版基金资助项目

的著名定理纵横谈丛书

王梓坤

LAX THEOREM AND ARTIN THEOREM

Lax定理和Artin定理

戴执中 佩捷 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目
基金资助项目

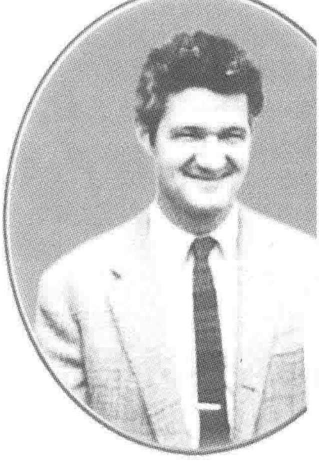
著名定理纵横谈丛书

[redacted]梓坤

LAX THEOREM AND ARTIN THEOREM

Lax定理和Artin定理

戴执中 佩捷 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书通过一道IMO试题研究讨论拉克斯定理和阿廷定理，并着重介绍了希尔伯特第十七问题.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

Lax定理和Artin定理/戴执中，佩捷编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2017.8

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6689-0

Ⅰ.①L… Ⅱ.①戴…②佩… Ⅲ.①希尔伯特问题—研究 Ⅳ.①O177.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第136894号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　牡丹江邮电印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张11.25　字数116千字
版　　次　2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6689-0
定　　价　78.00元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

第1章 一道IMO试题与希尔伯特问题

1.1 试题及证明

1971年在捷克斯洛伐克举行的第13届IMO中,第一题是匈牙利提供的.

试题 设$n(n>2)$是自然数,证明下述论断仅当$n=3$和$n=5$时成立;对任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$都有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+$$
$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+$$
$$(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0$$

许多题解都给出了以下的解答.

解 当$n=3$时,由于

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+\\&(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\=&\frac{1}{2}\{[(a_1-a_2)(a_1-a_3)+\\&(a_2-a_1)(a_2-a_3)][(a_2-a_1)\cdot\\&(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)]+\\&[(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(a_1-a_3)(a_1-a_2)]\}\\=&\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2]\\\geqslant&0\end{aligned}$$

因而论断成立.

当 $n=5$ 时,由于

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+\\&(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)+\\&(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)+\\&(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+\\&(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

是关于 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的对称式,故不妨假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$,于是

$$a_1-a_2=-(a_2-a_1)\geqslant 0$$

$$a_1-a_3\geqslant a_2-a_3\geqslant 0$$

$$a_1-a_4\geqslant a_2-a_4\geqslant 0$$

$$a_1-a_5\geqslant a_2-a_5\geqslant 0$$

从而

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+\\&(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

类似地,有

$$\begin{aligned}&(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+\\&(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

又因为

$$a_3-a_1\leqslant 0,a_3-a_2\leqslant 0$$

$$a_3-a_4\geqslant 0,a_3-a_5\geqslant 0$$

所以

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0 \tag{1.1.4}$$

将(1.1.2),(1.1.3),(1.1.4)相加便可知(1.1.1)非负,即对 $n=5$ 论断成立.

当 $n=4$ 时,取 $a_1=-1$,$a_2=a_3=a_4=0$,则有

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)+\\&(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)+\\&(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)+\\&(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=-1<0\end{aligned}$$

即对 $n=4$ 论断不成立.

当 $n>5$ 时,取 $a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0$;$a_i=1$;$a_{i+1}=\cdots=a_n=2$,其中 $3\leqslant i\leqslant n-2$,则有

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+\cdots+\\&(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)+\\&(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})=(-1)^{n-i}\end{aligned}$$

于是,当 $n(n>5)$ 为奇数时,取 $i=n-3$,有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^3=-1<0$$

当 $n(n>5)$ 为偶数时,取 $i=3$,有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^{n-3}=-1<0$$

因此,当 $n>5$ 时,论断不成立.

1.2　$n=3,5$ 的确定

如果我们将试题换一种提法,改为:

设 $n\in\mathbf{N}$,$x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个变量,定义

$$A_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

试问对哪些 n 值,A_n 是正定的?

显然由前面的证明可知问题的答案为 $n=3$ 和 5,但这两个值是如何想到的呢?我们先来介绍几个多项式的概念.

定义 1.2.1 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实系数多项式,f 的每个单项式有形式 $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$,其中 a 为非零实数,我们称这个单项式的次数为 $r_1+r_2+\cdots+r_n$,而对于变量 x_i 的次数为 $r_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 多项式 f 的次数,同样的是 f 包含的所有单项式对 x_i 的次数的最大值叫作 f 对 x_i 的次数.

例如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^2+x_1x_2x_3^2$ 的次数为 4,而对 x_1,x_2,x_3 的次数分别为 3,3,2.

定义 1.2.2 若 f 中每个单项式的次数均为 m,则 f 叫作 m 次齐次多项式.

定义 1.2.3 一个多项式以 $a_1,\cdots,a_n$ 为实系数,若对任意实数 $x_1,\cdots,x_n$,必有 $f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$,则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的.

我们可以证明以下定理.

定理 正定齐次多项式的次数必为偶数.

为此先证明一个引理.

引理 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实系数非零多项式,则必存在 n 个实数 $a_1,\cdots,a_n$,使得 $f(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$.

证明　我们用数学归纳法.

（i）当 $n=0$ 时，f 为常数 a，由假设知 $a\neq 0$，于是知此时引理成立.

（ii）当 $n=1$ 时，$f\triangleq f(x)$ 是非零多项式，它的实数根只有有限多个（由代数基本定理知其个数不超过 f 的次数）. 因此除这有限多个实数外，一定存在一个实数 a_1，使得 $f(a_1)\neq 0$.

（iii）假设引理对 $n=k+1$ 时成立，往证 $n=k$ 时也成立.

令 $k=2$，如果 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 中不出现 x_k，则可化为 $k-1$ 的情形，由归纳假设知引理成立. 现设 f 中出现 x_k，于是可将 f 按 x_k 展开得

$$f=x_k^d g_d(x_1,\cdots,x_{k-1})+x_k^{d-1}g_{d-1}(x_1,\cdots,x_{k-1})+\cdots+x_k g_1(x_1,\cdots,x_{k-1})+g_0(x_1,\cdots,x_{k-1})$$

其中 $d\geqslant 1$，$g_d(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 不恒为零. 由归纳假设知，存在实数 $a_1,\cdots,a_{k-1}$，使得 $g_d(a_1,\cdots,a_{k-1})\neq 0$，令 $c_i=g_i(a_1,\cdots,a_{k-1})$，则

$$f(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)=c_d x_k^d+c_{d-1}x_k^{d-1}+\cdots+c_1x_k+c_0$$

其中 $c_i\in\mathbf{R}$，$c_d\neq 0$. 于是这个多项式至多有 d 个实根，从而存在实数 a_k，使得 $f(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)\neq 0$.

现在我们来证明定理：

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 m 次齐次多项式，λ 是任意实数，则由齐次多项式的定义可知有如下性质

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

由引理知存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$$

由性质知

$$f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)=\lambda^m f(a_1,\cdots,a_n)\quad(1.2.1)$$

$$f(-\lambda a_1,\cdots,-\lambda a_n)=(-\lambda)^m f(a_1,\cdots,a_n)\quad(1.2.2)$$

若 m 为奇数，则 λ^m 和 $(-\lambda)^m$ 异号，进而推出 $f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)$ 与 $f(-\lambda a_1,\cdots,-\lambda a_n)$ 异号，而这与 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的矛盾，故 m 一定是偶数，从而定理得证.

应用定理我们对试题可分析如下，可将试题改述为：

设 n 为正整数，$a_1,\cdots,a_n$ 为 n 个实变量，定义

$$A_n(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

试问对哪些 n 值，A_n 是正定的？

由于 $A_n(a_1,\cdots,a_n)$ 是 $n-1$ 次齐次多项式，而由定理，正定齐次多项式的次数必为偶数，因此若 A_n 正定，则 n 必为奇数，进而若 n 为奇数并且 $n\geqslant 7$，取 $(a_1,\cdots,a_n)=(0,0,0,1,2,2,\cdots,2)$，容易计算

$$A_n(0,0,0,1,2,2,\cdots,2)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{n}(a_4-a_j)=(-1)^{n-4}=-1$$

因此若 A_n 正定，n 只能为 3 或 5.