

经济应用数学基础(一)

# 微 积 分

(题 解)

中央广播电视大学出版社

经济应用数学基础(一)

# 微 积 分

(题 解)

中央广播电视大学出版社

经济应用数学基础 (一)

微 积 分

(题 解)

中国人民大学数学教研室 编

\*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防科工委印刷厂印装

\*

开本787×1092 1/32 印张 8.5 184千字  
1983年3月第1版 1983年5月第2次印刷

印数 340,001—550,000册

书号: 13300·1 定价: 0.76元

## 前 言

经济应用数学基础《微积分》已作为中央电视大学经济类数学教材。为了便于同学作完习题订正时参考，我们编了这本习题解答。

由于我们水平不高，时间比较仓促，书中一定有不少缺点和错误，请广大读者提出批评指正。

中国人民大学数学教研室

1982年9月

## 目 录

习题一.....	( 1 )
习题二.....	( 23 )
习题三.....	( 49 )
习题四.....	( 87 )
习题五.....	( 123 )
习题六.....	( 157 )
习题七.....	( 189 )
习题八.....	( 211 )
习题九.....	( 235 )

## 习 题 一

1. 按下列要求举例:

(1) 一个有限集合;

(2) 一个无限集合;

(3) 一个空集;

(4) 一个集合是另一个集合的子集。

**解** (1) 一个有限集合: 如  $\{x | x^3 - x^2 - 2x = 0\}$ 。

(2) 一个无限集合: 如  $\{x | x = \frac{1}{2^n}, n \text{ 为正整数}\}$ 。

(3) 一个空集: 如  $\{x | x^2 + 2 = 0, x \in R\}$ 。

(4) 一个集合是另一个集合的子集: 例如设  $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ ,  $B = \{x | |x| \leq 5\}$ , 那么有  $A \subset B$ , 即  $A$  是  $B$  的子集。

2. 用集合的构造式表示下列集合:

(1) 大于 5 的所有实数集合;

(2) 大于 20 的正整数集合;

(3) 圆  $x^2 + y^2 = 25$  内部一切点的集合。

**解** (1)  $\{x | x > 5, x \in R\}$

(2)  $\{x | x > 20, x \text{ 是整数}\}$

(3)  $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 25, x, y \in R\}$

3. 下列集合哪个是空集  $\phi$ :

$A = \{x | x + 1 = 1\}$     $B = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 1\}$     $C = \{\phi\}$

**解**  $A = \{x | x + 1 = 1\} = \{0\} \neq \phi$

$B = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 1\} = \phi$

$$C = \{\phi\} \neq \phi$$

4. 写出  $A = \{0, 1, 2\}$  的一切子集。

解  $A = \{0, 1, 2\}$  的子集有:

$$A_1 = \{0\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{0, 1\}, A_5 = \{0, 2\}, \\ A_6 = \{1, 2\}, A_7 = \{0, 1, 2\}, A_8 = \phi.$$

5. 如果  $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2\}$ , 下列各种写法, 哪些是对的? 哪些不对?

$$1 \in A, 0 \notin B, \{1\} \in A, 1 \subset A, \{1\} \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset A, \{0\} \\ \subset B, A = B, A \supset B, \phi \subset A, A \subset A.$$

解 写法对的有:  $1 \in A, 0 \notin B, \{1\} \subset A, \{0\} \subset A, A \supset B, \\ \phi \subset A, A \subset A.$

写法不对的有:  $\{1\} \in A, 1 \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset B, A = B.$

6. 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$ , 求  
(1)  $A \cup B$ , (2)  $A \cap B$ , (3)  $A \cup B \cup C$ , (4)  $A \cap B \cap C$ ,  
(5)  $A - B$ .

解 (1)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(2)  $A \cap B = \{1, 3\}$

(3)  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(4)  $A \cap B \cap C = \{1, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \phi$

(5)  $A - B = \{2\}$

7. 如果  $A$  表示某单位会英语的人的集合,  $B$  表示会日语的人的集合, 那么,  $A', B', A - B, (A \cup B)', (A \cap B)'$  各表示什么样人的集合?

解  $A'$  表示不会英语的人的集合,

$B'$  表示不会日语的人的集合,

$A - B$  表示会英语不会日语的人的集合,

$(A \cup B)'$  表示不会英语也不会日语的人的集合,

$(A \cap B)'$  表示不是既会英语又会日语的人的集合, 即英、日两种语言都会的人除外, 其它的人的集合。

8. 如果  $A = \{x | 3 < x < 5, x \in R\}$ ,  $B = \{x | x > 4, x \in R\}$ , 求 (1)  $A \cup B$ , (2)  $A \cap B$ , (3)  $A - B$ 。

解 (1)  $A \cup B = \{x | x > 3, x \in R\}$

(2)  $A \cap B = \{x | 4 < x < 5, x \in R\}$

(3)  $A - B = \{x | 3 < x \leq 4, x \in R\}$

9. 如果

$$A = \{(x, y) | x - y + 2 \geq 0, x \in R, y \in R\}$$

$$B = \{(x, y) | 2x + 3y - 6 \geq 0, x \in R, y \in R\}$$

$$C = \{(x, y) | x - 4 \leq 0, x \in R, y \in R\}$$

在坐标平面上标出  $A \cap B \cap C$  的区域。

解 图 1-1 中阴影区域即为  $A \cap B \cap C$

10. 如果

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \{2, 4, 6\},$$

求 (1)  $A'$ , (2)  $B'$ , (3)  $A' \cup B'$ ,

(4)  $A' \cap B'$ 。

解 (1)  $A' = \{4, 5, 6\}$

(2)  $B' = \{1, 3, 5\}$

(3)  $A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

(4)  $A' \cap B' = \{5\}$

11.  $U, A, B$  同第 10 题, 验证  $A \cap B = A \cap B'$ 。

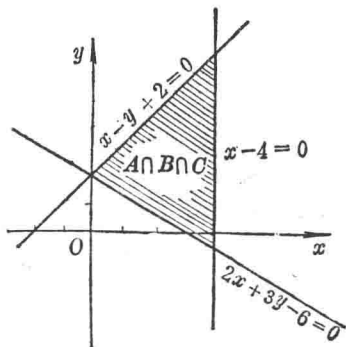


图 1-1



解  $A \cap B = \{1, 3\}, A \cap B' = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\},$

$\therefore A - B = A \cap B'$

12. 如果  $A$  是非空集合, 下列各个等式哪些是对的? 哪些不对?

$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cap A = \phi, A \cup \phi = A, A \cup \phi = \phi,$   
 $A \cup U = U, A \cap U = A, A \cap \phi = A, A \cap \phi = \phi, A - A = A, A -$   
 $A = \phi.$

解  $A \cup A = A$  (对),  $A \cap A = A$  (对),  $A \cap A = \phi$  (错)  
 $A \cup \phi = A$  (对),  $A \cup \phi = \phi$  (错),  $A \cup U = U$  (对),  $A \cap U$   
 $= A$  (对),  $A \cap \phi = A$  (错),  $A \cap \phi = \phi$  (对),  $A - A = A$  (错),  
 $A - A = \phi$  (对).

13. 调查了某地区 100 个公社, 其中 70 个公社小麦亩产量在 500 斤以上, 以集合  $A$  表示这些公社, 40 个公社棉花亩产量在 120 斤以上, 以集合  $B$  表示这些公社, 小麦亩产量在 500 斤以上而棉花亩产量在 120 斤以下的有 55 个公社, 试用集合关系表示下列各类公社, 并计算出各类型公社的数目:

(1) 麦、棉两项亩产量均达到上述指标的公社;

(2) 小麦亩产量未达到 500 斤以上而棉花亩产量在 120 斤以上的公社;

(3) 麦、棉中至少有一项达到上述指标的公社;

(4) 麦、棉两项均未达到上述指标的公社。

解 (1) 麦、棉两项均达到上述指标的公社集合为  $A \cap B$ , 数目为  $70 - 55 = 15$  (个);

(2) 小麦未达到指标而棉花达到指标的公社集合为  $B - A$  (或  $A' \cap B$ ), 公社数目为  $40 - 15 = 25$  (个);

(3) 麦、棉中至少有一项达到指标的公社集合为  $A \cup B$ ,

公社数目为  $70 + 40 - 15 = 95$  (个)(或  $55 + 15 + 25 = 95$ (个));

(4) 麦棉两项均未达到指标的公社集合为  $(A \cup B)'$ , 公社数目为  $100 - 95 = 5$  (个)。

用文氏图 (图 1-2) 表示如下:

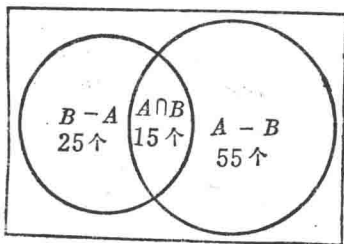


图 1-2

14. 如果  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d, e\}$ ,  $C = \{d, e, f\}$ , 验证  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

解  $A \cap (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{c, d\} \cup \{d\} = \{c, d\}$$

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

15. 用第7题的集合  $A$  与集合  $B$ , 验证摩根律。

解  $A$  表示会英语的人的集合。  $B$  表示会日语的人的集合。

(1)  $\because (A \cup B)'$  表示不会英语也不会日语的人的集合,

$A' \cap B'$  也表示不会英语也不会日语的集合,

$$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$$

下面文氏图中斜线区域 (图 1-3) 即表示  $(A \cup B)'$  或

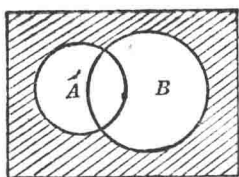


图 1-3

$$A' \cap B'.$$

(2)  $\because (A \cap B)'$  表示不是既会英语又会日语的人的集合,

$A' \cup B'$  表示不会英语或不会日语的人的集合, 即英、日两种语言都会的人除外, 其它人的集合,

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

下面文氏图中斜线区域 (图1-4) 即表示  $(A \cap B)'$  或  $A' \cup B'$ ;

16. 用集合运算律证明:

$$X \cup (X \cap Y)' \cup Y = U$$

$$\begin{aligned} \text{证 左边} &= X \cup (X \cap Y)' \cup Y \\ &= X \cup (X' \cup Y') \cup Y \\ &= (X \cup X') \cup (Y' \cup Y) \\ &= U \cup U = U = \text{右边} \end{aligned}$$

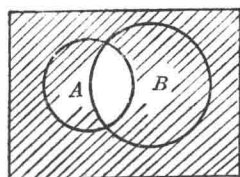


图 1-4

17. 解下列不等式:

(1)  $x^2 < 9$ , (2)  $|x-4| < 7$ , (3)  $0 < (x-2)^2 < 4$ .

(4)  $|ax - x_0| < \delta$  ( $a > 0, \delta > 0, x_0$  为常数)

解 (1)  $x^2 < 9$

$$\sqrt{x^2} = |x| < 3, \therefore -3 < x < 3$$

(2)  $|x-4| < 7, -7 < x-4 < 7, \therefore -3 < x < 11$ .

(3)  $0 < (x-2)^2 < 4$

$$0 < |x-2| < 2 \quad |x-2| < 2 \quad (\text{且 } x \neq 2)$$

$$\therefore 0 < x < 4 \quad (\text{且 } x \neq 2)$$

即  $0 < x < 2$  或  $2 < x < 4$ .

(4)  $|ax - x_0| < \delta, a > 0, \delta > 0, x_0$  为常数

$$-\delta < ax - x_0 < \delta$$

$$x_0 - \delta < ax < x_0 + \delta$$

即

$$\frac{x_0 - \delta}{a} < x < \frac{x_0 + \delta}{a}$$

18. 用区间表示满足下列不等式的所有  $x$  的集合:

(1)  $|x| \leq 3$ , (2)  $|x-2| \leq 1$ , (3)  $|x-a| < \varepsilon$  ( $a$  为常数,  $\varepsilon > 0$ ), (4)  $|x| \geq 5$ , (5)  $|x+1| > 2$ .

解 (1)  $|x| \leq 3$

$$\{x \mid |x| \leq 3\} = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(2)  $|x-2| \leq 1$

$$\{x \mid |x-2| \leq 1\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$$

(3)  $|x-a| < \varepsilon$  ( $a$  为常数,  $\varepsilon > 0$ )

$$\{x \mid |x-a| < \varepsilon\} = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

(4)  $|x| \geq 5$

$$\{x \mid |x| \geq 5\} = \{x \mid x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

(5)  $|x+1| > 2$

$$\{x \mid |x+1| > 2\} = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$$

$$= (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

19. 用区间表示下列点集, 并在数轴上表示出来:

(1)  $I_1 = \{x \mid |x+3| < 2\}$  (2)  $I_2 = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}$

解 (1)  $I_1 = \{x \mid |x+3| < 2\}$

$$I_1 = \{x \mid |x+3| < 2\} = \{x \mid -5 < x < -1\} = (-5, -1)$$

(图1-5)

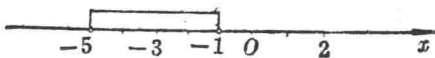


图 1-5

$$(2) I_2 = \{x | 1 < |x-2| < 3\}$$

$$I_2 = \{x | 1 < |x-2| < 3\} = \{x | |x-2| > 1 \text{ 且 } |x-2| < 3\}$$

$$= \{x | -1 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 5\} = (-1, 1) \cup (3, 5)$$

(图1-6)

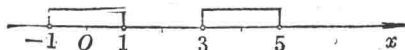


图 1-6

20. 如果  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ , 求  $A \times B$ 。

解  $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

21. 如果  $X = Y = \{3, 0, 2\}$ , 求  $X \times Y$ 。

解  $X \times Y = \{(3, 3), (3, 0), (3, 2), (0, 3), (0, 0), (0, 2), (2, 3), (2, 0), (2, 2)\}$

22. 设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{1, 3, 5\}$ , 作出由  $X$  到  $Y$  的关系  $R = \{(x, y) | x > y\}$  的图形。

解  $R = \{(x, y) | x > y\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$   
图形如下 (图1-7):

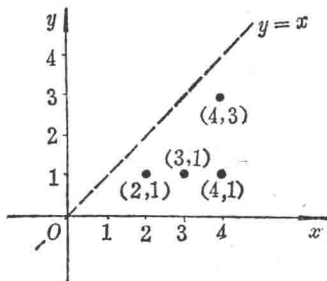


图 1-7

23.  $X, Y$  均为全体正实数集合, 作出由  $X$  到  $Y$  的

关系  $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25\}$  的图形。

解  $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25, x > 0, y > 0\}$ , 图形如下 (图1-8);

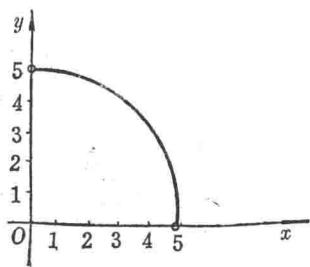


图 1-8

24. 设  $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$ , 写出下列集合  $R$  的元素:

(1) 由  $X$  到  $Y$  的关系  $R: x \geq y$ .

(2) 由  $X$  到  $Y$  的关系  $R: y = x^2$ .

解 (1)  $R = \{(x, y) | x \geq y\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(2)  $R = \{(x, y) | y = x^2\} = \{(1, 1), (2, 4)\}$

25. 设  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$ , 求:  $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 8)\} = \{(x, y) | y = x^3, x \in X, y \in Y\}$  的反关系  $R^{-1}$ .

解  $R^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (8, 2)\} = \{(y, x) | x = \sqrt[3]{y}, x \in X, y \in Y\}$ .

26. 习题 24 中 (1)、(2) 的关系  $R$  是不是函数关系?

解 (1)  $R$  不是函数关系。因为对于一个  $x \in X$ , 有无限多的  $y \in Y$  使  $(x, y) \in R$ , 故不符合函数定义。

(2)  $R$  不是函数关系。因为有  $3 \in X, 4 \in X$ , 而  $3^2 \in Y$ ,

$4^2 \in Y$ , 即  $(3, 9) \in R, (4, 16) \in R$ , 故不符合函数定义。

27. 习题 23 中的关系  $R$  是不是函数关系?

解 关系  $R$  不是由  $X$  到  $Y$  的函数关系 (但如令  $X_1 = \{x \mid 0 < x < 5\} = (0, 5)$ , 则  $R$  是由  $X_1$  到  $Y$  的函数关系)。

28. 下列  $R$  上的关系是不是函数关系?

(1)  $R = \{(x, y) \mid y = b\}$ , (2)  $R = \{(x, y) \mid x = a\}$ 。

解 (1)  $R = \{(x, y) \mid y = b\}$  是  $R$  上的函数关系。

(2)  $R = \{(x, y) \mid x = a\}$  不是  $R$  上的函数关系。

29. 确定下列函数的定义域:

(1)  $y = \sqrt{2x+1}$ , (2)  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,

(3)  $y = \sqrt{x^2-9}$ , (4)  $y = \frac{1}{x^2-2x}$ ,

(5)  $y = \frac{-5}{x^2+4}$ , (6)  $y = \lg(3x+1)$ ,

(7)  $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ , (8)  $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 。

解 (1)  $y = \sqrt{2x+1}$

$$D(f) = \{x \mid 2x+1 \geq 0\} = \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{2} \right\} = \left[ -\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

(2)  $y = \sqrt{1-x^2}$

$$D(f) = \{x \mid 1-x^2 \geq 0\} = \{x \mid |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

(3)  $y = \sqrt{x^2-9}$

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \mid x^2-9 \geq 0\} = \{x \mid |x| \geq 3\} \\ &= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

(4)  $y = \frac{1}{x^2-2x}$

$$D(f) = \{x | x^2 - 2x \neq 0\} = \{x | x \neq 0, x \neq 2\} \\ = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$(5) \quad y = \frac{-5}{x^2 + 4}$$

$$D(f) = (-\infty, +\infty)$$

$$(6) \quad y = \lg(3x + 1)$$

$$D(f) = \{x | 3x + 1 > 0\} = \left\{ x | x > -\frac{1}{3} \right\}$$

$$= \left( -\frac{1}{3}, +\infty \right)$$

$$(7) \quad y = \arcsin \frac{x-1}{2}$$

$$D(f) = \left\{ x | -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \right\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\} \\ = [-1, 3]$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$$

$$D(f) = \{x | 1-x^2 \neq 0 \text{ 且 } x+2 \geq 0\} \\ = \{x | x \geq -2 \text{ 且 } x \neq -1, x \neq 1\} \\ = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

30. 下列各题中，两个函数是否相同？如果不同，有何区别？

$$(1) \quad y = \frac{x^2}{x} \text{ 与 } y = x, \quad (2) \quad y = \lg x^2 \text{ 与 } y = 2 \lg x。$$

解 (1)  $y = \frac{x^2}{x}$  与  $y = x$  是两个不同的函数，前者定



义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 后者定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2)  $y = \lg x^2$  与  $y = 2 \lg x$  也是两个不同的函数, 前者定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 后者定义域为 $(0, +\infty)$ 。

31. 如果  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  求:  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-x)$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $f(x+1)$ 。

解  $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2$

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 \times (-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{x} + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = x^2 - x$$

32. 如果  $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x$ , 证明:  $f(-x) = -f(x)$

证  $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + 3(-x)$

$$= -x^5 + 2x^3 - 3x$$

$$= -(x^5 - 2x^3 + 3x)$$

$$= -f(x)$$

33. 如果  $f(x) = 1 - x^2$ , 证明:  $f(-x) = f(x)$ 。

证  $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$

34. 如果  $f(x) = a^x$ , 证明:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \quad \frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$$

证  $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y)$$

35. 如果  $f(x) = \log_a x$ , 证明: