

三个苹果

青少年智慧馆

数学家
教你
学数学



毕达哥拉斯 教你学数列

[韩]金承泰 著 吴荣华 译

考点精讲，高分必备！

- ★ 数列的定义
- ★ 等差数列
- ★ 调和数列
- ★ 等比数列

掌握应用
攻克难题
★ 数学 ★
就得这样学！

全国百佳图书出版单位
时代出版传媒股份有限公司
黄山书社



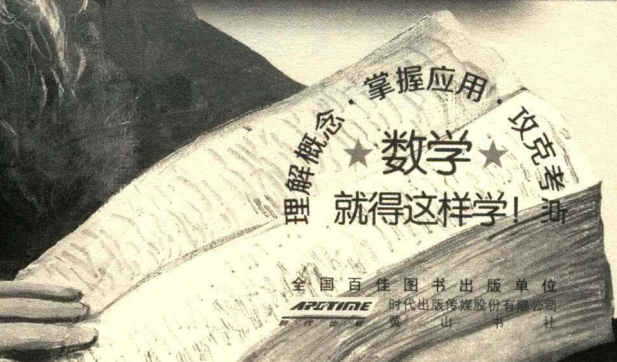
毕达哥拉斯 教你学数列

[韩]金承泰 著 吴荣华 译



考点精讲，高分必备！

- ★ 数列的定义
- ★ 等差数列
- ★ 调和数列
- ★ 等比数列



全国百佳图书出版单位
ARISTONE 时代出版传媒股份有限公司
泰山出版社

수학자가 들려주는 수학 이야기

Copyright © 2010 by JAEUM & MOEUM CO., LTD.

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Huangshan Publishing House.

This translation was published by arrangement with Jaeum & Moeum Publishing Co., through Shanghai

All One Culture Diffusion Co., Ltd.

All rights reserved.

图书在版编目 (CIP) 数据

毕达哥拉斯教你学数列 / 【韩】金承泰著; 吴荣华译. — 合肥: 黄山书社, 2015. 12

(数学家教你学数学: 中学版)

ISBN 978-7-5461-5116-8

I. ①毕… II. ①金… ②吴… III. ①数学—青少年读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 175868 号

版权合同登记号 图字: 12151528

BIDAGELASI JIAO NI XUE SHULIE

毕达哥拉斯教你学数列

【韩】金承泰 著 吴荣华 译

出品人 任耕耘

总策划 任耕耘 杨雯

执行策划 司雯

责任编辑 程景

特约编辑 刘羊 赵迪秋

装帧设计 齐娜 李斐斐

出版发行 时代出版传媒股份有限公司 (<http://www.press-mart.com>)

黄山书社 (<http://www.hspress.cn>)

地址邮编 安徽省合肥市蜀山区翡翠路 1118 号出版传媒广场 7 层 230071

印刷 安徽国文彩印有限公司

版次 2016 年 4 月第 1 版

印次 2016 年 4 月第 1 次印刷

开本 710mm×1000mm 1/16

字数 110 千

印张 10.5

书号 ISBN 978-7-5461-5116-8

定价 24.00 元

服务热线 0551-63533706

销售热线 0551-63533761

官方直营书店 (<http://hsssbook.taobao.com>)

版权所有 侵权必究

凡本社图书出现印装质量问题,

请与印制科联系。

联系电话 0551-63533725



让我们站在数学巨人的肩膀上， 以更远的目光、更广的视野去观察数学世界吧！

数学教科书往往以“结果”来揭示数学，很难使学生了解数学不断进化的过程。事实上，数学的历史是围绕着一个课题，由众多数学家刻苦研究从而揭示一个个规律性原理的演绎推理过程。

《数学家教你学数学》是古今中外的数学家以他们那亲切的声音直接给我们讲述各种数学原理的产生过程，有助于学生以“现在进行时”来理解数学，而不是以“过去完成时”来理解。

学生对数学产生畏难情绪的主要原因之一是数学较强的“抽象思维”。数学的这一特性恰恰与学生喜欢的“具体思维”相悖。要想缩短“抽象思维”和“具体思维”之间的差距，方法只有一个，那就是在尽量回避数学抽象推理的同时，尽可能地增加对数学概念和原理的具体说明。而《数学家教你学数学》正是生动再现数学教科书的内容，力争使数学“变脸”，将原来抽象的数学改头换面成为具体的数学。此外，书中引用的大量名人逸事和数学家的趣闻，使学生感到枯燥无味的数学很容易变成妙趣横生、回味无穷的数字

游戏。

从结构上看，《数学家教你学数学》首先简要介绍数学家的业绩，然后通过数学家的讲解揭示数学的内在世界和外在世界，从列举的大量例子中说明数学概念和原理，最后再通过一个小结来归纳每节课讲的内容。本丛书的这种结构可以使读者从整体上了解每个数学概念和原理。

《数学家教你学数学》紧扣中学数学教程，尽可能包含中学数学所涉及的全部内容。比如《莱布尼茨教你学记数法》讲述的是数字形成的背景、原始进制法到数位进制法的发展过程、0的出现、莱布尼茨二进制法等方面的故事，如实反映了中学一年级进制法的内容。可见这套《数学家教你学数学》丛书能够起到帮助学生消化和吸收学校数学课程的作用。

伟大的科学家牛顿留下了一句绝世名言：“If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.（如果说我比别人看得更远些，那是因为我站在了巨人的肩膀上）”没错，如果我们也站在这些数学巨人的肩膀上放眼远眺，就可以用更长远、更开阔的视野去了解数学世界。希望这套丛书能使我们的读者们都有机会站在数学巨人的肩膀上，把数学世界看得更清楚。

弘益大学数学教育系教授、《数学协奏曲》作者 朴京美



用数学眼光看穿世上的真理， 让我们亲身体会真理之伟大的“数列”的故事

如果我们的消化器官不能正常工作了，那么再好的食物也无助于我们的健康。写一本书，如果读者朋友们不感兴趣或者难以理解，那么这本书就是一堆废纸。因此，我在写这本书的时候尽量做到在内容、难易度、趣味性等方面合乎读者的口味和心理。

数列是在我们的小学数学课程里被一笔带过，并给小朋友们留下痛苦阴影的一部分数学知识，也是每次竞赛题里必定会出现的一道难题和怪题。

数列在小学数学教材中露过一面之后便消失，到了高中二年级的时候，它又以“数列”的名称再次粉墨登场，常常给我们的高中生们当头一棒，使他们感到茫然、迷惑。

可数列在数学中又是堪称“数学之花”的重要部分，是将来接受高等数学不可或缺的基础知识。为了让孩子们以平稳的心态接触这个数列，我想邀请最伟大的数学家毕达哥拉斯为我们讲解这一基础知识，好让孩子们在一片欢声笑语中轻松接触这门学科。历史上

赫赫有名的大数学家亲临我们的教室讲课，哪个小朋友不为之激动和兴奋呢？

我只希望读者就像读小说一样读这本《毕达哥拉斯教你学数列》，在轻松愉快的气氛中去征服数列这个难以攻破的堡垒。

车容旭



课 程 导 航

1

这本书的不同之处

《毕达哥拉斯教你学数列》邀请最伟大的数学家毕达哥拉斯为大家讲解数列这一数学基础知识，好让同学们在欢声笑语中轻松接触这一难度较大的知识。数列堪称“数学之花”，是数学的重要组成部分。伟大的数学家与“数学之花”同时出现在这本书里，不用看也能猜到书里肯定有能迸发出火花的精彩内容。这本书肯定能让读者很快走进并融入数列的世界里。

然而，对读者来说，数列本身是个很难理解的术语。“到底什么叫列数？”“我们真的有必要学习数列吗？”也许有不少读者会有这样的疑问。小学数学教科书中没有提及“数列”这个词，不过练习题里却出现过一些和数列有关的内容。比如：“根据下列已知数字的规律，求出第20个数。”这就是有关数列的问题。

这就是说，小学教材里实际上也包含着数列的内容，只是没有以数列的名称出现而已。小学教材中的数列内容往往出现在竞赛题和智力考试题当中，真是个可怕的东西。

现在该到了揭开数列神秘面纱的时候。我们要通过这本书，使数列的秘密完全暴露在光天化日之下啦！这是一本妙趣横生、通俗易懂的数学课外读物，只要同学们像读小说一样读下去，数列的所有奥秘就会尽收眼底。希望毕达哥拉斯的几节课能够成为同学们接近数列、进而痴迷于数列的一个契机。

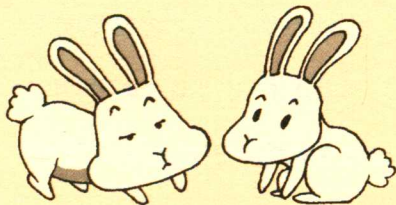
2

这本书的几个亮点

1. 以妙趣横生的故事为小学生讲述了中学数学教材里出现的数列知识。本书是站在小学生的角度来讲的，语言通俗易懂，它一定会让同学们爱不释手、一口气读下去。

2. 卡通人物超级马里奥将始终伴随着读者朋友们走完本次的数列旅行，将给读者朋友们带来无尽的乐趣，大家再也不会觉得数学是门让人讨厌的学科。

3. 本书对小学数学老师也有一定的参考价值。读完本书，老师们可利用书中妙趣横生的故事使自己的课堂更加完美、精彩。



第一课 什么是数列?

什么叫数列呢?这节课里大家将会掌握寻找数列规律的方法。

• 提前预习

数列:按一定次序排列的一列数称为数列。数列中的每一个数都叫作这个数列的项。排在第一位的数称作这个数列的第1项或首项,排在第二位的叫作第2项,排在 n 位的数叫作这个数列的第 n 项。

数列是一种特殊的函数,其定义域是正整数的集合。

——有穷数列:项数有限的数列。

——无穷数列:项数无限的数列。

• 学习方法

数列的一般表示法如下:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

——寻找数列规律的方法:

查看相邻项之间的差,即用后一项减去前一项的方法寻找数列的规律。

查看相邻项之间的比,即用后一项除以前一项的方法寻找数列的规律。

查看各项的平方数或立方数。

查看各项的倒数。

若是分数数列，将分子和分母区分开来查看其规律。

第二课 等差数列

了解和掌握等差数列。

了解等差数列的通项公式与公差。

了解高斯发明的等差数列求和的方法。

• 提前预习

——等差数列：如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列。

——公差：等差数列中相邻两项中，后一项与前一项的差。

——通项：数列中的任意一项，即 a_n 项。

• 学习方法

——等差数列的通项公式：

首项为 a ，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

——等差数列前 n 项和公式：

$$\frac{\text{项数} \times (\text{首项} + \text{末项})}{2}, \text{ 即 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}。$$

第三课 调和数列

了解和掌握调和数列。

了解等差中项和调和中项。

• 提前预习

——调和数列：由自然数（注：本书中所讲数列中的自然数不包含0，下同）的倒数组成的数列。

——等差中项：若 a, b, c 三个数按顺序排列成等差数列，那么 b 叫 a 和 c 的等差中项。等差中项是左右两项之和的 $\frac{1}{2}$ 。

——调和中项：调和数列中各项倒数组成的等差数列的等差中项。

• 学习方法

——调和数列的解法

将调和数列的各项改为其倒数，使之形成等差数列。

利用等差数列的首项和公差，求出它的通项公式。

计算所求的各项。

将等差数列的各项重新改换成它的倒数，使之回到原来的调和数列上。

——等差中项

若 a, b, c 三个数按顺序排列成等差数列，那么 b 叫 a 和 c 的等差中项，其公式如下：

$$2b = a + c \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a + c}{2}$$

——调和中项

若 a, b, c 三个数形成调和数列，那么它们满足下列公式：

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

第四课 等比数列

了解等比数列的通项公式。

了解等比中项。

• 提前预习

——等比数列：如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，这个数列就叫作等比数列。

——公比：等比数列中的相邻两项，后一项与前一项的比值。

——等比中项：若 a, b, c 三个数按顺序排列成等比数列，那么左右两个数 a 和 c 中间的那一项 b 就是等比中项。

• 学习方法

——等比数列的解法

求得公比。

求得首项。

完成通项公式。

求得问题所要求的答案。

——等比数列的特征

当 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ 是以首项 a_1 依次乘以一定的常数 r 而形成的数列的时候,这个数列就是等比数列, r 就是这个数列的公比。这时 r 的性质如下:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots$$

即等比数列是以 $n=1, 2, 3, \dots$ 为前提,形成 $a_{n+1}=ra_n$ 的数列。

等比数列还有一个重要的前提,即首项 $a_1 \neq 0$,公比 $r \neq 0$ 。

——若 a, b, c 三个数按顺序排列成等比数列,那么 b 就是 a 和 c 的等比中项。等比中项的公式如下:

$$\text{公比} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}, b^2 = ac。$$

第五课 中项与等比数列之和

了解等比数列之和。

• 提前预习

——算术平均数:所有数据的总和除以总频数所得的商,是最常用的平均值。简称为平均数或均数。

——几何平均数:是指 n 个观察值连乘积的 n 次方根。

——调和平均数:是总体各单位标志值倒数的算术平均数的倒数,也称倒数平均数。

• 学习方法

——算术平均数、几何平均数、调和平均数之间的关系

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \geq \frac{2ac}{a+c}$$

算术平均数 \geq 几何平均数 \geq 调和平均数

——首项为 a ，公比为 r 的等比数列的前 n 项和公式

$$\text{若 } r > 1, \text{ 则 } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

$$\text{若 } r < 1, \text{ 则 } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},$$

$$\text{若 } r = 1, \text{ 则 } S_n = na.$$

第六课 各种数列

了解和掌握西格玛 (Σ)。

了解和掌握高阶等差数列

• 提前预习

——西格玛 (Σ)：第18个希腊字母，用符号“ Σ ”来表示。

西格玛在数学里是表示求和的符号。

——高阶等差数列：由相邻两项之差的一组数组成的数列就是高阶等差数列。

• 学习方法

——数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 可用符号 Σ 简单地表示如下：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

——有关自然数之和的求和公式

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

——数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ 中相邻两项之差 b_1, b_2, \dots 叫作阶差，其中 $b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2$ ，以此类推。由这些阶差 b_1, b_2, b_3, \dots 组成的数列 $\{b_n\}$ 叫作第一个数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列。

第七课 用数列说话

了解数列在现实生活中的应用。

• 提前预习

——斐波那契：意大利数学家，第一次将印度—阿拉伯数字体系导入西方国家的学者，同时又是著名数列斐波那契数列的创始人。

——毕达哥拉斯学派：毕达哥拉斯在自己生活的意大利南部的希腊属地克罗托内组建的以贵族为中心的学派。

• 学习方法

$$\text{—— } 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

——求得自然数之和的公式：

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

