HIT

数学·统计学系列

Tetrahedral Pyramid

四面体

苏化明 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

四面体

Tetrahedral Pyramid

苏化明 著

大家书系

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了有关四面体的部分内容:四面体中的面角关系;有关体积问题;四面体对棱所成的角及距离;几种特殊四面体;四面体的某些不等式与恒等式.

本书可作为中学数学的教学参考书,也可供初等数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

四面体/苏化明著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3
ISBN 978-7-5603-7236-5

Ⅰ.①四… Ⅱ.①苏… Ⅲ.①四面体-基本知识
Ⅳ.① O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 018909 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.75 字数 283 千字
版　　次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7236-5
定　　价 48.00 元

◎前言

三角形，作为最基本的平面图形之一，在几何中有着特殊而且重要的地位．人们对它的性质一直进行着广泛且深入地研究．20世纪，布洛卡（H. Brocard）等人甚至创立了"新三角形几何学"，专门挖掘三角形的性质，掀起"三角形热"．和平面几何注重三角形一样，立体几何十分注重三角形在空间的推广——四面体．很久以来，人们试图将三角形的许多性质引伸到四面体，然而事实证明，立体几何往往是一个比平面几何更复杂的学科，发展四面体的几何学要比三角形几何学困难得多，四面体的许多初等性质并不为人们所熟知，以至有些提法并不复杂的问题至今未能解决．到目前为止，只有为数不多的数学杂志对四面体的性质作了一些零散的介绍．为此，本书试图对四面体作某些系统的研究，在对有关资料进行总结的基础上，写了本书，奉献给读者．笔者在写作过程中，尽量遵循这样两条原则：第一，力求"初等"，即尽量使绝大部分内容为具有中等文化程度的人能看懂；第二，在注重严密逻辑推理的前提下，尽可能阐述某些结论所产生的背景及作者的思维活动过程，以期启迪读者的思维．当然也要指出，一方面我们所用的解题工具基本上限制在初等数学范围内；另一方面对一些不太常见或较难、较繁的四面体问题均未论及．因此，本书所包含的内容仅仅是某些方面的四面体问题．

为了方便本书的阅读，先介绍一些必要的名词与记号．

不共面的四点，它们每两点相连所得的六个线段，以及每三

点所成三角形的内部点的总体称为四面体(或三棱锥),它是最简单的多面体.这四点、六线段、四个三角形连同它们的内部分别称为四面体的顶点、棱和面;四面体的棱分为三对,没有公共端点的两棱称为对棱,对棱是异面的.以每条棱为棱的二面角,称为四面体的二面角,共有六个;以每一顶点为顶点的三面角称为四面体的三面角,共有四个.有时候我们有必要取四面之一作为底面,其余的三个面则称为侧面.

四面体中有以下几种特殊而重要的四面体:

垂心四面体——四条高线交于一点的四面体;

等腰四面体——三双对棱分别相等的四面体;

正四面体——六条棱长均相等,从而各面均为正三角形的四面体;

直角四面体——有一个三面角的三个面角均为直角的四面体.

为行文方便,在四面体 $ABCD$ 中,我们把顶点 A,B,C,D 所对的面的面积和该点到所对面的距离分别用 S_A,S_B,S_C,S_D 和 h_A,h_B,h_C,h_D 表示;面 S_A 与 S_B 所夹的二面角用 $\widehat{S_AS_B}$ 表示,等等.这些符号以后均不用再说明.

本书的写作是湖南省澧县的田隆岗老师提议的,而且书中有些内容也出自于他的手笔,因此作者衷心感谢田老师为本书的编写所付出的辛勤劳动.

作者还要感谢哈尔滨工业大学出版社的领导及工作人员,特别感谢刘培杰先生对本书的出版所给予的支持和帮助.

作者殷切希望有志于四面体研究的同仁能写出更为全面而且可读性强的四面体著作.

目录

第1章 面角关系

在三角形中,边角关系主要是由勾股定理、射影定理以及正、余弦定理等来刻画的.本章将讨论与三角形的边角关系相类似的四面体的面和有关的角之间的关系.

1.1 射影定理

在$\triangle ABC$中,我们熟知

$$a=b\cos C+c\cos B,b=c\cos A+a\cos C,c=a\cos B+b\cos A$$

这就是三角形的射影定理.在四面体中,也有相应的定理存在,即

定理 1.1(射影定理) 在四面体$ABCD$中,有

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_BS_A}+S_C\cos\widehat{S_CS_A}+S_D\cos\widehat{S_DS_A}\quad(1.1)$$

$$S_B=S_A\cos\widehat{S_AS_B}+S_C\cos\widehat{S_CS_B}+S_D\cos\widehat{S_DS_B}\quad(1.2)$$

$$S_C=S_A\cos\widehat{S_AS_C}+S_B\cos\widehat{S_BS_C}+S_D\cos\widehat{S_DS_C}\quad(1.3)$$

$$S_D=S_A\cos\widehat{S_AS_D}+S_B\cos\widehat{S_BS_D}+S_C\cos\widehat{S_CS_D}\quad(1.4)$$

在证明定理1.1的过程中,需用到如下的

引理 1.1 如图1-1所示,设$\triangle ABC$与平面M的夹角为$\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$,$AB$在平面$M$内,点$C'$为点$C$在平面$M$上的

射影,则

$$S_{\triangle ABC'}=S_{\triangle ABC}|\cos\alpha|$$

此处 $S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle ABC'}$ 分别表示$\triangle ABC$ 和它在平面上的射影$\triangle ABC'$的面积.

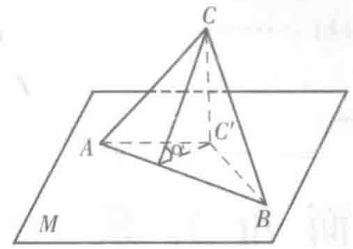

图 1-1

此引理的证明较易,这里从略.

下面证明定理 1.1.

设顶点 A 所在对面上的射影为 A',以下分三种情况来证明.

Ⅰ.点 A'在$\triangle BCD$ 内(图 1-2),则此时有

$$0<\widehat{S_AS_B},\widehat{S_AS_C},\widehat{S_AS_D}<\frac{\pi}{2}$$

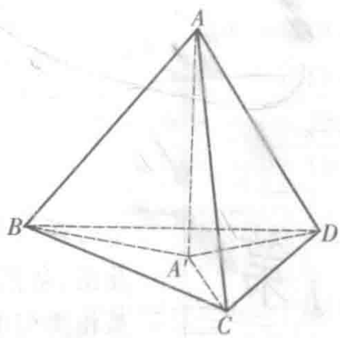

图 1-2

由引理 1.1,得

$$S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_DS_A}$$

$$S_{\triangle A'CD}=S_B\cos\widehat{S_BS_A}$$

$$S_{\triangle A'BD}=S_C\cos\widehat{S_CS_A}$$

而

$$S_A=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle A'CD}+S_{\triangle A'BD}$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_BS_A}+S_C\cos\widehat{S_CS_A}+S_D\cos\widehat{S_DS_A}$$

Ⅱ.点 A'在$\triangle BCD$ 的某一边上,不妨设在 CD 上.

1°.点 A'在 C,D 两点之间(图 1-3),则此时有

$$0<\widehat{S_AS_C},\widehat{S_AS_D}<\pi,\widehat{S_AS_B}=\frac{\pi}{2}$$

于是

$$S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_DS_A},S_{\triangle A'BD}=S_C\cos\widehat{S_CS_A},S_{\triangle A'CD}=S_B\cos\widehat{S_BS_A}=0$$

而

$$S_A=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle A'BD}$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_BS_A}+S_C\cos\widehat{S_CS_A}+S_D\cos\widehat{S_DS_A}$$

2°.点 A'与 C 或 D 重合,不妨设 A'与 D 重合(图 1-4),则有

$$0<\widehat{S_AS_D}<\frac{\pi}{2},\widehat{S_BS_A}=\widehat{S_CS_A}=\frac{\pi}{2}$$

于是

$$S_A=S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_DS_A},S_B\cos\widehat{S_BS_A}=S_C\cos\widehat{S_CS_A}=0$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_BS_A}+S_C\cos\widehat{S_CS_A}+S_D\cos\widehat{S_DS_A}$$

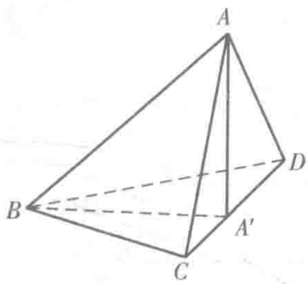

图1-3

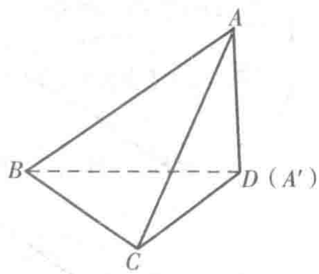

图1-4

Ⅲ. 点A'在$\triangle BCD$之外，有如下三种情形：

1°. 点A'在$\triangle BCD$的某一边的延长线上，不妨设在BC的延长线上(图1-5)，则有

$$\frac{\pi}{2}<\widehat{S_BS_A}<\pi,0<\widehat{S_CS_A}<\frac{\pi}{2},\widehat{S_DS_A}=\frac{\pi}{2}$$

于是

$$-S_{\triangle A'CD}=S_B\cos\widehat{S_BS_A}$$

$$S_{\triangle A'BD}=S_C\cos\widehat{S_CS_A}$$

$$S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_DS_A}=0$$

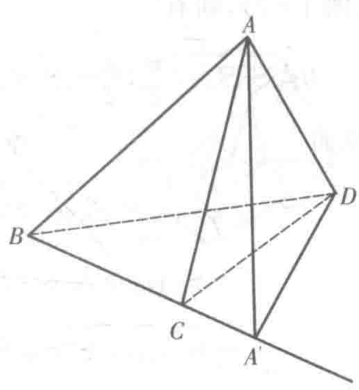

图1-5

而

$$S_A=S_{\triangle A'BD}-S_{\triangle A'CD}$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_BS_A}+S_C\cos\widehat{S_CS_A}+S_D\cos\widehat{S_DS_A}$$

2°. 点A'在$\triangle BCD$的某两边所成的角内，不妨设点A'在$\angle DBC$之内(图1-6)，则有

$$\frac{\pi}{2}<\widehat{S_B S_A}<\pi$$

$$0<\widehat{S_C S_A},\widehat{S_D S_A}<\frac{\pi}{2}$$

从而

$$S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_D S_A}$$

$$S_{\triangle A'BD}=S_C\cos\widehat{S_C S_A}$$

$$-S_{\triangle A'CD}=S_B\cos\widehat{S_B S_A}$$

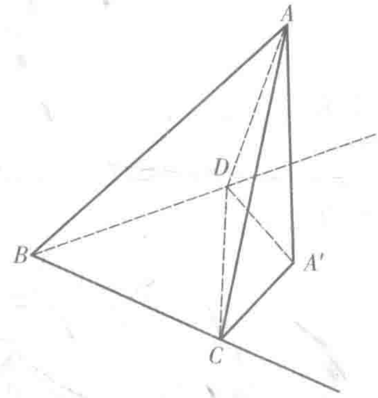

图 1-6

又

$$S_A=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle A'BD}-S_{\triangle A'CD}$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_B S_A}+S_C\cos\widehat{S_C S_A}+S_D\cos\widehat{S_D S_A}$$

3°. 点 A' 在 $\triangle BCD$ 的某一内角的对顶角之内，不妨设它在 $\angle BDC$ 的对顶角内(图 1-7)，则有

$$0<\widehat{S_D S_A}<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<\widehat{S_C S_A},\widehat{S_B S_A}<\pi$$

从而

$$S_{\triangle A'BC}=S_D\cos\widehat{S_D S_A}$$

$$-S_{\triangle A'BD}=S_C\cos\widehat{S_C S_A}$$

$$-S_{\triangle A'CD}=S_B\cos\widehat{S_B S_A}$$

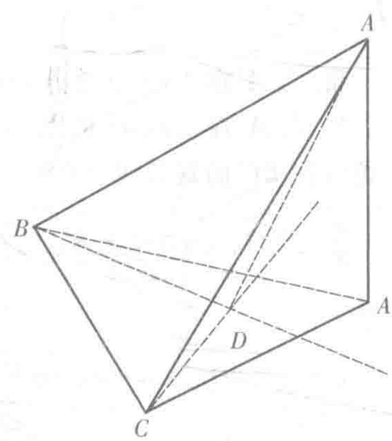

图 1-7

又

$$S_A=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle A'BC}-S_{\triangle A'BD}-S_{\triangle A'CD}$$

所以

$$S_A=S_B\cos\widehat{S_B S_A}+S_C\cos\widehat{S_C S_A}+S_D\cos\widehat{S_D S_A}$$

综合Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ知式(1.1)成立. 同理可证(1.2)，(1.3)，(1.4)三式亦成立.

这就证明了四面体中的射影定理，它可叙述为：在四面体中，任一底面的面积，等于其余三面的面积与该面和底面所夹二面角的余弦之积的和.

1.2　三面角的面角与二面角的关系

对于四面体的任一顶点的三面角，三个面角与其所夹二面角有如下的关系：

定理 1.2　在四面体 $ABCD$ 中，设顶点 A 处的三个面角 $\angle BAC=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$\angle DAB=\gamma$，则

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{S_BS_C} \tag{1.5}$$

$$\cos\beta=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\widehat{S_CS_D} \tag{1.6}$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{S_DS_B} \tag{1.7}$$

为证这一定理，我们先证如下的

引理 1.2　已知二面角 $M-PQ-N$ 的平面角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$. 过棱 PQ 上一点 A 分别在平面 M，N 内作射线 AB，AC，设 $\angle QAB=\theta_1$，$\angle QAC=\theta_2$，$\angle BAC=\theta(0<\theta,\theta_1,\theta_2<\pi)$，则

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi \tag{1.8}$$

证　只考虑 θ_2 为锐角的情形.

1°. 若 $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$.

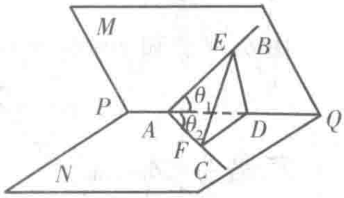

图 1-8

如图 1-8，在 AQ 上任取一点 D，过点 D 作 $DE\perp AQ$ 交 AB 于点 E，作 $DF\perp AQ$ 交 AC 于点 F，则 $\angle EDF=\varphi$. 联结 EF，在 $\triangle AEF$ 中由余弦定理，得

$$\cos\theta=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{2AE\cdot AF}$$

但

$$AE^2=AD^2+DE^2,AF^2=AD^2+DF^2,DE^2+DF^2-EF^2=2DE\cdot DF\cos\varphi$$

于是

$$\cos\theta=\frac{AD^2+DE^2+AD^2+DF^2-EF^2}{2AE\cdot AF}=$$

$$\frac{2AD^2+(DE^2+DF^2-EF^2)}{2AE\cdot AF}=$$

$$\frac{AD}{AE}\cdot\frac{AD}{AF}+\frac{DE}{AE}\cdot\frac{DF}{AF}\cdot\cos\varphi=$$
$$\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$$

2°. 若 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$.

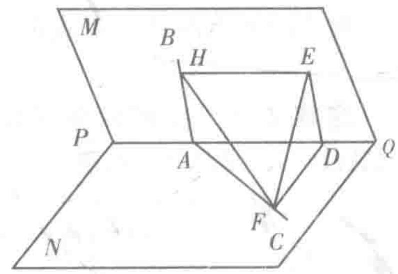

图 1－9

如图 1－9，在 AQ 上任取一点 D，过 D 作 $DF\perp AQ$ 交 AC 于点 F，作 $DE/\!/AB$，$EH/\!/AQ$ 交 AB 于点 H，则四边形 $ADEH$ 为矩形.

联结 EF，FH，易知$\triangle EFH$ 为直角三角形，$\angle EDF=\varphi$.

在$\triangle AFH$ 中，由余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{AF^2+AH^2-FH^2}{2AF\cdot AH}$$

但

$$AH=DE,AD=EH,AF^2=AD^2+DF^2$$
$$FH^2=EF^2+EH^2,DE^2+DF^2-EF^2=2DE\cdot DF\cos\varphi$$

所以

$$\cos\theta=\frac{DF}{AF}\cos\varphi=\sin\theta_2\cos\varphi$$

由 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 知 $\cos\theta_1=0$，$\sin\theta_1=1$，因此有

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$$

3°. 若 $\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$.

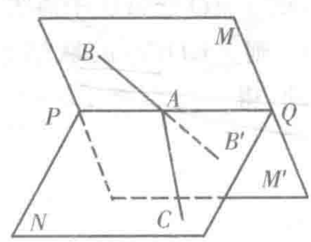

图 1－10

如图 1－10，延长 BA 至点 B'，设 B' 所在的半平面为 M'，则二面角 $M'-PQ-N$ 的平面角为 $\pi-\varphi$，且$\angle B'AQ=\pi-\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$\angle B'AC=\pi-\theta$. 显然，对于二面角 $M'-PQ-N$，1°的条件得到满足，因此

$$\cos(\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta_1)\cos\theta_2+\sin(\pi-\theta_1)\sin\theta_2\cos(\pi-\varphi).$$

即

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$$

综合 1°，2°，3°可知，当 $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ 时，引理 1.2 成立；类似地可以证明当

$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_1<\pi$ 时,引理 1.2 也成立.

由引理 1.2 来证明定理 1.2 是容易的.

事实上,只需取 $\theta=\alpha,\theta_1=\beta,\theta_2=\gamma,\varphi=\widehat{S_BS_C}$,就有

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{S_BS_C}$$

同理可证(1.6),(1.7)两式亦成立.

定理 1.3　在四面体 $ABCD$ 中,过顶点 A 的三面角 $A-BCD$ 的三个面角 $\angle BAC=\alpha,\angle CAD=\beta,\angle DAB=\gamma,AD,AB,AC$ 与其所对面的夹角分别为 θ_1,θ_2,θ_3,则有

$$\sin\theta_1=\sin\beta\sin\widehat{S_DS_B}=\sin\gamma\sin\widehat{S_CS_D}\tag{1.9}$$

$$\sin\theta_2=\sin\gamma\sin\widehat{S_BS_C}=\sin\alpha\sin\widehat{S_DS_B}\tag{1.10}$$

$$\sin\theta_3=\sin\alpha\sin\widehat{S_CS_D}=\sin\beta\sin\widehat{S_BS_C}\tag{1.11}$$

证　仅就 θ_2 为锐角的情形来证式(1.10),其余的情形(θ_2 为直角、钝角)的证明留给读者.

如图 1-11,自点 B 作底面$\triangle ACD$ 的垂线,垂足设为 H.作 $HE\perp AD$,E 为垂足,易知 $BE\perp AD$,$\angle BEH=\widehat{S_BS_C}$.

在 $Rt\triangle ABH$ 中,$BH=AB\sin\angle BAH=AB\sin\theta_2$,在 $Rt\triangle ABE$ 中,$BE=AB\sin\gamma$,在 $Rt\triangle BEH$中,$BH=BE\sin\widehat{S_BS_C}$.由此三式,即得

$$\sin\theta_2=\sin\gamma\sin\widehat{S_BS_C}$$

同理可证

$$\sin\theta_2=\sin\alpha\sin\widehat{S_DS_B}$$

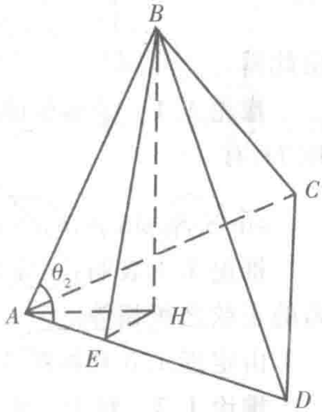

图 1-11

由此式(1.10)得证,类似的方法可证式(1.9),(1.11).

由定理 1.2,有

$$\cos\widehat{S_CS_D}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

于是

$$\sin \widehat{S_C S_D}=\sqrt{1-\cos^2 \widehat{S_C S_D}}=$$

$$\frac{\sqrt{\sin^2\gamma\sin^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\gamma\cos^2\alpha}}{\sin\gamma\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

记

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\sqrt{\begin{vmatrix}1 & \cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma\\ \cos\beta & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}}=S(A)$$

并称 $S(A)$ 为三面角 $A-BCD$ 的特征值，则有

$$\sin \widehat{S_C S_D}=\frac{S(A)}{\sin\gamma\sin\alpha} \tag{1.12}$$

同理有

$$\sin \widehat{S_D S_B}=\frac{S(A)}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{1.13}$$

$$\sin \widehat{S_B S_C}=\frac{S(A)}{\sin\beta\sin\gamma} \tag{1.14}$$

由此得

推论 1.1 沿用前面定理中的符号，在四面体 $ABCD$ 中，对于三面角 $A-BCD$，有

$$\sin \widehat{S_C S_D}\sin\gamma\sin\alpha=\sin \widehat{S_D S_B}\sin\alpha\sin\beta=\sin \widehat{S_B S_C}\sin\beta\sin\gamma=S(A) \tag{1.15}$$

推论 1.1 表明：三面角的三个面角中任意两个面角与这两个面所夹的二面角的正弦之积相等.

由定理 1.3 和推论 1.1 又可得到

推论 1.2 对于三面角 $A-BCD$，有

$$\sin\alpha\sin\theta_1=\sin\beta\sin\theta_2=\sin\gamma\sin\theta_3=S(A) \tag{1.16}$$

由式(1.15)，可得

$$\sin \widehat{S_C S_D}\sin \widehat{S_D S_B}\sin\alpha=\frac{S^2(A)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

同理有

$$\sin \widehat{S_D S_B}\sin \widehat{S_B S_C}\sin\beta=\frac{S^2(A)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\sin \widehat{S_B S_C} \sin \widehat{S_C S_D} \sin \gamma = \frac{S^2(A)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

因此有

推论 1.3　对于三面角 $A-BCD$,有

$$\sin \widehat{S_C S_D} \sin \widehat{S_D S_B} \sin \alpha = \sin \widehat{S_D S_B} \sin \widehat{S_B S_C} \sin \beta = \sin \widehat{S_B S_C} \sin \widehat{S_C S_D} \sin \gamma = \frac{S^2(A)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \tag{1.17}$$

由定理 1.3 和推论 1.3 又可得

推论 1.4　对于三面角 $A-BCD$,有

$$\sin \widehat{S_B S_C} \sin \theta_1 = \sin \widehat{S_C S_D} \sin \theta_2 = \sin \widehat{S_D S_B} \sin \theta_3 = \frac{S^2(A)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \tag{1.18}$$

再由推论 1.1 还可得到

推论 1.5　对于三面角 $A-BCD$,有

$$\frac{\sin \widehat{S_B S_C}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \widehat{S_C S_D}}{\sin \beta} = \frac{\sin \widehat{S_D S_B}}{\sin \gamma} = \frac{S(A)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \tag{1.19}$$

例 1.1(1982 年全国数学竞赛试题)　已知四面体 $S-ABC$ 中,$\angle ASB = \frac{\pi}{2}$,$\angle ASC = \alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,$\angle BSC = \beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$,以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ,求证

$$\theta = \pi - \arccos(\cot \alpha \cdot \cot \beta)$$

证　由题设条件,根据定理 1.2,有

$$\cos \angle ASB = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta$$

因为

$$\cos \angle ASB = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

所以

$$\cos \theta = -\cot \alpha \cot \beta$$

又 α,β 皆为锐角,且 $0<\theta<\pi$,故有

$$\theta = \arccos(-\cot \alpha \cot \beta) = \pi - \arccos(\cot \alpha \cdot \cot \beta)$$

类似上例,如果知道了三面角的三个面角,我们可以利用定理 1.2 求出任何两个面所夹的二面角.当然还要指出,如果知道了三面角的三个二面角,也可

以利用下面的公式求出三个面角

$$\cos \widehat{S_BS_C}=-\cos \widehat{S_CS_D}\cos \widehat{S_DS_B}+\sin \widehat{S_CS_D}\sin \widehat{S_DS_B}\cos \alpha \tag{1.20}$$

$$\cos \widehat{S_CS_D}=-\cos \widehat{S_DS_B}\cos \widehat{S_BS_C}+\sin \widehat{S_DS_B}\sin \widehat{S_BS_C}\cos \beta \tag{1.21}$$

$$\cos \widehat{S_DS_B}=-\cos \widehat{S_BS_C}\cos \widehat{S_CS_D}+\sin \widehat{S_BS_C}\sin \widehat{S_CS_D}\cos \gamma \tag{1.22}$$

而这三个等式的证明我们留给读者.

例 1.2 在四面体 $ABCD$ 中,过棱 AD,AB,AC 的二面角的大小分别为 $90°,60°,60°$,求证:AD 与 $\triangle ABC$ 所在平面所成的角为 $45°$角.

证 由已知条件知 $\widehat{S_BS_C}=90°,\widehat{S_CS_D}=\widehat{S_DS_B}=60°$,故由式(1.21)可求得 $\cos \beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\sin \beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

再由式(1.9)得,$\sin \theta_1=\sin \beta\sin \widehat{S_DS_B}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\theta_1=45°$,即 AD 与 $\triangle ABC$ 所在平面所成的角为 $45°$角.

例 1.3 若 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$,且 $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$,则以 α,β,γ 为面角构成一个三面角的充要条件是 $\cos(\alpha+\beta)<\cos \gamma<\cos(\alpha-\beta)$.

证 必要性.设 α,β,γ 为三面角 $A-BCD$ 的三个面角,$\angle BAC=\alpha,\angle CAD=\beta,\angle DAB=\gamma$,则由定理 1.2 的式(1.7)得

$$\cos \gamma=\cos \alpha\cos \beta+\sin \alpha\sin \beta\cos \widehat{S_DS_B}$$

因为

$$0<\alpha,\beta,\widehat{S_DS_B}<\pi,\sin \alpha>0,\sin \beta>0,-1<\cos \widehat{S_DS_B}<1$$

所以

$$\cos \alpha\cos \beta-\sin \alpha\sin \beta<\cos \gamma<\cos \alpha\cos \beta+\sin \alpha\sin \beta$$

此即

$$\cos(\alpha+\beta)<\cos \gamma<\cos(\alpha-\beta)$$

充分性.若 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi,\alpha+\beta+\gamma<2\pi$,且有 $\cos(\alpha+\beta)<\cos \gamma<\cos(\alpha-\beta)$.不失一般性,不妨设 $\alpha\geqslant\beta$,于是 $0\leqslant\alpha-\beta<\pi$.下面分两种情况讨论.

当 $\alpha+\beta\geqslant\pi$ 时,因为 $0<\gamma<\pi$,所以 $\gamma<\alpha+\beta$.又 $0\leqslant\gamma,\alpha-\beta<\pi$,且 $\cos \gamma<\cos(\alpha-\beta)$,所以 $\gamma>\alpha-\beta$,即有 $\alpha-\beta<\gamma<\alpha+\beta$.

当 $0<\alpha+\beta<\pi$ 时,因为 $0<\gamma,\alpha-\beta,\alpha+\beta<\pi$,且有 $\cos(\alpha+\beta)<\cos \gamma<$