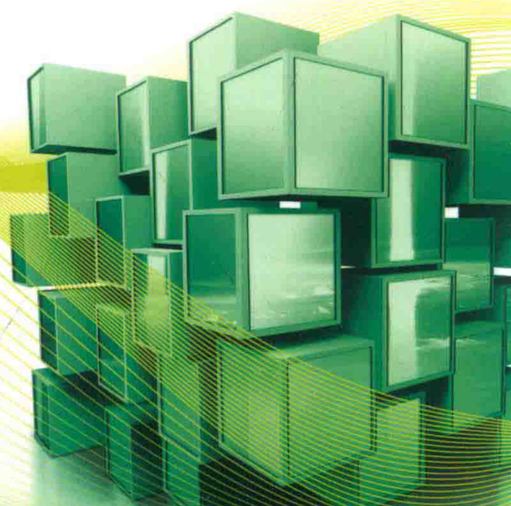
研究生教育“十二五”规划教材

矩阵理论及其应用

杨凤藻　主编



科学出版社

研究生教育“十二五”规划教材

矩阵理论及其应用

杨凤藻　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据理工科研究生学科发展要求，结合编者多年的教学实践经验编写. 内容包括：线性空间与线性变换、向量和矩阵的范数、矩阵分析及其简单应用、矩阵分解、矩阵特征值的估计与对称矩阵的极性、广义逆矩阵、矩阵在数学建模中的应用，附录为基于Matlab的矩阵计算. 全书简明扼要、条理清楚、方便学习.

本书可作为理工科各专业研究生和数学类本科生的矩阵论教材，也可供广大工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论及其应用/杨凤藻主编. —北京：科学出版社，2017. 9

研究生教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-054109-3

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①矩阵论-研究　Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第190535号

责任编辑：王胡权/责任校对：彭　涛

责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017年9月第　一　版　开本：720×1000　B5

2018年1月第二次印刷　印张：13　3/4

字数：275 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

矩阵理论是一门实用性较强的数学理论. 它不仅是数学的一个重要分支, 而且也是现代各领域处理大量有限维空间形式与数量关系的重要手段, 是大数据时代最强有力的数学工具之一. 特别是计算机的广泛普及, 为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景. 比如, 系统工程、优化方法及稳定性理论等, 都与矩阵计算有着密切的关系, 从而导致近年来矩阵理论在内容上有了相当大的更新, 因此, 编者根据理工科研究生学习和科研的需要, 编写了本书.

本书主编杨凤藻教授从事矩阵理论研究学工作多年, 对理工科研究生矩阵理论教学经验非常丰富. 全书分为 7 章, 其中第一、三章由胡兴凯编写, 第二章由何园编写, 第四章由杨凤藻编写, 第五章由郑瑾环编写, 第六、七章与附录由李金海编写. 杨凤藻、方郁文进行了统稿工作.

全书的编写力求做到资料丰富, 论述详尽严谨, 文字通俗易懂, 便于学生自学. 为了尽可能满足理工科各专业研究生学习的需要, 书中第七章列举了矩阵理论与方法在数学建模中的一些实际应用, 同时附录还给出了基于 Matlab 的矩阵相关计算命令, 方便学生运用矩阵解决大规模的计算问题, 书中还收编了近年来新出版的一些矩阵理论研究成果. 全书内容充实, 不同专业的研究生可根据需要对内容进行适当取舍. 理科研究生学习本书大约需要 80 学时; 工科研究生可以对第五、六章的部分内容进行取舍, 大约需要 60 学时.

在编写的过程中, 昆明理工大学理学院数学系的同事们给了我们很大的鼓励和支持, 部分教师仔细审阅了本书全稿, 并给予了建设性的意见. 编者在此一并深表感谢!

本书的出版得到了昆明理工大学研究生核心课程建设经费资助.

由于编者水平有限, 疏漏和不妥之处在所难免, 殷望批评指正!

编　者

2016 年冬于昆明理工大学

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间和线性变换是线性代数的两个基本概念，是研究矩阵理论的重要基础. 本章主要介绍线性空间和线性变换的概念及其理论，然后再讨论两个特殊的线性空间.

第一节　线 性 空 间

一、线性空间的定义及其性质

线性空间是一个抽象的概念，为了便于理解，我们先看几个熟知的例子.

例 1　在集合 $S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ 中，S 关于向量的加法和数乘运算是封闭的，并且对于加法运算还满足交换律和结合律，数乘运算满足分配律和结合律.

例 2　对于函数，考虑全体定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 我们知道连续函数的和函数还是连续函数，连续函数与实数的乘积还是连续函数，因此对加法和数乘这两种运算是封闭的，同时对例 1 提到的运算律也是成立的.

例 3　二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的解集合为 D，对于函数加法及数与函数的乘法有：若 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程的两个解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 也是方程的解，且当 $k\in\mathbf{R}$ 时，$k\,y_1(x),k\,y_2(x)$ 也是方程的解，即二阶齐次线性微分方程的解集合对于加法和数乘两种运算是封闭的，同时对例 1 提到的运算律也是成立的.

从这些例子我们看到，所考虑的对象虽然完全不同，但是它们有一个共同的特点，那就是在它们上可以定义加法和数量乘法两种运算，且对于这两种运算是封闭的，当然，随着对象不同，这两种运算的定义也是不同的. 为了抓住它们的共同点，把它们统一起来加以研究，我们引入线性空间的概念.

定义 1　设 V 是一个非空集合，其元素用 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 等表示；K 是一个数域，其元素用 k,l,m 等表示. 如果 V 满足：

（Ⅰ）在 V 中定义一个“加法”运算，即当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$（封闭性），且加法运算满足下列性质：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

(2) **结合律** $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$；

(3) **零元律** 存在零元素 $\boldsymbol{\theta}$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$；

(4) **负元律** 对于任一元素 $\boldsymbol{x}\in V$，存在一元素 $\boldsymbol{y}\in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\theta}$，且称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**负元素**，记为 $(-\boldsymbol{x})$. 则有 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}$.

(Ⅱ) 在 V 中定义一个"数乘"运算，即当 $\boldsymbol{x}\in V, k\in K$ 时，有唯一的 $k\boldsymbol{x}\in V$（封闭性），且数乘运算满足下列性质：

(5) **数因子分配律** $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$；

(6) **分配律** $(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$；

(7) **结合律** $k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$；

(8) **恒等律** 存在单位数 $1\in K$，使 $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，

则称 V 为数域 K 上的**线性空间**或**向量空间**. 线性空间中的元素 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 也称为**向量**，当然这里所谓的向量要比几何中向量含义广泛得多. V 中所定义的加法及数乘运算统称为 V 的**线性运算**.

当数域 K 为实数域时，V 就称为**实线性空间**；K 为复数域时，V 就称为**复线性空间**.

例 4 次数不超过 n 的实系数多项式全体记为 $P[x]_n$，即

$$P[x]_n=\left\{p_n \middle| p_n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, a_n,\cdots,a_0\in\mathbf{R}\right\},$$

$P[x]_n$ 按照通常的多项式加法及数与多项式的乘法构成实数域上的线性空间.

这是因为 $P[x]_n$ 对于上述两种运算显然是封闭的，且满足 8 条运算律，所以 $P[x]_n$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，我们把这种线性空间称为**多项式空间**.

例 5 $V=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, a_{ij}\in K\}$，对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 及 $k\in K$，定义加法运算和数乘运算如下：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \quad k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

显然，V 是 K 上的线性空间，把这种线性空间称为**矩阵空间**.

例 6 正实数的全体记为 $\mathbf{R}^+$，即

$$\mathbf{R}^+=\left\{a \middle| a>0, a\in\mathbf{R}\right\},$$

在 $\mathbf{R}^+$ 中定义加法及数乘运算分别为

$$a\oplus b=ab, \quad \lambda\odot a=a^\lambda,$$

其中 $a,b\in\mathbf{R}^+, \lambda\in\mathbf{R}$. 证明 $\mathbf{R}^+$ 对上述加法和数乘构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

证 设 $a,b\in\mathbf{R}^+, \lambda\in\mathbf{R}$，有

$$a\oplus b=ab\in\mathbf{R}^+, \quad \lambda\odot a=a^\lambda\in\mathbf{R}^+,$$

即 $\mathbf{R}^+$ 对定义的加法“$\oplus$”和数乘运算“$\odot$”是封闭的，并且有

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$；

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c)$；

(3) 在 $\mathbf{R}^+$ 中存在零元素1，使对于任意 $a \in \mathbf{R}^+$，有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$；

(4) 对于任意 $a \in \mathbf{R}^+$，有负元素 $a^{-1} \in \mathbf{R}^+$，使得 $a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$；

(5) 存在单位数 $1 \in \mathbf{R}$，使 $1 \odot a = a^1 = a$；

(6) $\lambda \odot (\mu \odot a) = \lambda \odot a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot a$；

(7) $(\lambda + \mu) \odot a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu = (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a)$；

(8) $\lambda \odot (a \oplus b) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$ 其中 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，$\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

故 $\mathbf{R}^+$ 构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

从这个例子可以看到线性空间中定义的加法和数乘不一定是通常意义上的加法与数乘，只是人为地把这两种运算叫做加法与数乘.

定理 1　线性空间 V 中零元素是唯一的，任一元素的负元素也是唯一的.

证　(1) 设存在两个零元素 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$，则由于 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$ 均为零元素，按零元律有

$$\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2,$$

所以

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2,$$

即 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$ 相同，与假设相矛盾，故只有一个零元素.

(2) 假设任意 $\boldsymbol{x} \in V$，存在两个负元素 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$，则根据负元律有

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z},$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z},$$

即 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 相同，故负元素唯一.

定理 2　线性空间 V 中有如下恒等式成立：

$$0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}, \quad k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad (-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}.$$

证　设 $\boldsymbol{w} = 0\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = (1+0)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，故 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}$；

设 $\boldsymbol{w} = k\boldsymbol{\theta}$，则 $k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{\theta} = k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}) = k\boldsymbol{x}$，故 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}$；

设 $\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$，故 $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{x}$.

二、线性空间的基与坐标

在线性代数中，我们已经了解 $\mathbf{R}^n$ 中向量组的代数性质诸如线性组合、线性相关与线性无关等，类似的概念和性质完全可延伸到一般的线性空间.

定义 2 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是数域 K 上线性空间 V 中的向量，且存在数域 K 中的一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的**线性组合**，此时也称向量 $\boldsymbol{x}$ 可由向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **线性表示**.

定义 3 如果存在一组不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m\in K$，使得对于向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in V$ 有

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{\theta},$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **线性相关**，否则称为**线性无关**.

线性相关性概念是线性空间中非常重要的概念，有了线性相关性才有下面的线性空间的维数、基和坐标定义.

定义 4 线性空间 V 中最大线性无关向量组所含向量个数称为 V 的**维数**，记为 $\dim V$. 当 $\dim V<+\infty$（即为 n 或 0），称 V 为**有限维空间**，否则为**无限维空间**，记 $\dim V=+\infty$.

本书所涉及的空间一般只考虑有限维情况，对于无限维情况不涉及.

定义 5 设 V 是数域 K 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\,(r\geqslant 1)$ 是 V 中 r 个任意向量，如果满足

(1) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 均可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为 V 的一个**基**或**基底**，并称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为该基的**基向量**.

基正是 V 中最大线性无关向量组，V 的维数正是基中所含元素的个数.

例 7 次数不超过 n 的实系数多项式全体记为 $P[x]_n$，即

$$P[x]_n=\left\{p_n\,\middle|\,p_n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,a_n,\cdots,a_0\in\mathbf{R}\right\}$$

为 $n+1$ 维空间，$1,x,\cdots,x^n$ 可作为它的一个基.

例 8 矩阵空间 $V=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},a_{ij}\in K\}$ 为 mn 维空间，$\boldsymbol{E}_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 可作为它的一个基.

例 9 考虑全体复数所形成的集合 $\mathbf{C}$. 如果 $K=\mathbf{C}$（复数域），则该集合对复数加法和复数的乘法构成线性空间，其基可取为 1，空间维数为 1；如果取 $K=\mathbf{R}$（实数域），则该集合对复数加法及实数对复数的数乘构成线性空间，其基可取为 $\{1,\mathrm{i}\}$，空间维数为 2.

定义 6 称线性空间 V^n 的一个基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 V^n 的一个**坐标系**，设 $\boldsymbol{x}\in V^n$，

它在该基下的线性表示式为

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n,$$

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在该坐标系中的**坐标或分量**，记为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$.

需要注意同一向量在不同坐标系下的坐标一般是不同的，但是在同一坐标系下的坐标却有下面的关系.

定理 3 线性空间 V^n 中，元素在给定基下的坐标唯一.

证 设 V^n 的一组基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，对于任意 $\boldsymbol{x}\in V^n$，若

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{x}_i,$$

则有

$$(\xi_1-\eta_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\xi_n-\eta_n)\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{\theta},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关，所以 $\xi_i-\eta_i=\boldsymbol{\theta}$，即

$$\xi_i=\eta_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

一般来说，线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质，但坐标表示却把它们统一了起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来. 更进一步，原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘.

例 10 矩阵空间 $V=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2},a_{ij}\in\mathbf{R}\}$，当基为

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22},$$

其坐标为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}.$$

当基为

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

则有

$$A = a_{11}D_1 + a_{12}(D_2 - D_1) + a_{21}(D_3 - D_2) + a_{22}(D_4 - D_3)$$
$$= (a_{11} - a_{12})D_1 + (a_{12} - a_{21})D_2 + (a_{21} - a_{22})D_3 + a_{22}D_4,$$

其坐标为

$$\beta = (a_{11} - a_{12}, a_{12} - a_{21}, a_{21} - a_{22}, a_{22})^{\mathrm{T}}.$$

显然 A 在这两组基下的坐标不同.

若 $A = E_{11}$，则在上述两组基下的坐标都是 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

三、基变换与坐标变换

线性空间 V^n 中基是不唯一的，在不同基下同一向量的坐标一般是不同的，因此，需要研究基改变时坐标变换的规律.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V^n 的基(Ⅰ), $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 V^n 的基(Ⅱ)，由于两者都是基，所以可以相互线性表示

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

即

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C,$$

其中 C 称为由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的**过渡矩阵**，上式就给出了基变换关系，可以证明，C 是可逆的. 我们还可以得到

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)C^{-1},$$

其中 C^{-1} 称为由基(Ⅱ)改变为基（Ⅰ）的过渡矩阵.

我们接着讨论向量的坐标变换问题，设 $x \in V^n$，它在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标分别为 α, β，则有

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\alpha,$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' x_i = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\beta = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C\beta,$$

可得 $\alpha = C\beta$ 或者 $\beta = C^{-1}\alpha$，称为**坐标变换公式**.

例 11 矩阵空间 $V=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2},a_{ij}\in\mathbf{R}\}$ 的两个基为

（Ⅰ）$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$；

（Ⅱ）$\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{D}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{D}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(1)求由基（Ⅰ）改变为基（Ⅱ）的过渡矩阵；

(2)求由基（Ⅱ）改变为基（Ⅰ）的坐标变换公式.

解 采用中介法求过渡矩阵.

取基（Ⅲ）为 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，由基（Ⅲ）改变为基（Ⅰ）的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_1,$$

由基（Ⅲ）改变为基（Ⅱ）的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3,\boldsymbol{D}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2,$$

所以有

$$(\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3,\boldsymbol{D}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2,$$

于是基（Ⅰ）改变为基（Ⅱ）的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$(2)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\\ \eta_4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4\\ \eta_2+\eta_3+\eta_4\\ 2\eta_1+2\eta_2+\eta_3\\ \eta_3\end{pmatrix}.$$

四、线性子空间

定义 7 设V_1是数域K上的线性空间V的一个非空子集合，且对V已有的线性运算满足以下条件：

(1) 如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$，则$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1$；

(2) 如果$\boldsymbol{x}\in V_1, k\in K$，则$k\boldsymbol{x}\in V_1$，

则称V_1是V的一个**线性子空间**，简称为**子空间**.

线性子空间具有以下性质.

性质 1 线性子空间V_1也是线性空间，且$\dim V_1\leqslant \dim V$.

性质 2 $\{\boldsymbol{\theta}\}$是V的一个线性子空间，规定$\dim\{\boldsymbol{\theta}\}=0$.

性质 3 线性子空间V_1与线性空间V有共同的零元素；V_1中元素的负元素仍在V中.

显然$V\subseteq V,\{\boldsymbol{\theta}\}\subseteq V$，$V$与$\{\boldsymbol{\theta}\}$都是$V$的子空间，分别称为**全子空间**和**零子空间**. 它们称为线性空间V的**平凡子空间**，V的其余子空间称为**非平凡子空间**.

例 12 线性空间V中，子集V_1是V的子空间的充要条件是任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$，$k,l\in K$，有$k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in V_1$.

证 充分性 当$k=l=1$时，任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$，有$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1$.

当$l=0$时，任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$，$k\in K$，有$k\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{y}\in V_1$.

故V_1是V的子空间.

必要性 任意$\boldsymbol{x}\in V_1$，$k\in K$，有$k\boldsymbol{x}\in V_1$，任意$\boldsymbol{y}\in V_1$，$l\in K$，有$l\boldsymbol{y}\in V_1$，所以$k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in V_1$.

设$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$为$V$中的元素，它们所有的线性组合的集合

$$V_1=\left\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m \,\middle|\, k_i\in K\right\},$$

则V_1是V子空间，称为由$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$**生（张）成的子空间**，记为$L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$或者$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$.

证 任意$\boldsymbol{x}\in V_1$，有

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m,$$

任意$\boldsymbol{y}\in V_1$，有

$$\boldsymbol{y}=l_1\boldsymbol{x}_1+l_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{x}_m,$$

于是有

$$kx+ly=(kk_1+ll_1)x_1+(kk_2+ll_2)x_2+\cdots+(kk_m+ll_m)x_m\in V_1,$$

因此V_1是V的子空间.

性质 4　元素组$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$的最大无关组是$L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$的基.

性质 5　若线性空间V^n的基为$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，则$V^n=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$.

性质 6　若$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$线性无关，则$\dim\{L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\}=m$.

性质 7　零子空间就是由零元素生成的子空间$L(\boldsymbol{\theta})$.

矩阵的值域和核空间(零空间)的理论，在线性最小二乘问题和广义逆矩阵的理论中都占有重要的地位，现定义如下.

定义 8　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$，以$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$表示$\boldsymbol{A}$的第$i$个列向量，称子空间$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$为矩阵$\boldsymbol{A}$的**值域(列空间)**，记为

$$R(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

由前面的论述及矩阵秩的概念知$R(\boldsymbol{A})\subseteq\mathbf{C}^m$，且有

$$\dim R(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$$

例 13　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的值域$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}$.

证　任意$\boldsymbol{\beta}\in R(\boldsymbol{A})$，有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}\text{；}$$

任意$\boldsymbol{\beta}\in\{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}$，有

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\in R(\boldsymbol{A}).$$

同样可定义$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的值域(行空间)为

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^m\}\subseteq\mathbf{C}^n,$$

且有

$$\dim R(\boldsymbol{A})=\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$$

定义 9 设$A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{m\times n}$，称集合$\{x|Ax=0\}$为$A$的**核空间**(**零空间**)，记为$N(A)$，即

$$N(A)=\{x|Ax=0,x\in \mathbf{C}^n\}.$$

显然有

$$\dim N(A)=n-\operatorname{rank}(A).$$

定理 4（基扩定理） 设V_1是数域K上线性空间V^n的一个m维子空间，子空间V_1的基为$x_1,x_2,\cdots,x_m$，则存在$x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n\in V^n$使得$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$是$V^n$的一组基.

证 当$m=n$时，定理显然成立.

当$m<n$时，存在$x_{m+1}\in V^n$不能由$x_1,x_2,\cdots,x_m$线性表示，故$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}$线性无关；若$m+1=n$，则$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}$是$V^n$的基；否则若$m+1<n$时，存在$x_{m+2}\in V^n$不能由$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}$线性表示，故$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2}$线性无关；若$m+2=n$，则$x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2}$是$V^n$的基；否则若$m+2<n$……依次类推，结论成立.

五、子空间的交与和

接下来我们将讨论子空间的运算和生成子空间问题.

定义 10 设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$V_1\cap V_2=\{x|x\in V_1,x\in V_2\},$$

$$V_1+V_2=\{x+y|x\in V_1,y\in V_2\}$$

分别称为V_1和V_2的**交与和**.

定理 5 若V_1和V_2是线性空间V的两个子空间，则$V_1\cap V_2,V_1+V_2$均为V的子空间.

证 (1)显然有$\theta\in V_1,\theta\in V_2$，因此$\theta\in V_1\cap V_2$，即$V_1\cap V_2$非空.

任意$x,y\in V_1\cap V_2$，有

$$x+y\in V_1,\quad x+y\in V_2,$$

所以

$$x+y\in V_1\cap V_2.$$

任意 $\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2, k\in K$ 有

$$k\boldsymbol{x}\in V_1,\quad k\boldsymbol{x}\in V_2,$$

所以

$$k\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2,$$

因此 $V_1\cap V_2$ 是 V 的一个子空间.

(2) 因为 $\boldsymbol{\theta}\in V_1, \boldsymbol{\theta}\in V_2$，所以有 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}\in V_1+V_2$，即 V_1+V_2 非空.

任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V_1$ 和 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V_2$，有

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)\in V_1+V_2,\quad (\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2,\quad (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\in V_1,\quad (\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)\in V_2,$$

于是

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2,$$

对 $k\in K, k\boldsymbol{x}_1\in V_1, k\boldsymbol{y}_1\in V_2$，有

$$k(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)=k\boldsymbol{x}_1+k\boldsymbol{y}_1\in V_1+V_2,$$

因此 V_1+V_2 是 V 的子空间.

例 14　在 $\mathbf{R}^2$ 中，$V_1=L(\boldsymbol{e}_1)$, $V_2=L(\boldsymbol{e}_2)$ 的并集为

$$V_1\cup V_2=\left\{\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2)\middle|\xi_1\cdot\xi_2=0,\xi_i\in\mathbf{R}\right\}.$$

易见 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\in V_1\cup V_2$，但是 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=(1,1)\notin V_1\cup V_2$，故加法运算不封闭，因此 $V_1\cup V_2$ 不是 V 的子空间.

定理 6（维数公式）　若 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，则有

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

证　设 $\dim V_1=n_1,\dim V_2=n_2,\dim(V_1\cap V_2)=m$.

需要证明 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$.

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一个基，根据基扩定理存在

$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m}\in V_1$，使 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m}$ 成为 V_1 的一个基；

$\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{n_2-m}\in V_2$，使 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{n_2-m}$ 成为 V_2 的一个基.

考察 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m},\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{n_2-m}$，若能证明它为 V_1+V_2 的一个基，则有 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$.

因为 V_1 中任意元素都可以由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m}$ 线性表示，当然也可以由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m},\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{n_2-m}$ 线性表示，同理 V_2 中的任意元素也