普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习指导

李丹 鲍勇 等编

HIGHER MATHEMATICS

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习指导

李 丹 鲍 勇 等编

机 械 工 业 出 版 社

编者根据教育部关于高等数学课程教学的基本要求及硕士研究生入学考试的数学教学大纲，融学习指导和考研为一体编写了这本学习指导用书。本书每章内容由五部分组成：基本要求与知识结构、典型例题解析、考研真题解析、模拟自测练习与参考答案。

本书适合作为理工类各专业大学生学习高等数学或微积分的参考书，也可作为报考硕士研究生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/李丹等编．—北京：机械工业出版社，2017.8
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-57857-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 209898 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　任正一
封面设计：鞠　杨　责任校对：刘　岚
责任印制：常天培
唐山三艺印务有限公司印刷
2017 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 18.75 印张 · 456 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-57857-4
定价：45.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金　书　网：www.golden-book.com

Preface

前　言

高等数学是理工、经管类本科各专业学生的一门必修的重要基础理论课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助在校的大学生及准备考研的人员学好高等数学，扩大课堂信息量，提高应试能力，编者根据教育部关于高等数学课程教学的基本要求及硕士研究生入学考试的数学教学大纲，融学习指导和考研为一体编写了这本学习指导用书。

本书每章内容由四部分组成：基本要求与知识结构、典型例题解析、考研真题解析、模拟自测练习与参考答案。

基本要求与知识结构　该部分列出了每章应掌握的基本概念，突出了必须掌握的知识点，给出了重点与难点。

典型例题解析　精选了具有代表性的题目，给出详细解答，以帮助读者理清解题思路，掌握基本解题方法和技巧，旨在提高读者的解题能力、分析能力；解题前的分析和解题后的方法总结，可以使读者收到举一反三、融会贯通之功效。

考研真题解析　精选了历年研究生入学考试的真题并进行分析与解析，旨在帮助读者了解历年研究生入学考试的知识范围和题型结构；清楚入学考试的试题与科学的思维方式、熟练的解题技巧及涉及知识的使用意识之间的密切关系。

模拟自测练习与参考答案　每章后的模拟自测练习，旨在帮助读者对每章内容有了全面了解之后，给读者一个自我检测、巩固所学知识的机会，从而使读者对各种题型有更深刻的理解，并进一步掌握所学知识点，做到能灵活运用。为了方便读者自我检测，每章的模拟自测练习均给出了较详细的参考解答。

本书由李丹、鲍勇、秦琳、张艳君、路云编写。北京科技大学范玉姝教授对全书做了认真的审阅，并提出了许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，不足之处在所难免，敬请读者不吝指正，以便不断完善。

编　者

Contents

目　　录

第五章 定 积 分

第六章 定积分应用

第七章 常微分方程

第八章 向量代数与空间解析几何

第九章 多元函数微分法及其应用

第十章 重 积 分

第十一章　曲线积分与曲面积分

第十二章　无穷级数

参考文献

第一章

函数与极限

基本要求与知识结构

基本要求

(1) 理解函数、函数的图像、函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性等概念及性质，掌握函数的表示法，并会建立应用问题中的函数关系．

(2) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

(3) 了解初等函数的概念，掌握基本初等函数的性质及图像．

(4) 理解数列极限的概念，掌握数列极限的性质及四则运算法则．

(5) 了解单调有界数列必有极限的准则，了解数列极限的夹逼准则．

(6) 理解函数极限的概念（含自变量趋于有限值和无穷大时的极限及单侧极限）．

(7) 掌握函数极限的性质及四则运算法则，掌握利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求解极限的方法．

(8) 会求曲线的水平、垂直和斜渐近线．

(9) 理解无穷小和无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．

(10) 理解函数连续性的概念，会判别间断点的类型．

(11) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质，并能简单应用这些性质．

知识结构

- 函数
  - 定义及性质
    - 函数的定义
    - 性质：单调性、奇偶性、周期性、有界性
    - 分段函数、隐函数、初等函数、反函数及复合函数的定义
  - 连续与间断
    - 连续定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
    - 间断点
      - 第一类
        - 可去：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$
        - 跳跃：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$
      - 第二类：左右极限至少有一个不存在
  - 闭区间上连续函数的性质：最值定理、零点定理、介值定理

- 极限
  - 定义
    - 数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$
    - 函数极限
      - 自变量趋于有限值时的极限
      - 自变量趋于无穷大时的极限
    - 性质：唯一性，有界性，保号性，保序性
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、幂指函数运算
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - 洛必达法则、泰勒公式
      - 两个重要极限、等价无穷小因子替换
    - 无穷小量与无穷大量
      - 定义及关系
      - 无穷小的性质与阶

典型例题解析

例 1 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且当 $y=1$ 时，$z=x$. 求 $f(x)$.

【分析】 此题考查影响函数的两个要素：定义域及值域，它与自变量选用什么符号表示没有关系．只需做变量代换．

【解】 由 $y=1$ 时 $z=x$，代入 z 的表达式可得 $x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$，

即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$. 令 $u=\sqrt[3]{x}-1$，则 $x=(u+1)^3$，

从而代入可得 $f(u)=u^3+3u^2+3u$，即 $f(x)=x^3+3x^2+3x$.

例 2 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=(\quad)$

(A) 等于 0　　(B) 等于 $+\infty$　　(C) 等于 1　　(D) 不存在

【分析】 此题重点考查左右极限与函数极限的关系．

【解】 当自变量从左右两侧趋于零时函数极限不同．由于 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故选 D.

【评注】 考查间断点处的极限，如果极限不存在则要考虑左右极限的存在情况．

例 3 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a，b 是常数，则(　　)

(A) $a=1$，$b=1$　　(B) $a=-1$，$b=1$　　(C) $a=1$，$b=-1$　　(D) $a=-1$，$b=-1$

【分析】 本题属于已知函数极限求参数的反问题．

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-1}{x+1}=0$，则要求 $1-a=0$，$a+b=0$. 故选 C.

【评注】 从形式上看是一个反问题，实际上就是最基本的“$\infty-\infty$”型未定式．

例 4 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内间断点的个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【分析】 初等函数在定义域内都连续．要确定间断点的个数即求解定义域以外的点．

【解】 要使得函数有意义需要满足 $x\neq0$，$1-x\neq0$，故选 C.

例 5　$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 不连续是因为(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 不存在　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$　　(D) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq f(0)$

【分析】 连续即要求 $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$.

【解】 $f(0)=f(0^-)=0$，即左连续；而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}$ 不存在，从而在分段点处不连续，故选 B.

【评注】 判断分段函数在分段点的连续性一般要考虑其左右极限，从而考虑其左右连续性.

例 6　设 $f(x)=x^2+\arctan\dfrac{1}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 无穷间断点　　(D) 连续点

【分析】 此题考查间断点的类型. 对于反正切函数 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

【解】 不难看出 $x=1$ 是函数的一个间断点. $f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+\arctan\dfrac{1}{x-1}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}$，

$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+\arctan\dfrac{1}{x-1}\right)=1-\dfrac{\pi}{2}$，故选 B.

【评注】 本题判断间断点的类型，若间断点两侧的函数表达式相同可直接先考虑在间断点处的极限. 如果不存在则需要求解左右极限，若 $f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 均存在，则 $f(x_0^+)=f(x_0^-)$ 即为可去间断点，$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$ 为跳跃间断点.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)^n}{\ln^m(1+x)}$ $(m,n\in\mathbf{N}^*)$.

【分析】 本题求解函数极限采用等价无穷小替换的方法.

【解】 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x^n)\sim x^n$，$\ln^m(1+x)\sim x^m$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^n}{\ln^m(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

例 8　当 $n\to\infty$ 时，$\sin^2\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^k}$ 为等价无穷小，则 $k=$ (　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 2　　(D) -2

【分析】 考查等价无穷小的定义.

【解】 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^k}}=1$，故 $k=2$，选 C.

例 9 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{-kn}=e^{-10}$，则 $k=$________.

【分析】 考查利用重要极限确定极限中的参数.

【解】 左式 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}(-kn)}=e^{-5k}=e^{-10}$，故 $k=2$.

【评注】 本题先将函数化为幂指函数，求解过程中利用了等价无穷小替换：当 $n\to\infty$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{5}{n}\right)\sim\dfrac{5}{n}$.

例 10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}=$________.

【分析】 考查等价无穷小的运用.

【解】 因为当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{2}{n}\sim\dfrac{2}{n}$，所以原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\cdot\dfrac{2}{n}=\dfrac{6}{5}$.

【评注】 数列极限中也经常用到等价无穷小代换.

例 11 设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2a}{n-a}\right)^{\frac{n}{3}}=8$，求 a 的值.

【解】 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2a}{n-a}\right)^{\frac{3}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{n-a}\right)^{\frac{n}{3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na}{n-a}}=e^a$，所以 $e^a=8$，

故 $a=\ln8=3\ln2$.

【评注】 此题是重要极限的逆运用.

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n$

【解】 (1) 拆项：$\dfrac{1}{k\ (k+1)}=\dfrac{k+1-k}{(k+1)\ k}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$，$k=1,2,\cdots,n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\ (n+1)}&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}$..

【评注】 和的极限运算法则要求所求和的项数为有限项，故对于无穷项和的极限问题，通常先求出其和的表达式，再利用极限运算法则求极限，而不能每项取极限后求和. 求和的常用技巧是裂项求和法.

例 13 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdots f(n)]$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(a^1\cdot a^2\cdots a^n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[\ln a+2\ln a+\cdots+n\ln a]$$

$$=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln a(a>0,a\neq 1).$$

【评注】 本题利用了对数函数的性质.

例 14 下列极限正确的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$不存在

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，故选 C.

【评注】 (A) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$；(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$；(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

例 15 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则下列正确的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=\infty\ (k\neq 0)$

【解】 $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k\cdot\infty\xlongequal{k\neq 0}\infty$，故选 D.

【评注】 极限的四则运算法则要求两个函数的极限值都存在. 注意，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均不存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$可能存在.

例 16 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(3x)}=$(　　)

(A) 3　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(3x)}\xlongequal{3x=2t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{2}{3}t}{f(2t)}=\frac{2}{3}\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(2t)}{t}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，故选 B.

例 17 已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+6}{1-x}$存在，则 $a=$______.

【分析】 分母的极限值等于 0，若原式极限值存在，分子的极限也必须为 0，否则，极限值等于∞.

【解】 因$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$，　故$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+6)=0$，

$1+a+6=0$，$a=-7$.

例 18 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)=$ ________.

【解】 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，故原式 $=1$.

【评注】 无穷小的性质和等价无穷小替换是求极限的常用方法.

例 19 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

【分析】 本题考查等价无穷小替换：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\ln(1+\cos 3x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos 3x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{-\frac{1}{2}(3x)^2}=\frac{4}{9}$$

【评注】 也可以用洛必达法则计算：原式 $\xlongequal{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos 3x}{-3\sin 3x}=\cdots=\dfrac{4}{9}$.

例 20 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}[1+u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}u(x)v(x)}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}[1+u(x)]^{v(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}\cdot u(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}u(x)\cdot v(x)}$.

例 21 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-mx+8}{x^2-(2+n)x+2n}=\dfrac{1}{5}$，求常数 m，n 的值.

【解】 (1) 因为原极限存在且 $\lim\limits_{x\to 2}[x^2-(2+n)x+2n]=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-mx+8)=0$，$4-2m+8=0$，则 $2m=12$，$m=6$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-(2+n)x+2n}\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-6}{2x-(2+n)}=\dfrac{4-6}{4-(2+n)}=\dfrac{-2}{2-n}=\dfrac{1}{5}$.

所以 $-10=2-n$，$n=12$

答 $m=6$，$n=12$.

【评注】 此题是逆向思维过程.

考研真题解析

一、选择题

1 (2007 年，数学一) 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-\sqrt{x})}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

【分析】 利用已知无穷小量的等价代换公式，尽量将四个选项先转化为其等价无穷小再进行比较分析找出正确答案.

【解】 $x\to 0$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2$，故选 B.

【评注】　考查等价无穷小的概念和常用的等价无穷小.

2（2009 年，数学一）　当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　)

（A）$a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　（B）$a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$

（C）$a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　（D）$a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$

【解】　根据已知条件，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1$$

所以 $a^3=-6b$，故排除 B、C. 另外 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1-a\cos ax\to 0$ （$x\to 0$），故 $a=1$. 故排除 D. 所以本题选 A.

【评注】　考查常用的等价无穷小量替换及洛必达法则.

3（2007 年，数学一）　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是(　　)

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【分析】　本题为极限的逆问题，已知某极限存在的情况下，需要利用极限的四则运算进行分析讨论.

【解】　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0.$$

进而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在，即 A、C 正确. 同理 B 正确，故选 D. 事实上，可举反例：$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$ 存在，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

【评注】　考查函数极限存在的条件.

4（2004 年，数学三）　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}，则(\quad)$$

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与常数 a 的取值有关.

【解】 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a$. 从而若 $a=0$，则 $g(x)$ 连续；若 $a\neq0$ 则函数间断. 故本题选 D.

【评注】 考查函数连续性定义与间断点的类型.

5 (2014 年，数学一) 下列曲线有渐近线的是( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$ (C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

【分析】 只需要判断哪个曲线有斜渐近线就可以.

【解】 对于选项 A，$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$ 不存在，因此没有水平渐近线，同理可知，选项 A 没有铅直渐近线，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 不存在，因此选项 A 没有斜渐近线；

对于选项 B 和 D，我们同理可知，对应的函数没有渐近线；

对于 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$，可知 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=1$，

且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以有斜渐近线 $y=x$，应该选 C.

6 (2014 年，数学三) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则当 n 充分大时有( )

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$ (B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$ (C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$ (D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

【解】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$，$|a|-\varepsilon<|a_n|\leqslant|a|+\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则知 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，所以选择 A.

【评注】 本题考查了极限的 $\varepsilon-N$ 语言定义.

7 (2014 年，数学三) 设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则当 $x\to0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是( )

(A) $a=0$ (B) $b=1$ (C) $c=0$ (D) $d=\dfrac{1}{6}$

【分析】 利用基本初等函数 $\tan x$ 的麦克劳林公式，根据阶的定义求解.

【解 1】 由泰勒展开式：$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则必有 $a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$，应该选 D.

【解 2】 由题意知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0$，

$\lim\limits_{x\to0}(a+bx+cx^2+dx^3-\tan x)=0\Rightarrow a=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x)=0\Rightarrow b=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2cx}{3x^2}+\left(d-\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow c=0,d=\frac{1}{3}.$$

【评注】 本题考查高阶无穷小、泰勒公式、洛必达法则.

8（2013 年，数学一）　已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k，c 为常数，且 $c\neq 0$，则(　　)

(A) $k=2$，$c=-\frac{1}{2}$　　(B) $k=2$，$c=\frac{1}{2}$

(C) $k=3$，$c=-\frac{1}{3}$　　(D) $k=3$，$c=\frac{1}{3}$

【分析】 此题考查洛必达法则.

【解】 用洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=c$，

因为 $c\neq 0$，因此 $k-1=2$，$\frac{1}{k}=c$，即 $k=3$，$c=\frac{1}{3}$.

【评注】 考查函数极限存在的反问题：已知极限值存在，需要满足什么条件.

9（2013 年，数学三）　当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 的高阶无穷小，则下列式子中错误的是(　　)

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

【分析】 此题考查高阶无穷小.

【解】 (A) $\frac{xo(x^2)}{x^3}=\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(B) $\frac{o(x)o(x^2)}{x^3}=\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(C) $\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\frac{o(x^2)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(D) 虽然 $x^2=o(x)$，$x^3=o(x^2)$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^2}=1$，即 $x^2+x^3\neq o(x^2)$，故选 D.

【评注】 注意对 $o(x)$ 符号的理解.

10（2013 年，数学三）　设函数 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2},\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty$，而 $f(0)$，$f(1)$ 无定义，故 $x=0$，$x=1$ 为可去间断点，故选 C.

【评注】 首先利用初等函数的连续性结论找间断点，再根据可去间断点的特征判断.

11（2013 年，数学二） 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，$|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是(　　)

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价无穷小　　(D) 与 x 等价无穷小

【分析】 此题考查同阶无穷小.

【解】 显然当 $x\to 0$ 时 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x^2,\sin\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x\sim\alpha(x)$，故应该选 C.

【评注】 熟悉常用的等价无穷小：当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$；$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$；$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$.

12（2012 年，数学一） 曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】 函数无定义的点是 $x=\pm 1$，因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$，所以 $x=-1$ 不是垂直渐近线. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$，所以 $y=1$ 为水平渐近线. 又因为极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，故此曲线没有斜渐近线. 综上，有两条渐近线，选 C.

【评注】 曲线的渐近线包括水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线三种. 一般顺序是：①找出无定义点，考察 x 趋于它时极限是否无穷大，以确定其是否为对应铅直渐近线. ②考察 $x\to\pm\infty$ 时函数的极限，以确定水平渐近线. ③考察是否存在直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，以确定斜渐近线.

13（2011 年，数学二） 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A) $k=1$，$c=4$　　(B) $k=1$，$c=-4$　　(C) $k=3$，$c=4$　　(D) $k=3$，$c=-4$

【解 1】 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin(x+2x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$$