 3      | 3    | 3    | 3    | 6     | 9                | 9      | 6     | 3                  | 9    | 6    | 12                |
| 2013 年在职              | 3                |      | 3    | 3      |                  |        | 3    | 4.5  | 6    | 7.5   | 6                | 6      |       | 3                  | 6    | 3    | 21                |
| 2013 年                | 3                |      | 6    | 3      |                  | 3      | 6    | 3    | 3    | 6     | 7.5              | 4.5    | 3     | 9                  | 6    | 3    | 9                 |
| 2012 年在职              |                  |      | 12   | 4.5    |                  |        | 6    | 1.5  | 3    | 9     | 9                | 6      |       | 3                  | 9    |      | 12                |
| 2012 年                | 3                |      |      |        | 3                |        | 4.5  | 3    | 7.5  | 4.5   | 7.5              | 4.5    | 3     | 6                  | 12   | 3    | 13.5              |
| 2011 年在职              |                  |      | 3    | 3      | 3                |        |      | 6    | 3    | 9     | 7.5              | 7.5    |       | 3                  | 6    | 3    | 21                |
| 2011 年                |                  | 7.5  | 3    |        |                  | 3      |      | 1.5  | 3    | 9     | 7.5              | 6      | 3     | 6                  | 6    | 6    | 13.5              |
| 2010 年在职              | 3                | 3    | 1.5  |        | 3                | 3      |      | 8.5  | 1    | 9     | 4.5              | 16     | /     | 4.5                | 6    | 3    | 9                 |
| 2010 年                | 6                |      | 4.5  | 3      | 3                |        | 0.75 |      | 6.75 | 9     | 7.5              | 1.5    | /     | 3                  | 9    |      | 21                |
| 2009 年在职              | 3                | 7.5  |      | 6      | 3                |        | 1.5  | 9    | 3    | 6     | 3                | 9      | /     | 3                  | 4.5  | 1.5  | 15                |
| 2009 年                |                  | 7    | 4.5  | 4      |                  | 4      | 3    | 6    | 4    | 11.5  | 3                | 9      | /     | 3                  | 4.5  |      | 11.5              |
| 2008 年在职              | 2                | 7    |      | 10     | 2                | 3      |      | 7    | 3    | 7     | 9                | 5.5    | /     | 5                  | 3.5  | 3    | 8                 |
| 2008 年                |                  | 1.5  | 2    | 4      |                  |        | 2    | 3.5  | 6    | 8     | 5.5              | 15.5   | /     | 5                  | 8    |      | 14                |
| 2007 年在职              | 2                |      | 8    | 6      | 3                |        | 3    | 5    | 8    | 8     | 5                | 8      | /     | 3                  | 4    | 2    | 10                |
| 百分比                   | 3.1%             | 2.7% | 4.4% | 3.9%   | 1.8%             | 1.7%   | 3.0% | 5.8% | 6.3% | 10.5% | 9.4%             | 10.2%  | 2.2%  | 5.8%               | 8.6% | 3.5% | 17.1%             |

说明:

(1)管理类联考数学试题强调综合,一个试题往往会考查2~4个知识点,所以我们在进行知识点统计的时候,如果一个3分的试题考查了两个知识点,那每个知识点就是1.5分,如果考查了3个知识点,那每个知识点就是1分,以此类推.我们认为这样的知识点分类是最科学的.

(2)从上表可以看出管理类联考数学的重点内容:应用题、平面解析几何、数列、计数原理、概率、平面图形、代数方程、不等式.

(3)根据我们的教学经验,数学的难点:应用题、计数原理(排列组合)、概率.

### 3. 数学试题特点

(1)内容特点:初等数学(小学、初中、高中为主).

起点低,内容浅显;知识点由单一转为复合.

(2)题型特点:都是客观选择题,且计算量不会太大.

只看结果,不看过程;不但要会做,还要会挑选项.

(3)要求特点:时间紧,强度大.

灵活度高,技巧性强;会做但时间不够(普适性方法),还要会“秒杀”(实用解题技巧).

### 4. 数学复习要点

(1)数学题目一定要自己动手做.

从我们多年的教学经验来看,数学能得高分的考生一定是在理解的基础上脚踏实地一步一步自己动手计算的学生.大家切忌“眼高手低”,感觉自己理解了,但是做的时候又计算不出结果.

(2)数学复习一定要做一定量符合考试难度的题,而且要掐着时间做.

首先,数学复习每个阶段都要坚持做题.数学解题不但帮你复习了基本概念、基本定理,还用到了基本解法,更加离不开基本计算,所以数学解题是一个综合的过程.著名数学家华罗庚曾说过:“学数学不做题犹如入宝山而空返.”这说明了数学解题的重要性.

其次,纵观近几年管理类联考的真题,都是从思维层面考查学生的数学能力,所以我们要做题,更加要做贴近考试难度的题.笔者不赞同把管理类联考数学简单化(认为简单)、技巧化(认为技巧可以解决所有题目),更加不赞同选题奥数化(给学生做小学奥数题).

再次,管理类联考数学要求不但要会做,而且要做得快.因此,本书习题都设计为试卷形式(25题),希望考生平时做题时要对速度有一定的要求.

(3)数学复习要循序渐进.

自己安排复习进度,需要循序渐进地学习,我们建议大家分三个阶段来学习:

基础普及阶段(3~6月):数学知识点普及,过运算关,对应本书基础篇;

系统强化阶段(7~11月):数学考点归纳分类详解,对应本书强化篇;

模考串讲阶段(11~12月):实战演练,技巧秘训,过速度关,对应本书冲刺篇.

(4)数学复习最好的资料就是历年真题.

管理类联考从 1997 年 MBA 考试开始到现在,考试大纲要求的初等数学部分内容没有大的变化.笔者认为能考查的考点已经都考过了,每年最多出现 3 个有新意的考点,绝大多数题目还是老知识点换新脸,所以历年真题极其重要.因此,本书基础篇、强化篇、冲刺篇均采用典型真题作为例子进行细致分析,而且,专门设有真题篇以供学生自测.

### 三、本书特点

笔者从事管理类联考数学辅导工作多年,一直在教学一线,辅导了几万考生,培养出多名状元,对各类考生情况都很熟悉,本书是笔者多年教学经验的总结,有以下几个特点.

★紧扣大纲,贴近考试:本书严格按照最新大纲编写,难度贴近考试;

★科学选题,杜绝题海:笔者对考试的难度有精准的把握,科学选题、杜绝题海;

★解题技巧,应试秒杀:冲刺篇很多练习题后附有解题技巧,不但要会做,而且还要会“秒杀”;

★分层精练,一本高分:根据教学经验分层次按套卷设计练习,希望考生注意解题速度.

作者新浪微博:@考研数学朱杰老师 <http://weibo.com/eijuhz>

朱杰

CONTENTS

# 目录

## 基础篇

|                  |      |
|------------------|------|
| 预备知识 .....       | (3)  |
| 第1章 算 术 .....    | (5)  |
| 1.1 命题规律分析 ..... | (5)  |
| 1.2 考点精析 .....   | (6)  |
| 1.3 巩固练习 .....   | (14) |
| 答案与解析 .....      | (16) |
| 第2章 代数式和函数 ..... | (19) |
| 2.1 命题规律分析 ..... | (19) |
| 2.2 考点精析 .....   | (20) |
| 2.3 巩固练习 .....   | (26) |
| 答案与解析 .....      | (28) |
| 第3章 方程和不等式 ..... | (31) |
| 3.1 命题规律分析 ..... | (31) |
| 3.2 考点精析 .....   | (32) |
| 3.3 巩固练习 .....   | (40) |
| 答案与解析 .....      | (42) |
| 第4章 数 列 .....    | (45) |
| 4.1 命题规律分析 ..... | (45) |
| 4.2 考点精析 .....   | (45) |
| 4.3 巩固练习 .....   | (49) |
| 答案与解析 .....      | (51) |
| 第5章 几 何 .....    | (54) |
| 5.1 命题规律分析 ..... | (54) |
| 5.2 考点精析 .....   | (55) |
| 5.3 巩固练习 .....   | (63) |
| 答案与解析 .....      | (67) |
| 第6章 数据分析 .....   | (72) |
| 6.1 命题规律分析 ..... | (72) |

|                      |             |
|----------------------|-------------|
| 6.2 考点精析 .....       | (73)        |
| 6.3 巩固练习 .....       | (87)        |
| 答案与解析 .....          | (88)        |
| <b>第7章 应用题 .....</b> | <b>(91)</b> |
| 7.1 命题规律分析 .....     | (91)        |
| 7.2 考点精析 .....       | (92)        |
| 7.3 巩固练习 .....       | (106)       |
| 答案与解析 .....          | (108)       |

## 强化篇

|                         |              |
|-------------------------|--------------|
| <b>第1章 算 术 .....</b>    | <b>(113)</b> |
| 1.1 考点、方法点睛 .....       | (113)        |
| 1.2 强化巩固练习 .....        | (129)        |
| 答案与解析 .....             | (131)        |
| <b>第2章 代数式和函数 .....</b> | <b>(134)</b> |
| 2.1 考点、方法点睛 .....       | (134)        |
| 2.2 强化巩固练习 .....        | (144)        |
| 答案与解析 .....             | (146)        |
| <b>第3章 方程和不等式 .....</b> | <b>(150)</b> |
| 3.1 考点、方法点睛 .....       | (150)        |
| 3.2 强化巩固练习 .....        | (161)        |
| 答案与解析 .....             | (163)        |
| <b>第4章 数 列 .....</b>    | <b>(167)</b> |
| 4.1 考点、方法点睛 .....       | (167)        |
| 4.2 强化巩固练习 .....        | (176)        |
| 答案与解析 .....             | (178)        |
| <b>第5章 几 何 .....</b>    | <b>(182)</b> |
| 5.1 考点、方法点睛 .....       | (182)        |
| 5.2 强化巩固练习 .....        | (202)        |
| 答案与解析 .....             | (205)        |
| <b>第6章 数据分析 .....</b>   | <b>(209)</b> |
| 6.1 考点、方法点睛 .....       | (209)        |
| 6.2 强化巩固练习 .....        | (231)        |
| 答案与解析 .....             | (233)        |
| <b>第7章 应用题 .....</b>    | <b>(236)</b> |
| 7.1 考点、方法点睛 .....       | (236)        |
| 7.2 强化巩固练习 .....        | (251)        |

|             |       |
|-------------|-------|
| 答案与解析 ..... | (253) |
|-------------|-------|

## 冲刺篇

|                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| <b>第1章 管理类联考数学知识点清单 .....</b>       | <b>(259)</b> |
| 1.1 算 术 .....                       | (259)        |
| 1.2 代 数 .....                       | (259)        |
| 1.3 几 何 .....                       | (260)        |
| 1.4 数据分析 .....                      | (261)        |
| 1.5 应用题专题 .....                     | (261)        |
| <b>第2章 管理类联考数学必考思维 .....</b>        | <b>(263)</b> |
| 2.1 穷举归纳法 .....                     | (263)        |
| 2.2 分类讨论法 .....                     | (265)        |
| 2.3 数形结合法 .....                     | (266)        |
| 2.4 逻辑推理法 .....                     | (269)        |
| <b>第3章 两种选择题做题技巧 .....</b>          | <b>(271)</b> |
| 3.1 特值代入法 .....                     | (271)        |
| 3.2 反向验证法 .....                     | (273)        |
| <b>第4章 应试快速蒙猜法 .....</b>            | <b>(277)</b> |
| 4.1 几何蒙猜技巧——有图有真相,直接丈量法 .....       | (277)        |
| 4.2 选项结构蒙猜技巧——根据选项特征选答案 .....       | (278)        |
| 4.3 条件充分性判断蒙猜技巧 .....               | (281)        |
| <b>第5章 管理类专业学位联考数学经验结论与公式 .....</b> | <b>(286)</b> |
| 5.1 算 数 .....                       | (286)        |
| 5.2 代 数 .....                       | (288)        |
| 5.3 几 何 .....                       | (292)        |
| 5.4 数据分析 .....                      | (296)        |
| 5.5 应用题 .....                       | (298)        |
| <b>第6章 管理类联考数学易错点(陷阱) .....</b>     | <b>(302)</b> |

## 真题篇

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 2011 年管理类联考数学真题 ..... | (309) |
| 2012 年管理类联考数学真题 ..... | (312) |
| 2013 年管理类联考数学真题 ..... | (315) |
| 2014 年管理类联考数学真题 ..... | (318) |
| 2015 年管理类联考数学真题 ..... | (321) |
| 2016 年管理类联考数学真题 ..... | (324) |



# 基础篇

---





# 预备知识

## 一、数学基础考查目标

管理类专业学位联考综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力,以及运用所学知识分析问题和解决问题的能力,通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试.

## 二、数学基础考试形式

考试答题方式为闭卷、笔试,不允许使用计算器.

## 三、数学基础试卷结构

数学基础共 25 道题,满分 75 分,有两种考查形式:

第一种是问题求解,有 15 道小题,每道小题 3 分,共 45 分;

第二种是条件充分性判断,有 10 道小题,每道小题 3 分,共 30 分.

## 四、数学基础解题说明

两种考查形式说明如下:

(一) 问题求解(本题在试卷中为第 1~15 小题,每小题 3 分,共 45 分)

联考中的问题求解题型是我们大家非常熟悉的一般选择题,即要求考生从 5 个所列选项(A)、(B)、(C)、(D)、(E) 中选择一个符合题干要求的选项,该题型属于单项选择题,有且只有一个正确选项.

该题型有直接解法(根据题干条件推出结论)和间接解法(由结论判断题干是否成立)两种解法方法.下面举例说明:

**范例 1** 方程  $|x - |2x + 1|| = 4$  的根是( ).

(A)  $x = -5$  或  $x = 1$

(B)  $x = 5$  或  $x = -1$

(C)  $x = 3$  或  $x = -\frac{5}{3}$

(D)  $x = -3$  或  $x = \frac{5}{3}$

(E) 不存在

**方法 1** 原方程等价于  $x - |2x + 1| = 4$  或  $x - |2x + 1| = -4$ ,

即 
$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0, \\ x - 2x - 1 = 4, \end{cases} \begin{cases} 2x + 1 < 0, \\ x + 2x + 1 = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x + 1 \geq 0, \\ x - 2x - 1 = -4, \end{cases} \begin{cases} 2x + 1 < 0, \\ x + 2x + 1 = -4. \end{cases}$$

前两组无解,从后两组可解出  $x = 3$  或  $x = -\frac{5}{3}$ ,所以选(C).

**方法 2** 将  $x = -5$  代入等式左边,  $|x - |2x + 1|| = 14 \neq 4$ ,所以(A) 不正确.同理可得(B)、(D)、(E) 也不正确.故只有(C) 正确.

方法 1 从题干出发,逐步导出结论,属于直接解法.方法 2 是排除不符合题干条件的选项,从而

确定正确选项,属于间接法。

## (二) 条件充分性判断(本题在试卷中为第 16 ~ 25 小题,每小题 3 分,共 30 分)

本大题要求考生判断所给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论(不必考虑条件是否必要)。(A)、(B)、(C)、(D)、(E)五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断。

(A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分。

(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分。

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但是条件(1)和(2)联合起来充分。

(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分。

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分,联合起来也不充分。

这类问题是结论明确,反问需要什么数学条件可以推出已给的结论,进一步说明:

(1) 充分性:

逻辑角度:如果条件  $A$  成立,能推出结论  $B$  成立,即  $A \Rightarrow B$ ,则称  $A$  是  $B$  的充分条件。

集合角度:  $A \subseteq B$  ( $A$  是  $B$  的子集)。

(2) 题目的设计:

【题例】题干(结论)

(1) 条件一

(2) 条件二

(3) 选项理解:

| 条件(1) | 条件(2) | 联合(交集) | 答案  |
|-------|-------|--------|-----|
| √     | ×     |        | (A) |
| ×     | √     |        | (B) |
| ×     | ×     | √      | (C) |
| √     | √     |        | (D) |
| ×     | ×     | ×      | (E) |

(4) 解题策略:

永远是从条件推结论,但可以将条件或者结论做等价化简。

解题策略 1: 如果条件是等号,则直接代入结论判断是否成立;

解题策略 2: 如果条件是范围,则看条件范围是否落入结论的范围;

解题策略 3: 可找特殊值证伪,一点即可说明不充分。

**范例 2**  $x$  满足不等式  $x^2 - 5x + 4 < 0$ 。

(1)  $x = 2$ ; (2)  $x = 0$ 。选(A)。

(1)  $x > 2$ ; (2)  $x = 2$ 。选(B)。

(1)  $x = 2$ ; (2)  $x = 3$ 。选(D)。

(1)  $x > 2$ ; (2)  $x < 4$ 。选(C)。

(1)  $x > 2$ ; (2)  $x \leq 4$ 。选(E)。

# 第1章 算 术

## 1.1 命题规律分析

### 1.1.1 本章考纲内容

#### 1.整数

(1) 整数及其运算 (2) 整除、公倍数、公约数 (3) 奇数、偶数 (4) 质数、合数

#### 2.分数、小数、百分数

#### 3.比与比例

#### 4.数轴与绝对值

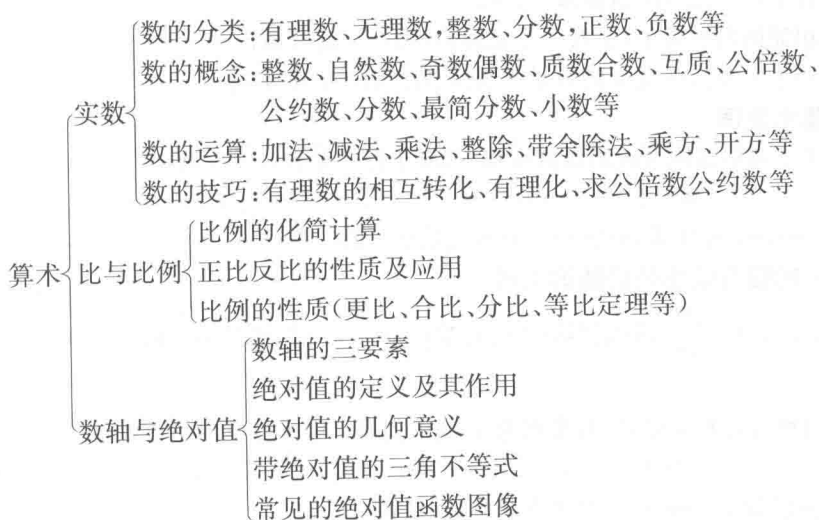
### 1.1.2 本章考情分析

整数、分数、小数、百分数不是常考考点,比与比例问题一般以应用题的形式出现,每年必考,数轴与绝对值是考试的热点.

本章命题主要体现在以下几个方面:

- (1) 概念性题目:主要围绕奇数偶数、质数合数、公倍数、公约数、有理数无理数区别.
- (2) 计算型题目:主要围绕实数化简计算及比例定理的应用、无理数开方、无理数分母有理化.
- (3) 利用绝对值的零点分段定义或者几何意义进行化简的计算.

### 1.1.3 本章知识框架图



## 1.2 考点精析

## 1.2.1 整数

## 1.重要的数

$$(1) \text{ 整数 } \begin{cases} \text{偶数}, 2n, \\ \text{奇数}, 2n+1 \end{cases} (n \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \text{ 正整数 } \begin{cases} 1, \\ \text{质数(也称为素数,它只有1和自身两个约数)}, \\ \text{合数(有除1和自身以外的约数)}. \end{cases}$$

(3) 最小的自然数为0,最小的质数为2,最小的合数为4,1既不是质数也不是合数.

(4) 奇数 $\pm$ 奇数=偶数,偶数 $\pm$ 偶数=偶数,奇数 $\pm$ 偶数=奇数;

奇数 $\times$ 奇数=奇数,奇数 $\times$ 偶数=偶数,偶数 $\times$ 偶数=偶数.

(5) 奇数个奇数的和差是奇数,偶数个奇数的和差是偶数;奇数的正整数次幂是奇数,偶数的正整数次幂是偶数;任意两个连续正整数的和是奇数,积是偶数.

## 2.整数的带余除法定理

(1) 整数的带余除法:设 $a, b$ 是两个整数,其中 $b > 0$ ,则存在整数 $q, r$ 使得

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

成立,而且 $q, r$ 都是唯一的. $q$ 叫做 $a$ 被 $b$ 除所得的不完全商, $r$ 叫做 $a$ 被 $b$ 除所得的余数.

**注意:**若 $b > 0$ ,则 $b \mid a$ 的充要条件是带余除法中余数 $r = 0$ .

## (2) 整数整除的特征

① 0能被任意非零自然数整除;

② 能被2整除的数,个位数字是0,2,4,6,8;

③ 各位数字之和能被3(或9)整除的数必能被3(或9)整除;

④ 末两位数能被4整除的数必能被4整除;

⑤ 末位数字是0或5的数能被5整除;

⑥ 两个相邻的自然数中,必有一个是偶数,另一个是奇数;

⑦ 任意一个正整数的最小约数是1,最大的约数是它的本身.

## 3.算数基本定理

任一大于1的整数能写成质数的乘积,即对于任一整数 $a > 1$ 有

$$a = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_n (P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_n \leq a),$$

其中, $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是质数,且这样的分解式是唯一的.

## 4.最大公约数与最小公倍数的关系

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}, \text{ 特别当最大公约数}(a, b) = 1 \text{ 时, 则最小公倍数}[a, b] = ab.$$

**例1** 当整数 $n$ 被6除时,其余数为3,则下列哪一项不是6的倍数( ).

(A)  $n-3$

(B)  $n+3$

(C)  $2n$

(D)  $3n$

(E)  $4n$

**【解析】**由已知 $n = 6k + 3$ ,这里 $k$ 是整数,从而

$$n-3 = 6k+3-3 = 6k, n+3 = 6k+3+3 = 6(k+1),$$

$$2n = 2(6k+3) = 12k+6 = 6(2k+1), 4n = 4(6k+3) = 6(4k+2),$$

即  $n-3, n+3, 2n, 4n$  都是6的倍数.

而  $3n=3(6k+3)=6(3k+1)+3$ , 其余数  $r=3$ , 即  $3n$  不是6的倍数.

答案是(D).

**例2** 已知  $3a^2+2a+5$  是一个偶数, 那么整数  $a$  一定是( ).

(A) 奇数 (B) 偶数 (C) 任意数 (D) 0 (E) 质数

**【解析】** $3a^2+2a+5$  是偶数, 又  $2a$  一定是偶数, 故  $3a^2+5$  也必须是偶数, 即  $3a^2$  应是奇数, 选(A).

**例3** 三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足6岁), 他们的年龄都是质数(素数), 且依次相差6岁, 他们的年龄之和为( ).

(A) 21 (B) 27 (C) 33 (D) 39 (E) 51

**【解析】**年龄不足6岁, 其年龄只能是2, 3, 5, 则年龄组合有三种可能:

(1) 2, 8, 14; (2) 3, 9, 15; (3) 5, 11, 17.

只有情况(3)全是质数, 所以年龄之和为  $5+11+17=33$ . 答案是(C).

**【评注】**注意 1, 7, 13 不是满足题目条件的一组数, 因为 1 不是质数.

**例4** 已知  $p, q$  都是质数, 以  $x$  为未知数的方程  $px^2+5q=97$  的根是1, 则  $40p+101q+4$  的值等于( ).

(A) 2 003 (B) 2 004 (C) 2 005 (D) 2 006 (E) 2 007

**【解析】**将  $x=1$  代入方程, 得  $p+5q=97$  为奇数, 于是  $p$  和  $5q$  中一定有一个是奇数, 有一个是偶数, 又由于  $p, q$  都是质数, 所以  $p, q$  中必有一个等于2.

若  $q=2$ , 则  $p=87$  为合数, 不合题意; 若  $p=2$ , 则  $q=19$ , 符合题意.

将  $p=2, q=19$  代入  $40p+101q+4$  中得  $40 \times 2 + 101 \times 19 + 4 = 2\,003$ .

故本题应选(A).

**【评注】**两个质数之和为奇数, 则其中一个质数必定为2.

**例5**  $(a, b)=30, [a, b]=18\,900$ .

(1)  $a=2\,100, b=270$ ;

(2)  $a=140, b=810$ .

**【解析】**由条件(1),  $a=2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7, b=2 \times 3 \times 5 \times 9$ , 从而知

$$(a, b)=2 \times 3 \times 5=30, [a, b]=2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 9=18\,900,$$

条件(1)是充分的.

由条件(2),  $a=2 \times 2 \times 5 \times 7, b=2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ , 从而知

$$(a, b)=2 \times 5=10, [a, b]=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7=11\,340,$$

条件(2)不充分. 答案是(A).

**【评注】**以上利用质因数分解求最大公约数、最小公倍数是最标准的解法, 此外我们还可以用短除法快速求解最大公约数与最小公倍数.

**例6** 从1到120的自然数中, 能被3整除或被5整除的数的个数是( ).

(A) 64 (B) 48 (C) 56 (D) 46 (E) 72

**【解析】**120以内的自然数中能被3整除的数可表示为  $3k, k=1, 2, \dots, 40$ . 能被5整除的数可表示为  $5k, k=1, 2, \dots, 24$ . 3和5的最小公倍数  $[3, 5]=15$ , 既能被3整除, 又能被5整除的数一定是15