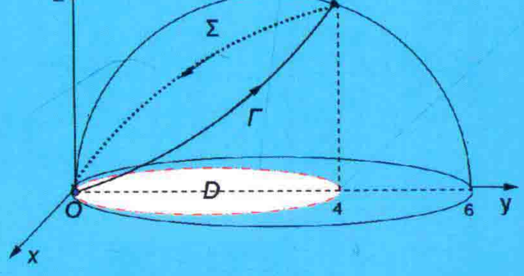
高等数学（下）

第二版

陈　仲　范红军　编著



南京大学出版社

高等数学（下）

第二版

陈　仲　范红军　编著

南京大学出版社

内容简介

本书是普通高校本科“高等数学”课程的教材. 全书有两册:《高等数学(上)》,包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章;《高等数学(下)》,包含偏导数与全微分、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、级数・广义积分收敛性、常微分方程等五章;

本书在深度和广度上符合教育部审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》的知识范围. 编写时注重数学的思想和方法,部分内容有更新与优化,并适当地渗透现代数学思想,适合培养高素质人才的目标.

本书内容丰富,叙述详细,讨论深刻,可供综合性大学、理工科大学、师范大学等作为“高等数学”课程的教材,可供参加全国硕士生考研、参加数学竞赛的学生作为参考书,可供广大科技工作者作为自学“高等数学”的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 陈仲,范红军编著. —2 版. —南京:南京大学出版社,2017.7
ISBN 978-7-305-18691-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②范… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 109603 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 **高等数学(下)(第二版)**
编　　著 陈　仲　范红军
责任编辑 姚　燕　刘　灿　　编辑热线 025-83597482

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京人文印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 17　字数 413 千
版　　次 2017 年 7 月第 2 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-18691-2
定　　价 35.00 元

网址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025) 83594756

目　　录

第五章　偏导数与全微分

第六章　二重积分与三重积分

第七章　曲线积分与曲面积分

第八章 级数·广义积分收敛性

第九章 常微分方程

第五章 偏导数与全微分

在本书的前三章中,我们研究的函数是依赖于一个变元(自变量)的一元函数,但在现实世界中,常常要研究某个变量依赖于两个或两个以上的变元,表现为某客观对象的变化规律受两个或两个以上的众多因素的制约. 为了定量地刻画某客观对象的变化规律,需要作多元分析. 多元函数微分学是多元分析的基础.

§5.1 多元函数的极限与连续性

5.1.1 预备知识

1) 点集基本概念

为书写和画图的方便,下面就二维空间 $\mathbf{R}^2$ 介绍点集基本概念,这些概念也适用于 3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 和 n 维空间 $\mathbf{R}^n(n>3)$.

定义 5.1.1 (邻域) 设 $P_0\in\mathbf{R}^2$,$\delta>0$.

(1) $U_\delta(P_0)\xlongequal{\text{def}}\{P\mid P\in\mathbf{R}^2,|P_0P|<\delta\}$,称 $U_\delta(P_0)$为点 P_0 的 δ **邻域**,并称点 P_0 为**邻域的中心**,称 δ 为**邻域的半径**.

(2) $\mathring{U}_\delta(P_0)\xlongequal{\text{def}}\{P\mid P\in\mathbf{R}^2,0<|P_0P|<\delta\}$,称$\mathring{U}_\delta(P_0)$为**点 P_0 的去心 δ 邻域**,简称**去心邻域**.

定义 5.1.2 (内点 边界点 开域 闭域) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,

(1) 若 $P_0\in D$,且 $\exists\delta>0$,使得 $U_\delta(P_0)\subset D$,则称 P_0 是 D 的内点;

(2) 若 $P_1\subseteq\mathbf{R}^2$,$\forall\delta>0$,$U_\delta(P_1)$中既有点属于 D,又有点不属于 D,则称 P_1 是 D 的**边界点**;D 的边界点的集合称为 D 的**边界**,记为∂D;

(3) $\forall P\in D$,P 总是 D 的内点;又 $\forall P,Q\in D$,总存在连接 P,Q 的曲线$\overset{\frown}{PQ}$,使得$\overset{\frown}{PQ}\subset D$,则称 D 是**开域**;

(4) 若存在开域 D_1,使得 $D=D_1\cup\partial D_1$,则称 D 是**闭域**. 开域与闭域统称为**区域**.

例如下列点集

$$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1)\},D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{4}<x^2+y^2<1\right\},$$
$$D_3=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$$

都是开域(见图 5.1);

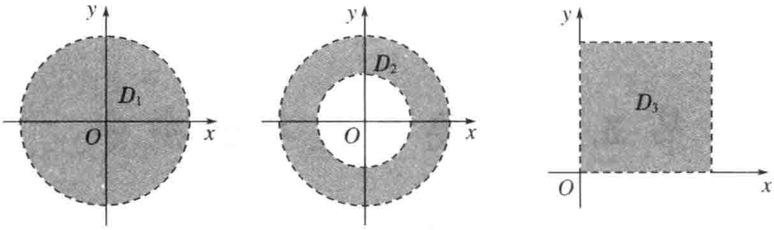


图 5.1

下列点集

$$D_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},D_5=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\},$$
$$D_6=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

都是闭域(见图 5.2).

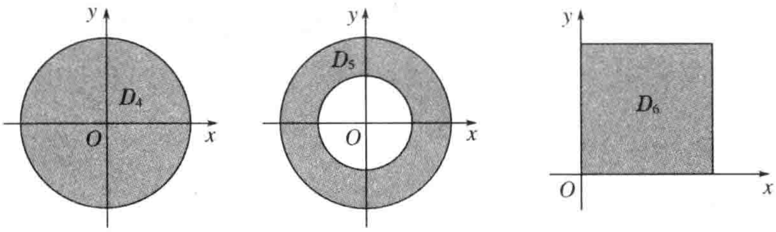


图 5.2

又如点集 $D_7=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<1,0\leqslant y<2\}$,$D_8=\{(x,y)\mid 2<x^2+4y^2\leqslant 4\}$既非开域,又非闭域.

上面例子的区域有一共同特征,它们总能包含在某个足够大的圆

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<K,K\in\mathbf{R}^+\}$$

中,所以又称为**有界区域**. 此外还有**无界区域**的概念,例如

$$D_9=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\},D_{10}=\{(x,y)\mid x^2+y^2<+\infty\},$$

都是无界区域. 这里 D_9 是无界闭域;$D_{10}=\mathbf{R}^2$,我们规定 $\mathbf{R}^2$ 既是开域又是闭域.

定义 5.1.3 (直径) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$,D 为有界区域(或点集),

$$d(D)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\max\{|P_1P_2|\mid P_1,P_2\in D\cup\partial D\}$$

称为**区域 D(或点集)的直径**.

例如上述区域 D_1,D_2,D_4,D_5 的直径都是 2,区域 D_3,D_6 的直径都是$\sqrt{2}$,D_7 的直径是 $\sqrt{5}$,D_8 的直径是 4. 又如闭区间$[0,1]$与开区间$(0,1)$的直径都是 1.

2) 多元函数概念

在第一章中,我们称特殊的映射 $f:A\to\mathbf{R}(A\subseteq\mathbf{R})$为一元函数. 与此类似的,我们来引进多元函数的概念.

定义 5.1.4 (多元函数) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$,我们称映射

$$f:D\to\mathbf{R}$$

为定义在 D 上的**n 元函数**. n 元函数也常常记为

$$u=f(P),P\in D,$$

或

$$u=f(x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in D.$$

变量 $x_1,\cdots,x_n$ 称为**自变量**，u 称为**因变量**，D 称为 f 的**定义域**，记为 $D(f)$.

对于 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$，对应的函数值记为 $u_0=f(P_0)=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)$. 当 $P\in D$ 时，全体函数值的集合

$$f(D)\xlongequal{\text{def}}\{f(P)\mid P\in D\}$$

称为 f 的**值域**.

设 $E\subseteq f(D)$，我们称 $f^{-1}(E)=\{P\mid f(P)\in E\}$ 为E **的原像**.

在记号上，常常将二元函数 $f:D\to\mathbf{R}(D\subseteq\mathbf{R}^2)$ 记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D;$$

将三元函数 $f:D\to\mathbf{R}(D\subseteq\mathbf{R}^3)$ 记为

$$u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D.$$

二元函数和二元以上的函数称为**多元函数**.

多元函数常常用解析表达式给出. 并不明确标明定义域，此时定义域理解为：使这个解析表达式中因变量有确定的实数值时，自变量所容许变化的范围. 如此确定的定义域称为**自然定义域**. 但需注意，由实际问题引进的函数，其定义域有时只是自然定义域的某子集. 例如矩形的面积公式 $\sigma=xy$，这里 x,y 分别是矩形的长与宽，该函数的定义域为第一象限，而自然定义域为 $\mathbf{R}^2$.

多元函数是多元微积分研究的主要对象. 在这一章中我们重点研究二元函数，但研究的方法和结论原则上适用于其他多元函数. 值得注意的是，一元函数的许多研究方法和性质在多元函数中得到了继承，但是又有若干结论与多元函数有着本质的区别（如下一节的可微性），在学习时要注意比较与对照.

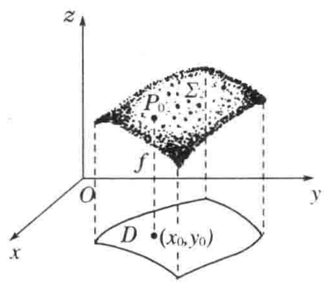


图 5.3

在 §4.3 中，我们曾介绍了各种二次曲面，例如旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，这个空间曲面的方程定义一个二元函数. 一般说来，二元函数

$$f:D\to\mathbf{R}\ (D\subseteq\mathbf{R}^2) \tag{5.1.1}$$

的图形是一空间曲面. 当(x_0,y_0)在其定义域 D 上确定后，由二元函数(5.1.1)可确定 $z_0=f(x_0,y_0)$，从而得到空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$（图 5.1.1），当(x,y)取遍定义域 D 时，点(x,y,z)的集合构成一空间曲面 Σ，这一空间曲面 Σ 就是二元函数(5.1.1)的图形.

与一元函数可表示为隐函数一样，二元函数也可用隐函数形式给出. 例如球面方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{5.1.2}$$

可确定两个二元函数

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \tag{5.1.3}$$

其中一个的图形是上半球面，另一个的图形是下半球面. 我们称(5.1.3)中的函数为由方程(5.1.2)确定的隐函数. 一般地，我们有

定义 5.1.5 (隐函数) 若由方程式

$$F(x,y,z)=0 \tag{5.1.4}$$

可确定二元函数 $z=f(x,y)$,或 $x=g(y,z)$,或 $y=h(z,x)$,则称这些函数为由方程(5.1.4)确定的**隐函数**.

值得指出的是,从方程式(5.1.4)解出显函数常常是很困难的,有时甚至办不到.例如方程式

$$e^{x+z}+\sin(x+y+z)=0$$

可确定 z 是 x,y 的二元函数,但不能解出用初等函数表示的显函数形式,参见 5.2.4.

与一元复合函数与初等函数概念相对应,我们可类似地定义**多元复合函数**与**多元初等函数**的概念,例如多元初等函数定义为:由自变量(两个以上)与常数运用基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的解析表达式.

下面介绍多元函数的有界性概念.

定义 5.1.6 (有界性) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$,函数 $f:D\to\mathbf{R}$,若 $\exists M\in\mathbf{R}(m\in\mathbf{R})$,使得 $\forall P\in D$,总有 $f(P)\leqslant M(\geqslant m)$,则称函数 f 在 D 上**上有界(下有界)**,称 $M(m)$ 为函数 f 在 D 上的**上界(下界)**.若函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 既上有界又下有界,则称 f 在 D 上**有界**,记为 $f:D\to\mathbf{R}$ 有界.

最后介绍 3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 的多元向量函数概念.

定义 5.1.7 (多元向量函数) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$,函数 $f,g,h:D\to\mathbf{R}$,称

$$\boldsymbol{A}(x_1,\cdots,x_n)\xlongequal{\text{def}}(f(x_1,\cdots,x_n),g(x_1,\cdots,x_n),h(x_1,\cdots,x_n))$$

为 3 维空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的n **元向量函数**.

在记号上,常常将二元向量函数记为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v));$$

将三元向量函数记为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)).$$

下面举几个求定义域和值域的例子.

例 1 二元函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为开域

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\},$$

其值域是

$$f(D)=\{z\,|\,1\leqslant z<+\infty\}.$$

例 2 二元函数 $z=\arccos\dfrac{x}{a}-\arcsin\dfrac{y}{b}$($a>0,b>0$ 为常数)的定义域为闭域

$$D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant a,|y|\leqslant b\},$$

其值域是

$$f(D)=\left\{z\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqslant z\leqslant\frac{3}{2}\pi\right\}.$$

例 3 三元函数 $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$的定义域为开域

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1\},$$

其值域是

$$f(D)=\{u \mid -\infty<u\leqslant 0\}.$$

例 4 分段函数

$$z=\begin{cases}1, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1;\\ x^2+y^2, & \text{当 } 1<x^2+y^2\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域为闭域

$$D=\{(x,y)\}x^2+y^2\leqslant 2\},$$

其值域是

$$f(D)=\{z \mid 1\leqslant z\leqslant 2\}.$$

5.1.2 多元函数的极限

极限概念是刻画函数形态、变化趋势,以及研究多元微积分的重要工具.下面我们就二元函数进行叙述.二元函数比一元函数只多了一个自变量,但极限问题复杂得多.

定义 5.1.8 (二元函数的极限) 设区域 $G\subseteq\mathbf{R}^2$,函数 $f:G\to\mathbf{R}$,$P_0(x_0,y_0)$是G的内点或边界点,若$\exists A\in\mathbf{R}$,使得$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$P(x,y)\in G$,且$0<|PP_0|<\delta$时,有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x,y)$ 在 $P\to P_0$ 时有有限极限 A,记为

$$\lim_{P\to P_0}(P)=A,$$

或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

这个极限也常常称为**二重极限**.

二重极限的复杂性在于二元函数的定义域G是$\mathbf{R}^2$中的点集,且点$P(x,y)$在G中须以任意方式去接近P_0,这些方式我们无法一一取到.正因为这些,二元函数求极限的问题不像一元函数那样可以有各种规范的方法.通常只能先估计出极限值,再利用定义去验证;或将问题化为一元函数求极限的问题,例如

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy^2)}{x}=\lim_{\substack{u\to 0\\ y\to 2}}y^2\ \frac{\sin u}{u}=4.$$

但是,当我们在G中取两个不同的方式让动点P趋向于点P_0,$f(x,y)$有不同的极限值时,则可以断言:函数$f(x,y)$在$P\to P_0$时无有限极限.

例 5 试用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+2y)=7$.

证 当$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$时,

$|(3x+2y)-7|=|3(x-1)+2(y-2)|\leqslant 3|x-1|+2|y-2|\leqslant 5\delta$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,当$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$时,就有

$$|(3x+2y)-7|<\varepsilon.$$

由此得证. □

例 6 试求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解法1 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时,

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\delta,$$

所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=2\varepsilon$,当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时,就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

解法2 记$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,令$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,则

$$|PP_0|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\rho,$$
$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\cos\theta\sin\theta,$$

由于

$$|f(x,y)-0|=|\rho\cos\theta\sin\theta|\leqslant\rho,$$

所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,当$0<\rho<\delta$时,就有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$,因此

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

例7 试证$f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在$(x,y)\to(0,0)$时无极限.

解 令$x=\rho\cos\theta_0,y=\rho\sin\theta_0,\theta_0$为常数,且$0\leqslant\theta_0<2\pi$,则

$$|PP_0|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\rho,$$
$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0)=\cos\theta_0,$$

由于点P沿着直线$L:x=\rho\cos\theta_0,y=\rho\sin\theta_0$趋向于$P_0(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(x,y)\in L}}f(x,y)=\cos\theta_0,$$

其极限值随着θ_0的变化(即随着直线L的变化)而取不同的数值,所以函数$f(x,y)$在$(x,y)\to(0,0)$时无极限. □

例8 试证函数

$$f(x,y)=\frac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$$

当点$P(x,y)$沿任意直线方向趋向于点$P_0(0,0)$时,极限皆存在,而且相等;但是,函数$f(x,y)$在$P_0(0,0)$无极限.

解 当点P沿直线$y=kx$趋向于P_0时,

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{k^2x}{(1+k^4x^2)^2}=0;$$

当点P沿着y轴趋向于P_0时,

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{y\to0}f(0,y)=0,$$

所以沿着任意直线方向让$P\to P_0$,$f(x,y)$的极限皆存在,而且极限值皆为0.

又让点 P 沿抛物线 $y=\sqrt{x}$ 趋向于 P_0 时，

$$\lim_{\substack{y=\sqrt{x}\\x\to0+}} f(x,y)=\lim_{x\to0_+} f(x,\sqrt{x})=\lim_{x\to0_+}\frac{x^4}{(2x^2)^2}=\frac{1}{4},$$

由于按两种方式取极限时，$f(x,y)$ 有不同的极限值，所以函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 无极限. □

最后指出：1.2.3 与 1.2.4 中关于无穷小的定理和由此导出的极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，这里不拟详细论述.

最后介绍一个与二重极限不同而且容易混淆的极限概念.

定义 5.1.9 （累次极限） 先视函数 $f(x,y)$ 中的变元 y 为参数，让 $x\to x_0$，设其有有限极限，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$$

存在，再对函数 $\varphi(y)$，令 $y\to y_0$，设其极限为有限数，即

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A,$$

A 为有限数，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个**累次极限**，记为

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\xlongequal{\text{def}}\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=A.$$

交换 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 的次序，可以得到函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的另一个累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\xlongequal{\text{def}}\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=B.$$

例 9 对于函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$，试求：

1) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$；　　2) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$；　　3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$.

解

1) $\forall\, y\neq0$，$\sin\dfrac{1}{y}$ 是有界的，应用无穷小量乘有界变量仍是无穷小量的性质得

$$\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{y}=0\Rightarrow\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to0}0=0;$$

2) 在第一章中，我们已经知道 $\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在；

3) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，x 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{y}$ 是有界函数，应用无穷小量乘有界变量仍是无穷小量的性质得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\sin\frac{1}{y}=0.$$

例 10 对于函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不难求得

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}=0;\ \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=0.$$

即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个累次极限皆存在，而且相等. 下面考虑 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限，由于

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

其极限值随参数 k 的值改变，所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 无极限.

由这两个例子我们可以看出：二元函数的二重极限存在不能推断累次极限的存在；反之，两个累次极限的存在(甚至相等)，也不能推断出二重极限的存在. 关于它们之间的关系这里不拟讨论.

5.1.3 多元函数的连续性

定义 5.1.10 (连续性) 设区域 $G\subseteq\mathbf{R}^n$，函数 $f:G\to\mathbf{R}$，$P_0\in G$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $P\in G$，$|PP_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在 P_0 **连续**，记为 $f\in\mathscr{C}(P_0)$；如果 f 在 G 上每一点都连续，则称 f 在 G 上**连续**，记为 $f\in\mathscr{C}(G)$，或 $f:G\to\mathbf{R}$ 连续.

由此定义，当且仅当

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

时，$f\in\mathscr{C}(P_0)$.

对于多元函数，应用极限的运算性质可以证明：

1) 区域 $G\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的有限个连续函数的和、差、积、商(分母恒不为 0)仍为 G 上的连续函数.

2) 多元初等函数在其有定义的区域上连续.

若 $f\in\mathscr{C}(G)$，且 $P_0\in G$，则有

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

此式常用于求多元连续函数的极限.

多元函数的不连续点称为**间断点**.

例 11 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{y}\right), & \text{当 } xy\neq 0;\\ 0, & \text{当 } xy=0\end{cases}$$

在点 $P_0(0,0)$ 的连续性.

解 由于

$$|f(x,y)|\leqslant|x+y|\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\left|\cos\frac{1}{y}\right|\right)\leqslant 2(|x|+|y|)\leqslant 4\sqrt{x^2+y^2}=4\rho$$

$(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$，因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，当 $\rho<\delta$ 时，就有

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant 4\rho<\varepsilon,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $P_0(0,0)$ 连续.

例 12 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\arctan\frac{x-y}{1-x^2y^2}.$$

解 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x-y}{1-x^2y^2}$ 是二元初等函数，点 $(1,0)$ 在其定义域内，因此 $f(x,y)$ 在

(1,0)连续,所以

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

下面讨论有界闭域上的多元连续函数的性质,这些性质与闭区间上的一元连续函数的性质完全相似.

定理 5.1.1 （零点定理） 设 $G\subseteq \mathbf{R}^n$ 为闭域,函数 $f\in\mathscr{C}(G)$. 若 $P',P''\in G$,且 $f(P')f(P'')<0$,则 $\exists\,\overline{P}\in G$,使得 $f(\overline{P})=0$.

证 因 G 是区域,所以在 G 内存在连续的曲线 $P=P(t)\,(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 将 P',P'' 连接起来. 不妨设 P',P'' 分别对应于参数 α,β. 由于多元复合函数 $u=f(P(t))$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续,$f(P(\alpha))f(P(\beta))<0$, 应用一元连续函数的零点定理, 必 $\exists\, t_0\in(\alpha,\beta)$,使得 $f(P(t_0))=0$. 记 $P(t_0)=\overline{P}$,则 $f(\overline{P})=0$. □

推论 5.1.2 （介值定理） 设 $G\subseteq\mathbf{R}^n$ 为闭域,函数 $f\in\mathscr{C}(G)$,若 $P_1,P_2\in G$,μ 为满足不等式

$$f(P_1)<\mu<f(P_2)\quad(\text{或 } f(P_2)<\mu<f(P_1))$$

的任意实数,则 $\exists\,\overline{P}\in G$,使得 $f(\overline{P})=\mu$.

证 令 $F(P)=f(P)-\mu$,显然有 $F\in\mathscr{C}(G)$,且 $F(P_1)<0(>0)$,$F(P_2)>0(<0)$,由零点定理知 $\exists\,\overline{P}\in G$,使得 $F(\overline{P})=f(\overline{P})-\mu=0$,即 $f(\overline{P})=\mu$. □

定理 5.1.3 （有界性定理） 设 $G\subseteq\mathbf{R}^n$ 为有界闭域,$f\in\mathscr{C}(G)$,则 f 在 G 上有界.

定理 5.1.4 （最值定理） 设 $G\subseteq\mathbf{R}^n$ 为有界闭域,$f\in\mathscr{C}(G)$,则 f 在 G 上取到最大值与最小值.

这两个定理证明的方法与定理 1.3.9,定理 1.3.10 类似,不再赘述.

最后讨论一致连续性概念,并叙述有关定理.

定义 5.1.11 （一致连续） 设 $G\subseteq\mathbf{R}^n$,函数 $f:G\to\mathbf{R}$,若 $\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,\delta>0$(δ 仅与 ε 有关),当 $P_1,P_2\in G$,且 $|P_1P_2|<\delta$ 时,就有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon,$$

则称 f 在 G 上**一致连续**(或**均匀连续**),记为 $f\in\mathscr{U}\mathscr{C}(G)$.

容易看出,当 $G\subseteq\mathbf{R}^n$,$f\in\mathscr{U}\mathscr{C}(G)\Rightarrow f\in\mathscr{C}(G)$,但是,反过来却不一定成立.

定理 5.1.5 （康托尔定理） 设 $G\subseteq\mathbf{R}^n$ 为有界闭域,则

$$f\in\mathscr{C}(G)\ \Rightarrow\ f\in\in\mathscr{U}\mathscr{C}(G).$$

证明的方法和叙述与定理 1.3.12 完全一样,这里从略.

习题 5.1

A 组

1. (1) 设 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$,求 $G\times[0,1]$的体积;

   (2) 设 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$,求 $G\times[0,1]$的面积;

   (3) 设 $L\subset\mathbf{R}^2$ 为一直线,问 $L\times\mathbf{R}$ 是什么图形.