国家开放大学
THE OPEN UNIVERSITY OF CHINA

数学思想方法

顾泠沅　主编

SHUXUE SIXIANG FANGFA　（第2版）

中央广播电视大学出版社

国家开放大学
THE OPEN UNIVERSITY OF CHINA

数学思想方法

（第2版）

顾泠沅　主编

中央广播电视大学出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

数学思想方法／顾泠沅主编．—2 版．--北京：中央广播电视大学出版社，2016．1（2017．5 重印）

ISBN 978-7-304-07651-1

Ⅰ．①数… Ⅱ．①顾… Ⅲ．①小学数学课—教学研究—开放大学—教材 Ⅳ．①G623．502

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 314945 号

数学思想方法（第 2 版）

SHUXUE SIXIANG FANGFA

顾泠沅　主编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：营销中心 010-66490011　　总编室 010-68182524

网址：http://www.crtvup.com.cn

地址：北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编**：100039

经销：新华书店北京发行所

策划编辑：安　薇　　**版式设计**：赵　洋

责任编辑：王　可　　**责任校对**：张　娜

责任印制：赵连生

印刷：北京市平谷早立印刷厂　　**印数**：9001~10000

版本：2016 年 1 月第 2 版　　2017 年 5 月第 5 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　**印张**：17.75　　**字数**：392 千字

书号：ISBN 978-7-304-07651-1

定价：35.00 元

第2版前言

“数学思想方法”是研究数学思想方法及其教学的一门课程。随着现代科学技术的迅速发展和素质教育的全面实施，对科学思想、科学方法有重要影响的数学思想方法的重要性日益凸现。鉴于数学思想方法在素质教育中的重要作用，“数学思想方法”被列为国家开放大学小学教育专业（本科）的一门重要的必修课。

《数学思想方法》于2004年6月出版，至今已有11年，作为国家开放大学小学教育专业（本科）的一门重要的必修课教材，受到广大教师和学员的欢迎。现在根据教学实践中反映出来的一些问题和数学教育改革深入发展的要求，对全书进行一次修订。

这次修订的主要内容如下：第一章和第十章增加了部分例题，有助于更好地理解原来的内容；第十一章根据新颁布的国家《数学课程标准》（2011年版），对某些内容进行了修改，并补充了新的例证；第十三章增加了一个新的教学案例；同时，对教材中一些印刷错误和表述欠准确的文字进行了修改；对“学习指导”部分亦进行了相应修订，并将其中每一章的“学习目标”“学习重点”栏目对应放到该章之前，将每一章的“难点解析”“回顾与思考”“阅读资料”栏目对应放到该章之后，更加方便学员学习并掌握本书的内容。

此外，由于我国地域广阔，各地学员的专业水平差异比较大，故将第三章“数学的真理性”列为选学内容。

参加这次修订的人员有朱成杰教授、朱晓鸽教授、赵伟高级教师、陈红梅高级教师；新增案例“数形结合方法教学案例”由陈红梅提供；朱成杰负责全书统稿。

作为教材，本书有一个不断完善的过程，希望各地的专家和学员提出宝贵的意见与建议。

编　者

2015年9月

第1版前言

“数学思想方法”是研究数学思想方法及其教学的一门课程。随着现代科学技术的迅速发展和素质教育的全面实施，对科学思想、科学方法有着重要影响的数学思想方法的重要性日益凸现。鉴于数学思想方法在素质教育中的重要作用，“数学思想方法”被列为中央广播电视大学小学教育专业（本科）的一门重要的必修课。

全书共十三章，分为三个部分。第一章至第四章为上篇，主要介绍数学思想方法的两个源头、数学思想方法的几次突破、数学的真理性以及现代数学的发展趋势，从时间维度和宏观上用粗线条勾画出数学思想方法发展的概貌。其中第三章“数学的真理性”对于了解现代数学观、确立现代数学教学观颇有帮助。但是，考虑到教学课时较紧以及某些地区小学教师的专业水平有限，将此章列为选学内容。第五章至第十章为中篇，该篇分别对数学教学中常用的抽象与概括、猜想与反驳、演绎与化归、计算与算法、应用与建模，以及分类、数形结合、特殊化等数学思想方法进行了比较详细的介绍，旨在让学员能较好地掌握这些重要的数学思想方法，为在教学中加以应用打下扎实的基础。第十一章至第十三章为下篇，该篇主要阐述了数学思想方法与素质教育之关系、数学思想方法教学的主要阶段及其原则，以及三个数学思想方法教学案例，希望这部分内容能对在小学数学教学中加强数学思想方法教学起到一定的引领和促进作用。

“学习指导”部分设置了“学习目标”“学习重点”“难点解析”“回顾与思考”“阅读资料”等栏目，可帮助学员更好地理解和掌握课程内容。阅读资料所选材料是对相关教材内容的补充和拓宽，供学有余力的学员自学。

本教材由顾泠沅研究员任主编、朱成杰教授任副主编，并负责课程大纲的编制。俞耀明副教授编写第一章、第二章、第三章、第四章，朱晓鸽副教授编写第五章、第七章，朱成杰教授编写第六章、第八章、第九章、第十章，赵伟老师编写第十一章、第十二章、第十三章，全书由朱成杰教授统稿。

关于数学思想方法及其教学的研究方兴未艾，尤其是小学数学思想方法教学尚处于起步阶段，需要进一步深入研究和探讨的问题很多。我们虽然做了很大努力，尽量反映最新研究成果，但是仍难免捉襟见肘，加上时间仓促和编者学识所限，不足之处一定存在，恳请读者指正。

编　者

2004年5月

目　录

上　篇

中　篇

下　篇

上篇

第一章 数学思想方法的两个源头

学习提示

古代数学大体可分为两种不同的类型：一种是崇尚逻辑推理，以《几何原本》为代表；另一种是长于计算和实际应用，以《九章算术》为典范。这两本著作对世界数学的发展都有重大影响，在知道这两本著作形成的大致情况和基本内容的基础上，可以运用对照和比较的方法来加深理解它们思想方法的特点与意义，从而体会它们是数学思想方法的两个源头。

学习目标

知道《几何原本》和《九章算术》形成的大致情况与基本内容。

理解《几何原本》和《九章算术》思想方法的特点与意义。

学习重点

《几何原本》和《九章算术》思想方法的特点与意义。

第一节 古希腊的《几何原本》

一、《几何原本》的产生

在数学中建立公理体系，最早的是几何学，而这方面的代表著作是古希腊学者欧几里得(Euclid)的《几何原本》(约前300)。这是一本选择一些课题作为“要素”(Elements，这里是指在一门学科中经常使用的一些重要的、关键性的定理，在证明其他几乎所有定理时，都需要用到它们)的论证性的学科教材。在论述一门学科时，选取一些命题作为“要素”，

这要求作者具有高度的技巧和判断力。在欧几里得以前，人们在选择“要素”方面已有过一些尝试，首先是公元前5世纪中期希俄斯的希波克拉底（Hippocrates），其次是在柏拉图（Plato）和欧多克斯（Eudoxus）之间某一时期的勒俄（Leon）。马格尼西亚的修迪奥斯（Theudias）编写的一本教科书被看作关于“要素”的一个出色汇集，曾在柏拉图学院中使用。欧几里得是柏拉图学院的学生，因此，这本书是欧几里得《几何原本》的直接先导。

《几何原本》中的素材并非欧几里得所独创，大部分材料来自同他一起学习的柏拉图学派。根据5世纪的数学评注家普罗克洛斯（Proclus）所说，欧几里得把欧多克斯的许多定理收入了《几何原本》，另外，他还熟悉泰特托斯（Theatetus）的著作并且完善了其定理，因此，欧几里得的工作在很大程度上是集前人工作之大成。

但是，欧几里得在对“要素”特定的选择、把定理排列成一个逻辑上连贯的序列时所表现出的惊人技巧，以及对前人只是马马虎虎证明的结果给予无懈可击的论证等方面的成就是无与伦比的。

欧几里得《几何原本》的出现是数学史上一个伟大的里程碑，它不仅是几何学建立的标志，同时也是公理化体系在具体学科中应用成功的标志。

二、《几何原本》的内容简介

欧几里得的《几何原本》是一本极具生命力的经典著作。全书共十三卷，总共有475个命题，包括5个公设（Postulate）和5个公理（Axiom）。除几何外，还包括初等数论、比例理论等内容。

第一篇有5个公设、5个公理和48个命题，讨论全等形、平行线、毕达哥拉斯（Pythagoras）定理、初等作图法、等价形（有等面积的图形）和平行四边形。所有图形都是由直线段组成的。

欧几里得在第一篇中给出了23个定义，提出了点、线、面、圆和平行线等概念。接着是5个公设：

（1）从任意一点到任意一点可作直线①。

（2）有限直线可以继续延长。

（3）以任意一点为中心及任意的距离（为半径）可以画圆。

（4）所有直角都相等。

（5）同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角和小于两直角，则这两条直线经无限延长后在这一侧相交。

其中第5个公设称为欧几里得平行公设，简称第5公设。

公设之后是5个公理：

（1）和同一量相等的诸量彼此相等。

---

① 《几何原本》中的直线是指直线段。

(2) 等量加等量，总量仍相等。

(3) 等量减等量，余量仍相等。

(4) 可以重合的量，彼此相等。

(5) 整体大于部分。

现代数学把“公设”和“公理”看作同义词，使用时不加区别。但是欧几里得采纳了古希腊哲学家兼逻辑学家亚里士多德（Aristotle）的观点，即公理是适用于一切研究领域的原始假设，而公设仅仅是适用于正在考虑的这一特定学科的原始假设。

第二篇有14个命题，利用线段代替数来研究数运算的几何代数法。例如，两数的乘积变成两边长等于两数的矩形面积。

第三篇有37个命题，讨论圆以及与之有关的线和角等。

第四篇有16个命题，讨论圆的内接和外切多边形。

第五篇有25个命题，讨论量和量之比的比例理论。

第六篇有33个命题，利用比例理论讨论相似形。

第七篇至第九篇共有102个命题，讲述数论，即讲述关于整数和整数之比的性质。

第十篇有115个命题，对于给定量不可公度的量进行分类。

第十一篇有39个命题，讨论空间直线与平面的各种位置关系。

第十二篇有18个命题，讨论面积和体积。

第十三篇有18个命题，主要讨论五种正多面体。

为了进一步了解《几何原本》的内容，下面介绍该书中的几个命题及其证明。

例1-1-1 第一篇命题5：

在等腰三角形中，两底角彼此相等，并且若向下延长两腰，则在底边以下的两角也彼此相等。

如图1-1-1所示，设三角形ABC是一个等腰三角形，边AB等于边AC，且分别延长AB、AC成BD、CE，则可证角ABC等于角ACB，且角CBD等于角BCE。

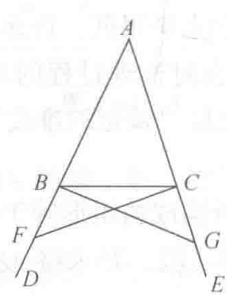

图1-1-1

证明 在BD上任取一点F，且在AE上截取一段AG等于AF，连接FC和GB。

[公设1]

因为 AF 等于 AG，AB 等于 AC，两边 FA、AC 分别等于边 GA、AB，且它们包含着公共角 FAG，所以边 FC 等于边 GB，且三角形 AFC 全等于三角形 AGB，其余的角也分别相等，即相等的边所对的角，也即角 ACF 等于角 ABG，角 AFC 等于角 AGB。

［命题 I.4］

又因为 AF 等于 AG，且 AB 等于 AC，于是余量 BF 等于余量 CG。但是已经证明了 FC 等于 GB，所以两边 BF、FC 分别等于两边 CG、GB，且角 BFC 等于角 CGB，这里底 BC 是公用的。因此，三角形 BFC 也全等于三角形 CGB。又由于其余的角也分别相等，即等边所对的角，所以角 FBC 等于角 GCB，且角 BCF 等于角 CBG。

以上已经证明了角 ABG 等于角 ACF，且角 CBG 等于角 BCF，因此，其剩余的角 ABC 等于剩余的角 ACB。

又已证得角 FBC 等于角 GCB，从而也就证明了角 CBD 等于角 BCE，且它们都在三角形的底边以下。

说明 上述证明似乎比较啰唆，其实不然。因为这个命题是该书的第一篇命题5，居于全书的开始部分，在证明中能够使用的逻辑依据只有 5 个公设、5 个公理及前面的 4 个命题：

命题 1 在一个已知有限直线上作一个等边三角形。

命题 2 由一个已知点（作为端点）作一条线段等于已知线段。

命题 3 已知两条不相等的线段，试由大的上边截取一条线段使之等于另一条。

命题 4 如果两个三角形有两边分别等于两边，而且这些相等的线段所夹的角相等，那么，它们的底边等于底边，三角形全等于三角形，而且其余的角等于其余的角，即那些等边所对的角。

仔细阅读证明过程，可以看到，该证明非常严谨，每一步推理都有依据，而且只使用公设、公理及此前的 4 个命题作为依据。两千多年以前的著作就能有如此严密的逻辑推理，确实很了不起。

有趣的是，中世纪时，欧洲的数学水平很低，许多学生初读《几何原本》，学到第 5 命题“等腰三角形底角必相等”时，就会对推理过程的理解觉得很困难。因此，这个命题被谑称为“驴桥”（Asses' Bridge），意思是“笨蛋的难关”。

例 1－1－2 第二篇命题 11：

分已知线段，使它和一条小线段所构成的矩形等于另一小线段的正方形。

如图 1－1－2 所示，设 AB 是已知线段，要求将 AB 分为两段，使得它和一小段所构成的矩形等于另一小线段上的正方形。

设在 AB 上作正方形 $ABDC$。又 AC 被二等分于点 E，且连接 BE，延长 CA 到 F，取 EF 等于 BE。

设 FH 是作在 AF 上的正方形，延长 GH 至 K，则可证点 H 就是 AB 上所要求作的点，它使 AB、BH 所构成的矩形等于 AH 上的正方形。

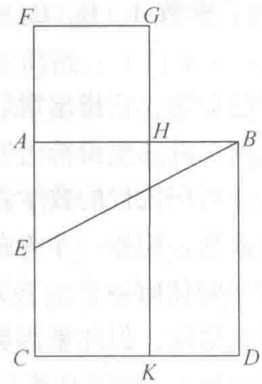

图1－1－2

证明略。

说明 该命题其实就是将一条长为 a 的线段分成长为 x 与 $a-x$ 的两段，使 $a(a-x)=x^2$，可归结为解方程 $x^2+ax-a^2=0$，于是 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，即上述做法所得的 $AH=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$。

这就是著名的黄金分割比，这种分法就是黄金分割法；由此所得的两条线段构成的矩形称为黄金矩形。

古希腊人认为，它代表着一种数学的美。雅典最堂皇的建筑帕特农神庙中就有很多黄金矩形，这种设计使得帕特农神庙显得比例匀称、美丽庄严，具有和谐、独特的美。

例1－1－3 第九篇命题20：

预先任意给定几个素数，则有比它们更多的素数。

如图1－1－3所示，设 A、B、C 是预先给定的素数，则可证有比 A、B、C 更多的素数。

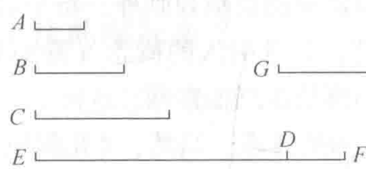

图1－1－3

为此，设 DE 是能被 A、B、C 量尽的最小数。设给 DE 加上单位 DF，那么 EF 或者是素数，或者不是素数。

首先，设 EF 是素数，那么已经找到多于 A、B、C 的素数 A、B、C、EF。

其次，设 EF 不是素数，那么 EF 能被某个素数量尽。设它被素数 G 量尽，则可证 G 与素数 A、B、C 中的任何一个都不同。

因为如果可能，设它是如此，即 G 是 A、B、C 中的某一个，现在 A、B、C 能量尽 DE，所以 G 也能量尽 DE，但是它也能量尽 EF。所以 G 能量尽其剩余的数，即能量尽单位 DF，而这是不合理的。因此，G 与素数 A、B、C 中的任何一个都不相同。

由于假设 G 是素数，因此就找到了素数 A、B、C、G，它们的个数多于预先给定的 A、B、C 的个数。这正是本命题的结论。

说明 这是数学中一个非常重要的命题，它指出素数有无穷多个。在该篇中，欧几里得将数看成线段，但论证时并不依赖几何。欧几里得给出的证明已被数学家们普遍地认为是数学证明的典范。此证明用的是归谬法，可用现代的数学语言简述如下：

假设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是所有不同的素数，构作一个新的数 $p_1p_2\cdots p_n+1$。如果这个数是素数，因为这个素数大于原有 n 个素数中的任何一个，于是它就是多于 n 个的素数；如果这个新数是一个合数，它必然能被某一素数整除，但此素因数不可能是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的任何一个，因为新的合数被这些素数除会有余数1，这就必然会出现另一个素数。所以，最初的假设不能成立，因而命题得证。

这个结论告诉我们，只要有 n 个素数，就必定会有 $n+1$ 个素数。因此，素数有无穷多个。

三、《几何原本》思想方法的特点

1. 封闭的演绎体系

《几何原本》是数学中最早形成的演绎体系。在形式上，它是以少数原始概念（不定义概念），如点、线、面（虽然《几何原本》中“定义”了这三个概念，但后来的推演中没有利用这些定义，而且这些定义只是几何形象的直观描述，严格地说，并不能算作定义。因此，一般仍将这三个概念看作《几何原本》中的不定义概念）等，和不证明的公设与公理为基础，运用亚里士多德所创立的逻辑学，把当时所知的几何学中的主要命题（定理）全部推演出来，从而形成一个井然有序的整体。

在这个整体中，除了推导时所需要的逻辑规则外，每个定理的证明所采用的论据均是公设、公理或前面已经证明过的定理，并且引入的概念（除原始概念以外）也基本符合逻辑上对概念下定义的要求，原则上不再依赖其他东西。

因此，《几何原本》是一个封闭的体系。当然，《几何原本》在证明某些命题时确实运用了除公设、公理和逻辑之外的“直观”。但那只是个别现象，并不影响整个体系。

另外，从《几何原本》与当时的社会生产、生活的关系看，它的理论体系回避任何与社会生产、现实生活有关的应用问题，因此，对于社会生活的各个领域来说，它也是封闭的。

所以，《几何原本》是一个比较完整的、相对封闭的演绎体系。

2. 抽象化的内容

希腊人在研究几何方面的功绩之一是把数学变成抽象化的科学。他们竭力主张寻找事物的普遍性，想从自然界和人的思想千变万化的过程中，分离抽象出某些共同点，这对数学方法和科学方法是非常重要的。他们追求理性、讲究逻辑的哲学思想对使数学形成一门科学有着巨大的影响，从而使几何不再停留在经验的数量变化上，而逐步提高到理性阶段，使对数学的认识也从感性阶段提高到理性阶段。

因此，《几何原本》中研究的都是一般的、抽象的概念和命题，它所探讨的是这些概念和命题之间的逻辑关系，从一些给定的概念和命题出发，演绎出另一些概念和命题。它不讨论这些概念和命题与社会生活之间的关系，也不考察产生这些数学模型的现实原型。在《几何原本》中研究了所有矩形（抽象的矩形概念）的性质，但是从未讨论一个具体的矩形实物的大小。《几何原本》探讨了数（自然数）的若干性质，却不涉及具体的数的计算及其应用。它排斥各种理论的实际应用，但对抽象的尺规（无刻度的直尺和圆规）作图推崇备至。重视抽象理论，而不注重数学理论的现实原型及其具体应用，乃是该著作的显著特点。

3. 公理化的方法

古希腊时期的数学主要是研究几何。他们不仅使几何形成了系统的理论，而且创造了研究数学的方法。作为现代数学的一种基本表述方法和发展方式的公理化方法，在数学上就是以欧几里得的《几何原本》为开端的。

根据亚里士多德的想法，一个完整的理论体系应该是一种演绎体系的结构，知识都是从初始原理中演绎出的结论。欧几里得的《几何原本》恰恰体现了这一想法，欧几里得用尽可能少的原始概念和一组不证自明的命题（公设和公理），利用逻辑推理法则，对当时的几何知识重新组织，建成一个演绎系统。

具体地看，在第一篇中开头的 5 个公设和 5 个公理是全书其他命题证明的基本前提，接着给出 23 个定义，然后逐步引入和证明定理。定理的引入是有序的，在一个定理的证明中，允许采用的论据只有公设和公理或前面已经证明过的定理。以后各篇除了不再给出公设和公理外，也都照此处理。

这种处理知识体系与表述方法就是公理化方法。

四、《几何原本》思想方法的深远意义

欧几里得的《几何原本》几乎概括了古希腊当时所有理论的数论及几何学，成为近代西方数学的主要源泉之一。

希腊人根据几何材料的内在联系，用概念作为判断和推理的基础，逐步形成了数学证明的观念，这是对数学认识的一个质的飞跃。

《几何原本》是古希腊数学思想的集中表现，它把古希腊数学的特点、数学思想方法的特点发扬光大了，可以说，是古希腊数学的最高成就之一。《几何原本》的思想方法使得数学理论成为一个严谨的系统性理论。它使得人们能够在一定程度上超越当时的实践，充分发挥自己的主观能动性，得到意义深远的理论结果，再利用这些成果指导人们的实践，提高人们认识世界、改造世界的能力。

《几何原本》的成功是希腊数学的成功，是公理演绎体系的成功。它被奉为数学教育的依据，人们正是从这本书里认识到数学是什么、证明是什么。有志于数学的人更把它作为必修经典，从中吸收丰富的营养，得到莫大的教益和鼓舞。

《几何原本》自成书之后，在数学界产生了巨大而深远的影响。正如斯威克（J. Swick）所说：“《几何原本》对于职业数学家，常常有着一种不可逃避的迷惑力，而它的逻辑结构大概比世界上任何其他著作更大地影响了科学思想。”它曾经统治几何学的学习，在世界各地以各种不同的文字，共出了千余版，仅次于《圣经》，大约成为西方世界历史中翻版和研究最广的书，称得上世界上最杰出的课本。我国在明、清两代也有过译本。

多少年来，千千万万人通过欧几里得几何的学习得到了逻辑的训练，从而步入科学的殿堂。《几何原本》所开创的公理化方法不仅成为一种数学陈述模式，而且被移植到其他学科，并且促进它们的发展。物理学家兼数学家牛顿（I. Newton）在其名著《自然哲学之数学原理》的序中写道：“从那么少的几条外来的原理就能够取得那么多的成果，这是几何学的光荣。”斯宾诺莎（B. Spinoza）的《伦理学》也采用了《几何原本》的体例。

第二节　中国的《九章算术》

一、《九章算术》的产生

秦始皇建立统一的封建帝国之后，统一了文字和度量衡制度。到了西汉，社会经济和文化得到迅速发展，因此有必要，也有可能对先秦时期已经积累起来的、丰富的数学知识进行较为系统的整理，形成专门的数学理论。据史书记载，秦时掌管过国家图书的张仓，西汉时的大司农耿寿昌以及许商、杜忠等都编写或校订过算书。他们大多是执管天文历法、农业、水利等方面的官员，所编的算书也大多是为了培养行政官吏或教习官家子弟。因此，这些算书都是采取问题集的形式，对提出的问题给出一种具体算法和答案。虽然秦和西汉时的算书大多失传，但从《算数书》中仍可以看到一个大概情形。

《算数书》是1983年在湖北江陵张家山出土的西汉早年（约前180）的竹简算书，无具名。它已初具问题集形式，并按算法将问题分类。分类的小标题为“分乘”“增减分”等60多个，其中大部分算法术语都出现在以后的《九章算术》之中，它很可能是《九章算术》的取材来源之一。

《九章算术》就是在这些算书的基础上，系统总结了先秦至东汉初年我国的数学成就，经历代名家补充、修改、增订而逐步形成的。在1世纪时，已有了现传本的内容。现传世的《九章算术》是三国时魏晋数学家刘徽于263年注释的版本。

二、《九章算术》的内容简介

《九章算术》是中国古代的一本著名数学著作。“算”指算筹，“术”指解题的方法，因而“算术”是指用筹演算的原理和方法，包括现在所说的算术、代数和几何的各种算法。又因其分九章，故由此得名。

《九章算术》中每一章都包括若干道问题，数目不等，大致从简到繁排列。全书共有

246道题，每一道问题后给出答案，一些问题后还给出“术”。现将各章内容简介如下：

第一章“方田”，列题38个，立术21条，着重介绍各种形状地亩面积的计算与分数的运算。“方”有单位面积的意思，“方田”则是计算一块田含多少个单位面积的方法。分数的运算包括分数的四则运算、约分、大小比较和求几个分数的算术平均数等。

第二章“粟米”，列题46个，立术33条，讨论各种粮食之间互相兑换的问题。“粟”是谷类。这类问题都通过比例来解决。

第三章“衰分”，列题20个，立术22条，涉及的内容比较杂，其算法大体多属于比例配分问题。“衰（音崔 cui）”是按比例，“分”是分配。

第四章“少广”，列题24个，立术16条，专讲开平方、开立方问题。“少”是多少，“广”是宽广。“少广”是由已知面（体）积，求其一边的宽广是多少的问题。本章给出了“开方术”“开圆术”“开立方术”和“开立圆术”四种重要算法。

第五章“商功”，列题28个，立术24条，专讲各种土木工程中所提出的各类几何体体积的求解。“商”是商量或度量，“功”是工程。

第六章“均输”，列题28个，立术28条，主要讲处理行程和合理解决征税的数学问题。

第七章“盈不足”，列题20个，立术17条，主要讲运用“盈不足术”解决应用问题，涉及的内容多与商业有关。

第八章“方程”，列题18个，立术19条，专讲线性方程组的解法。“方”就是把一个算题用算筹列成方阵的形式，“程”是度量总名，程式之意。另外，本章还提出了正负数的不同表示法和加减运算法则。

第九章“勾股”，列题24个，立术19条，主要研究勾股定理及其应用。本章继承和发展了商高提出的“勾三股四弦五”规律，并且叙述了直角三角形相似法和出入相补原理。

下面几道例题可以帮助我们进一步了解《九章算术》的内容。

例1-2-1 第八章“方程”的首题：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

“禾”是黍米，一“秉”是一捆，“实”是打下来的黍米谷子。“上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗”译成现代汉语是“3捆上等的黍米，2捆中等的黍米，1捆下等的黍米，打出来的黍米谷子一共有39斗”，其余可做类似翻译。

设上、中、下禾各一捆的谷子斗数依次为 x、y、z，那么这个问题实际上就是求解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1-2-1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (1-2-2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (1-2-3) \end{cases}$$

古代是用算筹进行运算，未知数不用符号表示，只将各个系数用算筹依次（自上至下、