泛函分析及其应用

张世清／编著

科学出版社

泛函分析及其应用

张世清／编著

安徽建筑大学
藏书
图书馆

科学出版社
北京

内 容 简 介

泛函分析是现代数学的一个重要分支，它不但具有高度的抽象性，而且具有高度的统一性和广泛的应用性. 本书试图将抽象的泛函分析与一些具体的物理问题联系起来，内容涉及经典变分中的几个著名例子，线性泛函分析中一些基本定理，广义函数和 Sobolev 空间，泛函极值的一阶和二阶必要条件及充分条件，Ekeland变分原理及其推广和应用，Pontryagin最大值原理及其应用，共轭凸函数理论及其应用，极小极大原理尤其是山路引理及其应用，具有Newton势的$N(\geqslant 2)$体问题的周期解，以及几个经典的不动点定理.

本书可作为数学、物理、力学、航天、自动控制以及经济数学等专业的高年级本科生及研究生的教材或教学参考书，也可供相关专业的教师和科研人员阅读和参考.

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析及其应用/张世清编著. —北京：科学出版社，2018. 5
ISBN 978-7-03-057281-3

Ⅰ. ①泛…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①泛函分析　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 078294 号

责任编辑：王丽平／责任校对：彭珍珍
责任印制：张　伟／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 5 月第　一　版　　开本：720 × 1000　B5
2018 年 5 月第一次印刷　　印张：14 1/4
字数：280 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

泛函分析主要是综合利用代数、几何、拓扑与分析的思想和方法, 研究各种无限维空间以及无限维空间上的泛函和算子.

历史上曾有一些数学家认为泛函分析属于软分析, 解决不了硬问题, 而很多普通人认为泛函分析太抽象没什么用处. 其实不然, 泛函是函数的自然推广, 有了微积分就自然有了泛函, 就有了经典的变分. 只不过, 在十七世纪它的抽象的严密的理论框架还没有建立起来. 近三百年来, 经过许多大师的共同努力, 泛函分析已长成了参天大树, 根深叶茂. 它不仅理论上已经相当丰富, 而且应用上也解决了很多重要问题. 国内外已有许多有关泛函分析及其应用的优秀教材和专著, 但就教材而言, 大多较抽象, 应用的例子较少; 就专著而言, 各有侧重点且大多数太专业, 起点太高. 鉴于此, 作者试图写一本面向国内数学、物理、力学、天文及部分工科高年级本科生及研究生的比较易读的教材.

本书尝试将线性泛函分析与非线性泛函分析结合, 尤其强调将抽象的泛函分析中的部分重要定理与一些具体的来自物理、几何中的经典变分问题结合起来, 试图使读者既能体会到泛函分析的高度抽象性和统一性, 又能体会到它应用的广泛性, 尤其是通过变分最小即物理中的最小作用原理, 可以领悟到泛函分析与大自然的和谐统一.

本书深受关肇直、夏道行、张恭庆、龙以明等院士、教授的有关教材和专著的影响, 也深受苏联 Gelfand 院士、法国 Brezis 院士、比利时 Mawhin 院士及德国 Zeidler 教授等的教材和专著的影响. 张恭庆院士和龙以明院士还对本书提出了一些重要的修改意见, 在此对他们表示衷心感谢.

由于泛函分析及其应用涉及的内容广泛, 作为教材或教学参考书, 本书仅选取部分内容, 还有许多重要的理论及其应用, 如拓扑度理论、Lusternik-Schnirelmann 理论、Morse 理论、Hamilton 系统指标理论及其各种应用等均未能论及, 且由于作者学识有限, 书中难免有疏漏之处, 恳请读者批评指正. 作者联系邮箱为 zhangshiqing@scu.edu.cn.

张世清

2017 年 11 月 8 日

于四川大学

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　变分法的几个经典例子

变分法 (Calculus of Variations, Variational Calculus 或 Variational Methods) 是十七世纪末开始正式发展起来的数学分析的一个分支, 研究的是求解泛函极值的方法, 但是它的起源可以追溯到公元前古希腊数学家研究过的等周问题.

1.1 节通过几个经典的变分问题的例子来说明泛函和变分的概念. 这些来自几何与物理的经典例子直接或间接刺激了直接变分方法、抽象泛函分析以及大范围分析等许多理论的建立及各种应用[1−128].

1.1　等周问题与捷线问题等

例 1.1.1　等周问题 (Isoperimetric Problem). 在平面上给定长度为 L 的所有光滑不打结的简单闭曲线中, 求出一条能围成最大面积的曲线.

最早在古希腊时期, 人们就认为这条曲线是一个圆周. 但严格的存在性证明直到十九世纪七十年代才由 Weierstrass 首先给出.

变分问题的数学描述:

设闭曲线的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1); \tag{1.1.1}$$

其中函数 $x(t), y(t)$ 连续可微, 且 $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$. 再设闭曲线的长度是 L, 即

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \tag{1.1.2}$$

不打结的简单闭曲线围的区域 Ω 的面积为

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) dt. \tag{1.1.3}$$

从而等周问题可描述为在满足 (1.1.2) 的所有曲线 (1.1.1) 中, 求使得 (1.1.3) 取最大值的曲线.

注意, 上面的 L 和 S 的值都依赖于曲线的选取, 它们实际上是函数的函数, 是所谓的“泛函”.

例 1.1.2　最速降线或捷线问题 (Brachistochrone Curve or Curve of Fastest Descent Problem). 历史上, 这是对变分方法影响最大的一个经典例子, 也是变分法发展的一个标志. 它是 1696 年 Johann Bernoulli 在写给他哥哥 Jakob Bernoulli 的一封信中提出的. 问题的提法是: 设 A 和 B 是铅直平面上不在同一铅直线上的两点, 在所有连接 A 和 B 的平面曲线中, 求出一条曲线, 使仅受重力作用且初速度为 v_0 的质点从 A 点到 B 点沿这条曲线运动时所需时间最少 (图 1.1.1).

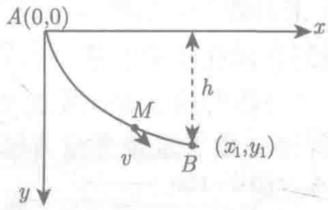

图 1.1.1　最速降线

捷线问题的数学描述: 取 A 为平面直角坐标系的原点, x 轴置于水平位置, y 轴正面朝下. 设 B 点的重力势能为 0. 显然, 最速降线应在这个平面内. A 点坐标为 $(0, 0)$, 设 B 点坐标为 $(x_1, y_1) = (x_1, h)$. 取连接 A 和 B 的曲线方程为

$$y = y(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant x_1). \tag{1.1.4}$$

它在区间 $[0, x_1]$ 的两个端点满足条件

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{1.1.5}$$

设 $M(x, y)$ 为曲线 $y = y(x)$ 上的任意一点, 则由能量守恒定律可得如下关系:

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h - y) + \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.1.6}$$

在上式中, g 为重力加速度, 故有

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}. \tag{1.1.7}$$

设 $y = y(x)$ 为质点的运动曲线方程, 质点沿着该曲线从 A 点运动到 B 点. 质点的运动速度可表示为

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt}. \tag{1.1.8}$$

由式 (1.1.7) 和 (1.1.8) 消去 v 并积分, 得质点沿曲线从点 A 滑行到点 B 所需总时间“泛函”为

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx^{①}. \tag{1.1.9}$$

① dx 等有时也省去.

捷线问题可描述为在满足条件 (1.1.5) 的所有函数 (1.1.4) 中, 求使积分式 (1.1.9) 最小的函数. 这个问题当年就由 Bernoulli 兄弟及 Newton、Leibniz 和 L'Hôpital 用不同的方法独立解决, 同时发表在 1697 年的《教师学报》上, 解曲线为旋轮线 (等时曲线). 但这类问题的一般解法直到十八世纪三十年代才由 Euler 和 Lagrange 所创立.

例 1.1.3 (力学中的最小作用原理) 力学系统的基本规律可由变分原理来表述. 力学系统在这里指一个质点组, 例如有 N 个质点, 第 i 个质点的质量为 m_i, 位置为 $q_i=(x_i(t),y_i(t),z_i(t))$, 速度为 $\dot{q}_i=(\dot{x}_i(t),\dot{y}_i(t),\dot{z}_i(t))$. 在任意一个给定时刻, 这 N 个质点的位置可以用 R^{3N} 中的一个点 $(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_N,y_N,z_N)$ 来表示. 设一力学体系的状态函数为 $L(q_1,\cdots,q_N;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N;t)\triangleq L(q,\dot{q},t)$, 而系统的运动满足下面的条件:

假设在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时刻, 系统有两个确定的位置, 这两个位置分别由两组坐标值 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 决定. 物理学家认为, 自然界最“节省”, 系统选择的实际真实运动是在连接 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 的所有曲线中, 使积分

$$f(q)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \tag{1.1.10}$$

最小的运动. 函数 L 叫做该系统的 Lagrange 函数 (Lagrangian Function), 而积分 (1.1.10) 则叫做平均作用量 (Average Action), 又叫做 Lagrange 作用量. 实际上, 它是一个泛函, 因为它的值依赖于轨道的选取, 可以看成函数的函数.

由此可见, 求解一力学系统的运动问题, 归结为 $f(q)$ 在边值条件 $q|_{t=t_i}=q^{(i)}$, $i=1,2$ 下的极值问题.

特别地, 对经典的 Newton 多体问题, $L=K-V$, 这里 $K=\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i|\dot{q}_i|^2$ 是系统的动能; $V=-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N}\frac{Gm_im_j}{|q_i-q_j|}$ 是系统的势能 (G 是万有引力常量).

例 1.1.4 测地线 (Geodesic Curve) 问题. 现在考虑另一个经典问题: 在曲面 S 上给定两点 A 和 B, 如何在 S 上寻找连接 A 和 B 的最短曲线?

若曲面 S 为平面, 则由平面几何性质可知在平面上连接 A 和 B 的所有曲线中以直线段 $\overline{AB}$ 最短.

若曲面由 $\varphi(x,y,z)=0$ 所给定, 在其满足 $\varphi(x,y,z)=0$ 的函数 $y(x),z(x)$ 中, 选取一组变量函数, 极小化“泛函”:

$$L=\int_{x_0}^{x_1}(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}dx, \tag{1.1.11}$$

其中

$$y=y(x),\quad z=z(x)\quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1) \tag{1.1.12}$$

为连续可微函数, 且满足约束条件

$$\varphi(x,y,z)=0. \tag{1.1.13}$$

此测地线问题可归结为在满足约束条件 (1.1.13) 下, 寻求过 A 和 B 两点的函数 (1.1.12), 使得泛函 (1.1.11) 取得最小值.

例 1.1.5 极小曲面问题 (Plateau 问题, 1873). 在空间中以给定的曲线为边界而张成的所有曲面中, 求面积最小的曲面. 设 $\Gamma\subset R^3$ 是一条给定的不打结的 Jordan 简单闭曲线. 令

$$D=\{(u,v)\in R^2|u^2+v^2\leqslant 1\}.$$

考虑张在 Γ 上的圆盘型曲面类, 即映射类 $X_\Gamma=\{\psi:D\to R^3,\psi$ 是分片 C^1 映射, 且 $\psi|_{\partial D}$ 是 Γ 的单调参数化$\}$, 这里单调参数化是指 $\forall p\in\Gamma,\psi^{-1}(p)$ 是 ∂D 的连通子集. 在 X_Γ 上定义“泛函”:

$$A(\psi)=\int_D|\psi_u\wedge\psi_v|dudv,$$

这里

$$|\psi_u\wedge\psi_v|=\sqrt{|\psi_u|^2|\psi_v|^2-|\psi_u\cdot\psi_v|^2}.$$

Plateau 问题即是求 $\varphi\in X_\Gamma$ 使

$$A(\varphi)=\inf_{\psi\in X_\Gamma}A(\psi).$$

例 1.1.6 (Dirichlet 原理) 求 Laplace 方程的 Dirichlet 边值问题, 即设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集, $\varphi(x):\partial\Omega\to R$ 是给定的 C^2 位势函数, 求 $u(x):\Omega\to R$ 使

$$\begin{cases}\Delta u=0, x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x).\end{cases}$$

这个问题可转化为极小化“泛函”:

$$D(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx,\quad u\in\{\text{适当函数空间}\}.$$

这个源于通过导体表面电荷位势分布决定导体内部位势的所谓 Dirichlet 原理, 实际起源于十九世纪中叶 Dirichlet 和 Gauss 在哥廷根的著作, Dirichlet 积分 $\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx$ 对应于表面电荷位势 $\varphi(x)$ 在 Ω 内部产生的场的总势能, 当时物理学家相信 Ω 内部的位势分布函数应对应于总势能最少的分布, 即满足 Laplace 方程 $\Delta u=0$.

但在当时, $D(u)$ 定义于什么合适的空间是不清楚的. 实际上, 当时认为自然地, $u\in M=\{u\in C^1(\bar{\Omega}),u|_{\partial\Omega}=\varphi(x)\}$ 且因 $D(u)\geqslant 0$, 故 D 在 M 上取到最小值. 事实上, 这是不严格的. 很快德国数学大师 Weierstrass 就举出了一个反例. 虽然 D 在 M 上有下界, 故下确界存在, 但下确界不一定能达到. 事实上, 用现代泛函分析观点看, $C^1(\bar{\Omega})$ 不是自反 Banach 空间, 因此 M 不是自反 Banach 空间中的弱闭子集, 事实上这需要将 $C^1(\bar{\Omega})$ 扩充成一个特殊的自反 Banach 空间即所谓 Sobolev 空间, 且在扩充后的 Sobolev 空间上, $D(u)$ 还有某种强制性 (紧性). 后面我们将看到 Sobolev 空间是联系抽象的泛函分析与具体的微分方程的桥梁.

1.2 定义与记号

1. 多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geqslant 0$ 是整数,

$$
\begin{aligned}
&|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\\
&x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\quad (\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n),\\
&\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}.
\end{aligned}
$$

若 $\beta\leqslant\alpha$ (指 $\beta_j\leqslant\alpha_j,j=1,\cdots,n$), 则

$$
\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}.
$$

2. 对定义在区域 Ω 上的连续函数 u, 集合 $\operatorname{supp}u=\{x\in\Omega|u(x)\neq 0\}$ 的闭包称为 u 的支集. 如果 $\operatorname{supp}u\subset\subset\Omega$, 则称 u 在 Ω 中有紧支集. 其中 $\operatorname{supp}u\subset\subset\Omega$ 表示为 $\overline{\operatorname{supp}u}$, 是 Ω 的紧子集 (有界闭集).

3. 对函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$, 记 $D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=u_{x_i},D_{ij}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=u_{x_ix_j},D^\alpha u=\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. $Du=\nabla u=(D_1u,\cdots,D_nu)$ 为 u 的梯度, $Du\cdot Dv=D_1u\cdot D_1v+\cdots+D_nu\cdot D_nv,|Du|=(|D_1u|^2+\cdots+|D_nu|^2)^{1/2},\Delta u=D_{11}u+\cdots+D_{nn}u=u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}$, Δ 称为 n 维 Laplace 算子.

4. 设 m 为非负整数, 我们常用到下面一些由连续函数组成的集合 (也叫函数空间):

$$
\begin{aligned}
&C^m(\Omega)=\{u|D^\alpha u\text{在}\Omega\text{内连续},\forall|\alpha|\leqslant m\},\\
&C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)=\{u|D^\alpha u\text{在}\Omega\text{内连续},\forall\alpha\},
\end{aligned}
$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) | u\text{在}\Omega\text{中有紧支集}\},$$
$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) | u\text{在}\Omega\text{中有紧支集}\},$$
$$C^m(\bar{\Omega}) = \{u | D^\alpha u\text{在}\overline{\Omega}\text{上连续}, \forall |\alpha| \leqslant m\}.$$

以后如果没有特别说明, 都假定 Ω 是 R^n 中任意开区域, 并简记 $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C_0(\Omega) = C_0^0(\Omega), C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

5. $L^p(\Omega) = \left\{ f(x)\text{在}\Omega\text{上 Lebesgue 可测} \middle| \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$.

习　　题

1. 请阅读 M.Kline《古今数学思想》中有关“变分方法”的历史的章节.
2. 对“等周问题”试给出一个解答.

第2章 Banach 空间与 Hilbert 空间简介

本章对线性泛函分析中的 Banach 空间及 Hilbert 空间中的几个重要定义、定理做了简要介绍, 更多细节请查阅相关书籍 [10], [16], [29], [49], [50], [53], [59], [110], [118].

2.1 Banach 空间及其一些基本概念

定义 2.1.1 设 X 是数域 K 上的一个线性空间, 若 $X \to R$ 的映射 $x \to \|x\|$ 满足:

(i) (非负性) $\|x\| \geqslant 0, \forall x \in X; \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(ii) (正齐次性) $\|ax\| = |a|\|x\|, \forall a \in K, x \in X$;

(iii) (三角不等式) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$,

则称 $\|x\|$ 是 X 中元素 x 的范数. 对线性空间 X 赋予范数后, 称 X 为线性赋范空间.

定义 2.1.2 设 X 是一个线性赋范空间, 且 $x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$. 如果 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\| \to 0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 序列. 如果 $x \in X$, 且当 $n \to \infty$ 时, $\|x_n - x\| \to 0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 在 X 中强收敛于 x.

定义 2.1.3 设 X 是一个线性赋范空间, 如果 X 中每一个 Cauchy 序列均收敛于 X 中的一个元素, 则称 X 为完备的, 完备的线性赋范空间又称为 Banach 空间.

例 2.1.1 对有界区域 $\Omega \subset R^n$, 函数空间:

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{u | D^\alpha u \text{在} \overline{\Omega} \text{上连续}, \forall |\alpha| \leqslant m\}$$

关于范数

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D^\alpha u(x) | \text{或者} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x) \right|$$

构成一个 Banach 空间.

线性空间是否完备与其上赋予的范数紧密相关, 例如, 闭区间 $[-1, 1]$ 上所有连续函数的集合 $C([0, 1])$ 关于范数:

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)| dx$$

构成一个线性赋范空间, 但它是不完备的 (请读者自己验证). 我们可以对不完备的线性赋范空间补充一些新元素而得到一个完备的线性赋范空间 (Banach 空间), 这是所谓空间的完备化, 这类似于, 把有理数集再并上有理 Cauchy 序列的极限集中不是有理数的那些数组成的集合 (无理数集), 而把有理数集完备化.

定义 2.1.4 包含给定线性赋范空间 X 的最小的完备度量空间称为 X 的完备化空间. 其中最小的含义是: 任何一个以 X 为子空间的 Banach 空间都以此空间为子空间.

例 2.1.2 设 $p \geqslant 1, \Omega$ 为 n 维区域, 则 $C(\overline{\Omega})$ 关于范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

的完备化是 Ω 上 p 次方可积函数空间

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to R \text{且 Lebesgue 可测且} \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty\right\}.$$

定义 2.1.5 设 X 是数域 K 上的线性赋范空间, $f : X \to K$ 是线性泛函, 即 $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X$ 成立

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

令 $||f|| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{||x||}$.

若 f 是实线性泛函, 则

$$\begin{aligned}||f|| &= \sup_{x\neq 0} \frac{f(x)}{||x||} \\ &= \sup_{x\neq 0, ||x||\leqslant 1} \frac{f(x)}{||x||} = \sup_{||x||\leqslant 1} f(x),\end{aligned}$$

若 $||f|| < +\infty$, 则称 f 是有界 (连续) 线性泛函.

定义 2.1.6 设 X 是赋范线性空间, 则 X 上的有界线性泛函的全体称为 X 的共轭空间, 记为 X^*.

X 的二次共轭空间为 $X^{**} = (X^*)^*$. 存在典则内射 $J : X \to X^{**}$: 给定 $x \in X$, 映射 $f \mapsto \langle f, x\rangle$ 是 X^* 上的连续线性泛函, 因而它是 X^{**} 中的元素, 记为 Jx, 我们有 $\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$. 易见, J 是线性的且保度量, 即 $||Jx||_{X^{**}} = ||x||_X$. 若 $J(X) = X^{**}$, 则称 X 自反.

定义 2.1.7 设 X 是赋范线性空间, A 是 X 的一个子集.

(i) 如果 $\forall x \in X$, 都存在 $\{x_n\} \subset A$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 在 X 中有 $x_n \to x$, 则称 A 为 X 的稠密子集.

(ii) 如果存在 $c>0$, 使得 $\|x\|\leqslant c,\forall x\in X$, 则称 A 为 X 中的有界集.

(iii) 如果 A 中的每一个收敛序列的极限都属于 A, 则称 A 为 X 中的闭集.

(iv) 如果 A 中的任意点列在 X 中有一个收敛子列, 则称 A 是 X 中的列紧集. 若这个子列还收敛于 A 中的点, 则称 A 是 X 中的自列紧集或紧集.

在有限维 Banach 空间中, 有界集都是列紧集, 有界闭集都是紧集. 无穷维 Banach 空间的有界集不一定是列紧集. 例如, 在 $L^2([0,\pi])$ 中, 取 $u_n(x)=\cos nx$, 有

$$\|u_n(x)\|_{L^2}^2=\int_0^\pi \cos^2 nx dx=\int_0^\pi \frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\frac{\pi}{2},$$

因而序列 $\{u_n(x)\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的有界集, 但 $\forall m\neq n$, 有

$$\|u_m-u_n\|_{L^2}^2=\int_0^\pi |\cos mx-\cos nx|^2dx=\pi\neq 0.$$

从而 $\{u_n(x)\}$ 在 $L^2([0,\pi])$ 中没有收敛子列, 但有某种弱收敛意义下的子列.

定义 2.1.8 (1) 设 X 是赋范线性空间, $\{x_n\}\subset X$, 若 $\forall f\in X^*, f(x_n)\to f(x)$, 则称 x_n 弱收敛于 x, 记为 $x_n\rightharpoonup x$.

(2) 设 $\{f_n\}\subset X^*, f\in X^*$, 若 $\forall x\in X, f_n(x)\to f(x)$, 则称 f_n 弱 * 收敛于 f, 记为 $f_n\xrightarrow{w^*}f$.

2.2 Hahn-Banach 延拓定理与凸集分离定理

定理 2.2.1 (Hahn-Banach 延拓定理) 设 E 是实数域或复数域上的赋范线性空间, $G\subset E$ 是线性子空间, 则对于 G 上的任一给定的有界线性泛函 g, 必存在 E 上的有界线性泛函 f, 使得

(i) $f(x)=g(x),\forall x\in G$;

(ii) $\|f\|_{E^*}=\|g\|_{G^*}$.

当 E 是实的赋范线性空间时, 有以下更一般形式的 Hahn-Banach 延拓定理.

定理 2.2.2 (Hahn-Banach, 1920) 设 E 是实数域 R 上的线性空间, 泛函 $p:E\to R$ 满足:

(i) (非负齐次性) $p(\lambda x)=\lambda p(x),\forall\lambda\geqslant 0,\forall x\in E$;

(ii) (次可加性) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall x,y\in E$.

设 $G\subset E$ 是线性子空间, $g:G\to R$ 是线性泛函且满足:

$$g(x)\leqslant p(x),\quad \forall x\in G.$$

则存在线性泛函 $f:E\to R$ 扩张 g, 即 $\forall x\in G, f(x)=g(x)$ 且 $\forall x\in E$ 有

$$f(x)\leqslant p(x).$$

证明　定义集合:

$$P = \{h : D(h) \subset E \to R | D(h)\text{是}E\text{的线性子空间}, h\text{是线性泛函};\\ G \subset D(h), h\text{扩张}g, \text{且}h(x) \leqslant p(x), \forall x \in D(h)\}.$$

在 P 上定义序关系:

$$h_1 \leqslant h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2)\text{且}h_2\text{扩张}h_1.$$

因为 $g \in P$, 故 $P \neq \varnothing$.

下证 P 是可归纳的, 即 P 中每个全序子集 Q 都有上界, 然后再由 Zorn 引理可知, P 有极大元.

设 $Q \subset P$ 是全序子集, 记 $Q = \{h_i, i \in I\}$, 令

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i).$$

若存在 $i \in I$, 使 $x \in D(h_i)$, 则令 $h(x) = h_i(x)$, 易见 h 的定义有意义, 即 $h \in P$ 且 h 是 Q 的一个上界, 应用 Zorn 引理, 故有极大元 $f \in P$. 进一步须证 $D(f) = E$. 采用反证法. 设若 $D(f) \neq E$, 则 $D(f)$ 真包含在 E 中, $\exists x_0 \notin D(f)$, 定义 h 使得

(1) $D(h) = D(f) + Rx_0$;

(2) $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha, \forall x \in D(f), \forall t \in R$,

这里 $\alpha \in R$. 适当选取 α 以使 $h \in P$, 即

(3) $f(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in R$.

如果存在这样的 α, 则因为 $\forall x \in D(f), h(x) = f(x)$, 但在 $D(f) + tx_0$ 上 h 又有定义, 所以 h 是 f 的扩张, 这与 f 是极大元矛盾.

剩下来要证明满足条件 (3) 的 α 存在.

若成立 (i) $f(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0), \forall x \in D(f)$;

(ii) $f(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0), \forall x \in D(f)$,

则有

(1) $t > 0, f(x) + t\alpha = t\left[f\left(\dfrac{x}{t}\right) + \alpha\right] \leqslant t\left[p\left(\dfrac{x}{t} + x_0\right)\right] = p(x + tx_0)$;

(2) $t < 0, f(x + t\alpha) = (-t)\left[f\left(\dfrac{x}{-t}\right) - \alpha\right] \leqslant -tp\left(\dfrac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0)$;

(3) $t = 0, f(x) \leqslant p(x)$.

由 (i), (ii) 可知, 只须 α 满足:

$$\begin{cases} \alpha \leqslant p(x + x_0) - f(x), & \forall x \in D(f), \\ \alpha \geqslant f(x) - p(x - x_0), & \forall x \in D(f), \end{cases}$$

则有

$$\sup_{y\in D(f)}\{f(y)-p(y-x_0)\}\leqslant\alpha\leqslant\inf_{x\in D(f)}\{p(x+x_0)-f(x)\}.$$

这样的 α 的存在性来自于以下不等式

$$f(y)-p(y-x_0)\leqslant p(x+x_0)-f(x),\quad \forall x,y\in D(f).$$

而此不等式成立源于 f 的线性性、p 的次可加性及在 $D(f)$ 上成立 $f(x)\leqslant p(x)$, 故有

$$\begin{aligned}f(x)+f(y)=f(x+y)&\leqslant p(x+y)=p(x+x_0+y-x_0)\\&\leqslant p(x+x_0)+p(y-x_0).\end{aligned}$$

故定理 2.2.2 得证.

注 读者可试试定理 2.2.2 能否推广到复数域上的赋范线性空间上.

现回到定理 2.2.1 的证明, 当 E 是实的赋范线性空间时, 它可以看作定理 2.2.2 的一个推论.

事实上，令 $p(x)=||g||_{G^*}\cdot||x||$. 由于 $||g||_{G^*}=\sup\limits_{x\in G,x\neq 0}\dfrac{g(x)}{||x||}$, 故 $f(x)=g(x)\leqslant p(x),\forall x\in G$, 则由定理 2.2.2 知, 存在定义在全空间 E 上的线性泛函 f, 它扩张 g 且有

$$f(x)\leqslant p(x)=||g||_{G^*}\cdot||x||,\quad \forall x\in E,$$

故

$$\sup_{x\in E,x\neq 0}\frac{f(x)}{||x||}\leqslant||g||_{G^*},$$

即

$$||f||_{E^*}\leqslant||g||_{G^*}.$$

又显然有 $||f||_{E^*}\geqslant||g||_{G^*}$, 故

$$||f||_{E^*}=||g||_{E^*}.$$

当 E 是复数域上的赋范线性空间时, 定理 2.2.1 的证明可参见 [16], [110].

下面研究 Hahn-Banach 定理的几何形式, 即凸集分离定理.

定理 2.2.3 (Hahn-Banach 定理第一几何形式) 设 E 是实的赋范线性空间, $A\subset E,B\subset E$ 是两个非空凸子集且 $A\cap B=\varnothing$, 设 A,B 中有一个是开集, 则存在闭超平面 H 分离 A 和 B. 即存在连续线性泛函 $f:E\to R$ 满足:

(i) $H=\{x\in E|f(x)=\alpha\}$;

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com