“十三五”全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材配套辅导书

YINGYONG SHUXUE WEIJIFEN JIAOXUE FUDAOSHU

# 《应用数学——微积分》教学辅导书

◎主编 郑 佳 李秀玲

中国商业出版社

"十三五"全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材配套辅导书

# 《应用数学——微积分》教学辅导书

总主编 李秀玲 王 雷 郑 佳
主 编 郑 佳 李秀玲
副主编 崔立芝 赵启明

中国商业出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

《应用数学—微积分》教学辅导书 / 郑佳，李秀玲主编. —北京 ：中国商业出版社，2016.9

ISBN 978-7-5044-9434-4

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①郑… ②李… Ⅲ. ①应用数学—高等学校—教学参考资料②微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O29②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 109271 号

责任编辑:蔡凯

中国商业出版社出版发行

010-63180647 www.c-cbook.com

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

北京航天伟业印刷有限公司印刷

* * * * *

787×1092 毫米 开本:1/16 印张:24 字数:320 千字

2016 年 9 月第 1 版 2016 年 9 月第 1 次印刷

**定价:46.00 元**

* * * *

# 前 言

本书是与中国商业出版社出版的何英凯、郑佳等编写的《应用数学——微积分》教材配套的教学辅导书。在编写过程中，我们兼顾了其他传统教材的知识要点，让本书更具通用性。

编写此书的初衷是帮助不同层次的学生提高数学解题能力，为此我们对其框架结构进行了精心的设计。全书总共十章，沿用教材各章名称并保持原有顺序编排，其中第一章属于预备知识，第二、三、四、七章属于微分学的内容，第五、六、八章属于积分学内容，第九章是级数理论，第十章是微分方程和差分方程的初步介绍本书。不同于单纯的习题集，每章除了固定设有“教材练习题详解”外，额外增添了“教学基本要求与内容提要”、“典型方法与范例”以及“自测题及答案”三部分内容，以便于读者查阅知识、总结规律、检验效果。这种刻意安排出来的“结构”对解题行为而言是封闭的，因为读者不必依赖任何外部资源，便可自学本书。

“内容提要”不是对教材的简单重复，而是有针对性地回顾重点难点，主要包括微积分中的基本概念、重要定理、性质与常用计算方法以及其在经济领域的应用。

书中所编录的例题、练习题、自测题都是典型的、有趣的，部分题目还有较强的应用背景，考点完全覆盖了教学大纲与考研大纲，常规基础题与考研拔高题搭配合理(约为 7∶3)。遵循思维规律，对于例题，我们将解决问题的过程细分成“分析”、“解”、“总结”三步，并尽量做到分析到位，解题规范，归纳系统，希望给“新手”以启发和示范。此外，出于锻炼思维能力的考量，我们不但注重反问题、抽象问题、综合性问题的独特作用，而且提倡多角度切入，鼓励一题多解。事实上，很多例题都反映了我们的上述想法。

本书具有多方面用途，既可供初学者作为同步练习之用，亦可供考研同学作为备考复习资料使用，即使对教师讲习题课也是有益的。

为了达到预期效果，请读者务必先行完成教材对应内容的学习后再读此书，切不可本末倒置。若遇到难题一时解不了，首要的是反复思考争取独立求解，切不可急于查阅“详解”或“答案”。

书中带“ * ”号练习题已超出教学大纲要求，可酌情选做。

本书由吉林财经大学教师郑佳(第一章、第二章、第三章)、赵启明(第四章、第五章、第六章)、崔立芝(第七章、第八章、第九章)、李秀玲(第十章)负责编写，由郑佳统筹定稿，并经李秀玲审阅。

我们将多年的教学经验融入书中，希望读者获益。若有疏漏之处，敬请大家指正。

编者

2016年9月

# 目 录

# 第一章 函数

## 一、教学基本要求与内容提要

### (一) 教学基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性与奇偶性.
3. 掌握函数关系的建立.
4. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
5. 掌握基本初等函数的性质及图形，理解初等函数的概念及应用.
6. 会建立简单应用问题的函数关系，熟悉几种常用的经济函数.

### (二) 内容提要

**1. 集合的基本概念**

**集合** 具有某种属性的事物集体.

**元素** 集合中的每个个体.

常用集合 **实数集** R；**有理数集** Q；**整数集** Z；**非负整数集（或自然数集）**N.

集合的表示方法

**列举法** 把集合的元素一一列举出来，并用"{ }"括起来，如 $A=\{a,b,c\cdots\}$.

**描述法** 用所有元素的共同特征来表示集合，如方程 $x^2-2x-3=0$ 的根 $M=\{x \mid x^2-2x-3=0\}$

集合的基本关系

**子集** 集合 $A$ 中的所有元素都是集合 $B$ 的元素，称 $A$ 为集合 $B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$，称 $A$ 包含于 $B$. 或 $B\supseteq A$，称 $B$ 包含 $A$.

**真子集** 集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，但至少存在一个元素属于 $B$ 但不属于 $A$，我们称集合 $A$ 是集合 $B$ 的真子集，记作 $A\subset B$.

**空集** 不包含任何元素的集合，记作 Φ. 并规定，空集是任何集合的子集.

**相等** $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，记作 $A=B$.

集合的基本运算

**并集** $A+B$ 或 $A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

**交集** $AB$ 或 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

**差集** $A - B$ 或 $A \setminus B = \{x | x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

**全集或基本集** 集合 $I$

**余集或补集** $I \setminus A$，$A^C$ 或 $\overline{A}$.

集合的运算满足下列法则

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

(2) **结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(3) **分配律** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

(4) **对偶律** $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$，$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

2. **区间与邻域**

**有限区间**

**闭区间** $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；**开区间** $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

**半开区间** $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$， $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

**无限区间**

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}; \quad (-\infty,b) = \{x \mid x < b\};$$
$$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}; \quad (a,+\infty) = \{x \mid a < x\};$$
$$R = (-\infty,+\infty).$$

**点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域** $U_{(x_0,\delta)} = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$；

**点 $x_0$ 的左邻域** $(x_0 - \delta, x_0]$；

**点 $x_0$ 的右邻域.** $[x_0, x_0 + \delta)$；

**点 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域** $\overset{0}{U}_{(x_0,\delta)} = \{x \mid (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\}$；

**点 $x_0$ 的空心左邻域** $(x_0 - \delta, x_0)$；

**点 $x_0$ 的空心右邻域** $(x_0, x_0 + \delta)$.

3. **函数**

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 为一个非空的实数集合，如果存在一个对应规则 $f$，对于 $\forall x \in D$，按照对应法则 $f$ 有唯一变量 $y$ 与 $x$ 相对应，则称对应规则 $f$ 为定义在实数集合 $D$ 上的函数. 记作

$$y = f(x), x \in D_f$$

称数集 $D$ 为函数 $f$ 的定义域，记做 $D_f$，其中 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量.

全体函数值所构成的集合，称为函数的值域，记为 $Z$ 或 $Z_f$，即

$$Z = Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

**注** ①函数的定义域与对应法则称为**函数的两个要素**. 两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同. 例如，函数 $y = x + 1$ 的自然定义域为 $(-\infty, +\infty)$；而函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的自然定义域为 $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$，由于定义域不同，因此这是两个不同的函数；

②函数的定义域和值域必须是非空集合，否则集合中没有元素就不可能构成映射，函数也就不存在了；

③自变量的任一数值只有唯一的函数值与之对应，这类函数称为**单值函数**．例如 $y=\sqrt{1-x^2}$．相反，自变量的任一数值有多个函数值与之对应，称为**多值函数**．例如 $y^2=1-x^2$．可以将其分解成两个单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 来讨论．

4．**分段函数**

在其定义域的不同部分，对应法则由不同的算式表达．

**绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z_f=[0,+\infty)$．

**符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

对于任意实数 $x$，都有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$．它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z_f=\{-1,1\}$．

**取整函数**　$y=[x]=n, n\leqslant x<n+1, n=0,\pm 1,\pm 2\cdots$．

其中 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，称为 $x$ 的整数部分．例如 $[2.6]=2$，$[\pi]=3$，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[-2.6]=-3$．可以证明，对任意实数 $x$，有不等式 $[x]\leqslant x\leqslant [x]+1$ 成立．它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z_f$ 为正整数集．

5．**函数的基本特性**

(1) **有界性**　若存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in M$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函 $f(x)$ 在 $X$ 上有界．

(2) **单调性**　设函数 $y=f(x)$ 在实数集 $D$ 上有定义，若 $\forall x_1<x_2(x_1>x_2)\in D$，若总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $(f(x_1)>f(x_2))$）成立，则称 $f(x)$ 在 $D$ 内是单调的．

(3) **奇偶性**　设函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集合 $D$ 内有定义，$\forall x\in D$，若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；

(4) **周期性**　设函数 $f(x)$ 在集合 $D$ 内有定义，如果存在常数 $T>0$，使得对任意的 $x\in D$，恒有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ **为周期函数**．满足上式的最小正数 $T_0$，称为 $f(x)$ **的周期**．

6．**初等函数**

(1) **基本初等函数**　常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六类函数称为基本初等函数．

(2) **初等函数**　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在其定义域内具有一个统一的解析表达式，这样的函数统称为初等函数．

**注①复合函数**　设函数 $y=f(u)$，定义域为 $D_f$，而函数 $u=\varphi(x)$，值域为 $R_\varphi$，如果 $D_f\cap D_R=\Phi$（空集），则称函数 $y=f[g(x)], x\in(\{x|g(x)\in D_f\}$ 为复合函数．其中 $y$ 为因变量，$x$ 为自变量，$u$ 称为中间变量．

②不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数，例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数，因为前者定义域 $[-1,1]$ 与后者的值域 $[2,+\infty]$ 的交集为空集，从而复合函数不存在.

③在分解复合结构时，必须遵循两个原则 一是由表及里，逐层分解；二是每一层都不再是复合函数.

④基本初等函数经过无限次复合和四则运算得到的函数和分段函数等都是非初等函数.

例如，$y=x+x^2+x^3+\cdots$ 和 $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}$.

7. **简单经济函数**

**总成本函数** 是指在一定时期内，生产产品时所消耗的生产费用之总和. 常用 $C$ 表示，可以看作是产量 $x$ 的函数，记作

$$C=C(x)=FC+VC.$$

其中 $FC$ 为**固定成本**指在一定时期内不随产量变动而支出的费用，如厂房、设备的固定费用和管理费用等；**可变成本** $VC$ 是指随产品产量变动而变动的支出费用，如税收、原材料、电力燃料等.

**平均成本** 每个单位产品的成本，即 $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}$.

**总收益函数** 是指生产者出售一定产品数量 $x$ 所得到的全部收入，常用 $R$ 表示，即

$$R=R(x),$$

其中 $x$ 为销售量. 显然，$R|_{Q=0}=R(0)=0$，即未出售商品时，总收益为 0.

若已知需求函数 $Q=Q(p)$，则总收益的为 $R=R(Q)=P\cdot Q=Q^{-1}(p)\cdot Q$.

平均收益 $\overline{R}=\dfrac{R(x)}{x}$，若单位产品的销售价格为 $p$，则 $R=p\cdot x$，且 $\overline{R}=p$.

**总利润函数** 是指生产中获得的纯收入，为总收益与总成本之差，常用 $L$ 表示，即

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

**需求量** 指的是在一定时间内，消费者对某商品愿意而且有支付能力购买的商品数量.

**需求函数** 将需求量 $Q_d$ 看作价格 $p$ 的函数，即 $Q_d=Q_d(p)$，通常需求函数单调递减.

**供给量** 在一定时期内生产者愿意生产并可向市场提供出售的商品量.

**供给价格** 是指生产者为提供一定量商品愿意接受的价格.

**供给函数** 供给量 $Q_s$ 看作价格 $p$ 的函数，$Q_s=Q_s(p)$. 一般说来，价格上涨刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加，价格下跌使供给量减少，即供给函数是价格 $p$ 的单调增加函数.

**均衡价格** 商品的市场需求量与供给量相等的价格，即 $Q_d=Q_s$ 通常记均衡价格为 $p_0$ 或 $p_e$，对应的需求量与供给量称为**均衡数量**，记为 $Q_0$ 或 $Q_e$.

当市场价格高于 $p_0$ 时，需求量减少而供给量增加，反之，当市场价格低于 $p_0$ 时，需求

量增加而供给量减少. 市场价格的调节就是利用供需均衡来实现的.

## 二、典型方法与范例

### 1. 利用函数概念解题

**例 1** 求函数 $y=e^x+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 的定义域.

**分析** 根据基本初等函数的定义域列出自变量满足的不等式组，并求解.

**解** 由 $-1\leqslant\ln\sqrt{1-x}\leqslant 1$ 得到 $e^{-1}\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant e$，解出定义域 $[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$

**例 2** 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1)$，求 $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ 的定义域.

**解** 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1)$，所以 $0\leqslant\dfrac{x}{x+1}<1$，所以定义域为 $[0,+\infty)$.

**例 3** 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 是否表示同一函数?

**分析** 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数，否则表示两个不同函数.

**解** 要使 $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}x-3\geq 0\\x-2>0\end{cases}$，即定义域为 $[3,+\infty)$；要使 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}\geq 0\\x-2\neq 0\end{cases}$，即定义域为 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$，故两个函数不等价.

### 2. 反函数与复合函数.

**例 4** 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

**解** 当 $x\geqslant 1$ 时，原式变形为

$$y(\sqrt{2x+1}+1)=\sqrt{2x+1}-1,$$

即

$$\sqrt{2x+1}=\frac{1+y}{1-y},$$

解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-1\right]=\frac{2y}{(1-y)^2},$$

故反函数为

$$y=\frac{2x}{(1-x)^2}.$$

$*$**例 5** 设，$f(x)=\begin{cases}e^x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ x^2-1, & 0<x\leqslant 1,\\ \arctan x, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

**分析** 求分段函数的反函数，只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

**解** 由 $y=e^x$，$-\infty<x\leqslant 0$，可知其反函数为 $x=\ln y$，$0<y\leqslant 1$；由 $y=x^2-1$，

$0<x\leqslant 1$，可知其反函数为 $x=-\sqrt{y-1}$，$-1<y\leqslant 0$；由 $y=\arctan x$，$1<x\leqslant+\infty$，可知其反函数为 $x=\tan y$，$\frac{\pi}{4}<y\leqslant\frac{\pi}{2}$；将以上各式中的 $x$ 与 $y$ 互换，则得到 $f(x)$ 的表达式

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x-1}, & -1<x\leqslant 0,\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ \tan x, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

*例 6　已知 $f(x-1)=\lg\frac{x}{x-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\lg x$，求 $\varphi(x)$.

**分析**　将给出的表达式 $\lg\frac{x}{x-2}$ 凑成对应 $x-1$ 的表达式的形式，然后利用函数与自变量表示的字母无关特性求解.

**解**　$f(x-1)=\lg\frac{x}{x-2}=\lg\frac{x-1+1}{x-1-1}$，故 $f(x)=\lg\frac{x+1}{x-1}$，则

$$f[\varphi(x)]=\lg\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\lg x,$$

所以

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,$$

解得

$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

**例 7**　设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$，求 $f(x)$.

**分析**　先做变量替换，在用无关特性，通过联立方程组得出函数的表达式.

**解**　令 $t=\frac{x-1}{x}$，即 $x=\frac{1}{1-t}$，代入原方程得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},$$

利用函数无关特性，则 $f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x}$，再令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$，即 $x=\frac{1}{1-u}$，代入上式得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},$$

即

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x},$$

联立方程 $\begin{cases}f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x},\\ f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x},\end{cases}$ 解此方程组，得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

**例 8** 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

**解** $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{1}{1-(1-x^2)^2}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

***例 9** $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geq 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geq 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

**解** $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geq 1.\end{cases}$

(1)当 $\varphi(x)<1$ 时，$x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $x<-1$；$x\geq 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $0\leqslant x<\sqrt{2}$；

(2) 当 $\varphi(x)\geq 1$ 时，$x<0$，$\varphi(x)=x+2\geq 1$，即 $-1\leqslant x<0$；$x\geq 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geq\sqrt{2}.\end{cases}$$

3. **函数特性的判断与证明**

***例 10** 判别下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；(2) $f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为奇函数.

**解** (1) $f(-x)=(-x)\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=(-x)\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 令 $G(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，则

$$G(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$

$G(x)+G(-x)=0$，所以 $G(x)$ 为奇函数，又因为 $F(x)$ 为奇函数，故 $f(x)$ 为偶函数.

**方法总结：判定函数奇偶性的思路**

(1) 依据函数奇偶性的定义.

(2) 用奇偶函数的运算性质. 奇函数+奇函数=奇函数，偶函数+偶函数=偶函数，奇函数×偶函数=奇函数，奇函数×奇函数=偶函数，偶函数×偶函数=偶函数.

(3) 由奇偶函数构成的复合函数的奇偶性 若 $f(x)$ 为偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则 $f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 为偶函数，而 $\varphi[\varphi(x)]$ 为奇函数.

(4) 用函数图形的对称性.

**注** 任意一个定义在对称区间上的函数，都可以写成一个奇函数与偶函数之和（习题 B

第 3 题).

**例 11** 判别函数 $f(x)=2^{\cos x}$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$，在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性.

**解** 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$2^x$ 是增函数，而 $\cos x$ 是减函数，故 $2^{\cos x}$ 是减函数；在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，而 $\sin x$ 是增函数，故 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ 是减函数.

**方法总结**：函数在某区间**单调性**判别的思路

(1) 单调性定义；

(2) 奇偶函数的单调性；

(3) 复合函数的单调性 若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是减函数，$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 是增函数.

**例 12** 判断函数 $f(x)=1+|\sin 2x|$ 的周期.

**解** $f(x)=1+|\sin 2x|=1+\sqrt{\sin^2 2x}=1+\sqrt{\dfrac{1-\cos 4x}{2}}$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

**方法总结**：求解给定函数**周期或周期性**证明的思路

(1) 依据函数周期性定义；

(2) 若函数 $f(x)$ 的周期为 $T$，则函数 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(3) 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 的周期都是 $T$，则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期也是 $T$；

(4) 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 的周期分别是 $T_1$，$T_2$，则 $f(x)\pm g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 都以是 $T_1$，$T_2$ 的最小公倍数为周期的函数.

**例 13** 证明函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 有界.

**证明** 因为 $\ln\frac{1}{2}\leqslant \ln x\leqslant 0, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，且 $1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2$，所以 $2\ln\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\ln x=f(x)\leqslant 0$.

**方法总结**：函数**有界性**的判别思路

(1) 在第一章中证明或判别函数有界，只能利用有界性的定义；

(2) 利用闭区间上连续函数的有界性定理；

(3) 利用有极限的数列必有界；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 充分小邻域内必有界.

**4. 常用经济函数**

**例 14** 设某商品的需求量 $Q$ 是价格 $P$ 的线性函数 $Q=a+bP$，已知该商品的最大需求量为 40000 件（价格为零时的需求量），最高价格为 40 元/件（需求量为零时的价格）. 求该商品的需求函数与收益函数.

**解** 当 $P=0$ 时，$Q=40000$，代入 $Q=a+bP$ 得，$a=40000$；当 $Q=0$ 时，$p=40$，代入 $Q=a+bP$ 得 $b=-1000$. 故需求函数 $Q=40000-1000P$. 收益函数

$$R=PQ=Q\left(\frac{40000-Q}{1000}\right)=40Q-\frac{Q^2}{1000}.$$

**例 15** 设某商品的成本函数和收入函数分别为

$$C(q)=7+2q+q^2,\ R(q)=10q,$$

求 (1) 该商品的利润函数；

(2) 销量为 4 时的总利润及平均利润；

(3) 销量为 10 时是盈利还是亏损？

**解** (1) 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=8q-7-q^2$.

(2) $L(4)=8\times4-7-4^2=9$. $\overline{L}(4)=\dfrac{L(4)}{4}=\dfrac{9}{4}$.

(3) 因为 $L(10)=8\times10-7-10^2=-27<0$，所以销售量为 10 时时亏损.

**例 16** 某工厂生产某种产品年产量为 $x$ 台，每台售价 500 元，当年产量超过 800 台时，超过部分只能按 9 折出售，这样可多售出 200 台，如果再多生产，本年就销售不出去了，试写出本年的收益函数.

**分析** 因为产量超过 800 台时售价要按照 9 折出售，又超过 1000 台时，多余部分销售不出去，从而超出部分无收益. 因此要把产量份三阶段来考虑.

**解** 依题意有

$$R=\begin{cases}500x, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 500\times800+0.9\times500(x-800), & 800<x\leqslant1000,\\ 500\times800+0.9\times500\times200, & x>1000,\end{cases}$$
$$=\begin{cases}500x, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 400000+450(x-800), & 800<x\leqslant1000,\\ 490000, & x>1000.\end{cases}$$

## 三、教材习题详解

### 习题一

### (A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-2x-15}$；  (2) $y=\begin{cases}x+3,2<|x|\leqslant4,\\ 2x^2+1,|x|\leqslant2;\end{cases}$

(3) $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{x-2}$；  (4) $y=\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}$；

(5) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$；  (6) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

**解** (1) 因为 $x^2-2x-15\geq0$ 所以 $x\geq5$ 或 $x\leqslant-3$，即 $D_f=(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$.

(2) 因为 $2<|x|\leqslant4$ 或 $|x|\leqslant2$，所以 $D_f=[-2,4]$.

(3) 因为 $\begin{cases}x-1>0\\ x-2\neq0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x>1\\ x\neq2\end{cases}$，所以 $D_f=(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(4) 因为 $y=\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4x}{(x+1)^2}}$，所以 $x\neq-1$，且 $x\geq0$，因此

$$D_f=[0,+\infty).$$

(5) 因为 $\begin{cases}x>0\\ x\neq e\end{cases}$，所以 $D_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

(6) 因为 $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$，所以 $D_f=[-1,3]$.

2. 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+3f(-x)=3x+4$，求 $f(x)$.

**解** 令 $t=-x$，则有 $2f(-t)+f(t)=-3t+4$，即 $2f(-x)+f(x)=-3x+4$ 又有 $2f(x)+3f(-x)=3x+4$，解得 $f(x)=3x+\frac{4}{3}$.

3. 已知 $f(x)=\frac{4x}{x-1}$，求 $f^{-1}(3)$.

**解** 令 $y=f(x)$ 则 $x=\frac{y}{y-4}$，即 $y=\frac{x}{x-4}$，所以 $f^{-1}(3)=-3$.

4. 讨论下列函数的单调性（指出其单调增加区间和单调减少区间）.

(1) $y=x^3+1$；　(2) $y=e^{|x|}$；　(3) $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

**解** (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，设 $\forall x_1<x_2\in(-\infty,+\infty)$，

$$y_2-y_1=x_2{}^3-x_1{}^3>0,$$

故单调增加区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 定义域为实数 $(-\infty,+\infty)$，$\forall x_1<x_2\in(-\infty,+\infty)$，

当 $x_1<x_2<0$ 时，$|x_1|>|x_2|$，$e^{|x_1|}-e^{|x_2|}>0$，函数为减函数；

当 $0<x_1<x_2$ 时，$|x_1|<|x_2|$，$e^{|x_1|}-e^{|x_2|}<0$，函数为增函数.

故单调减少区间为 $(-\infty,0)$，单调增加区间为 $(0,+\infty)$.

(3) 定义域为 $[-1,3]$，$\forall x_1<x_2\in[-1,3]$，

$$y=\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{-(x-1)^2+4}$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$-(x-1)^2$ 为增函数，$\sqrt{-(x-1)^2+4}$ 也为增函数.

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$，$1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-(x-1)^2$ 为减函数，$\sqrt{-(x-1)^2+4}$ 也为减函数.

故单调增加区间为 $[0,1]$，单调减少区间为 $[1,3]$ 和 $[-1,0]$.

5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数，求 $f(1-x^2)$ 的单调区间.

**解** $\forall x_1<x_2\in[-1,0]$，$1-x_1{}^2\leqslant 1-x^2$　又因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数，所以 $[-1,0]$ 是函数 $f(1-x^2)$ 单调递增区间. $\forall x_1<x_2\in[0,1]$，$1-x_1{}^2\geq 1-x_2{}^2$ 又因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数，所以 $[0,1]$ 是函数 $f(1-x^2)$ 单调递增区间.

6. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y=g(x)\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，其中 $g(x)$ 为奇函数；

(2) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$；　(3) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$；

(4) $y=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \cos x+x & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

**解** (1) 因为 $g(x)$ 为奇函数，所以有

$$\begin{aligned}f(-x)&=g(-x)\ln\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]\\&=-g(x)\ln\left[-x+\sqrt{1+x^2}\right]\\&=-g(x)\ln\left[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]\end{aligned}$$