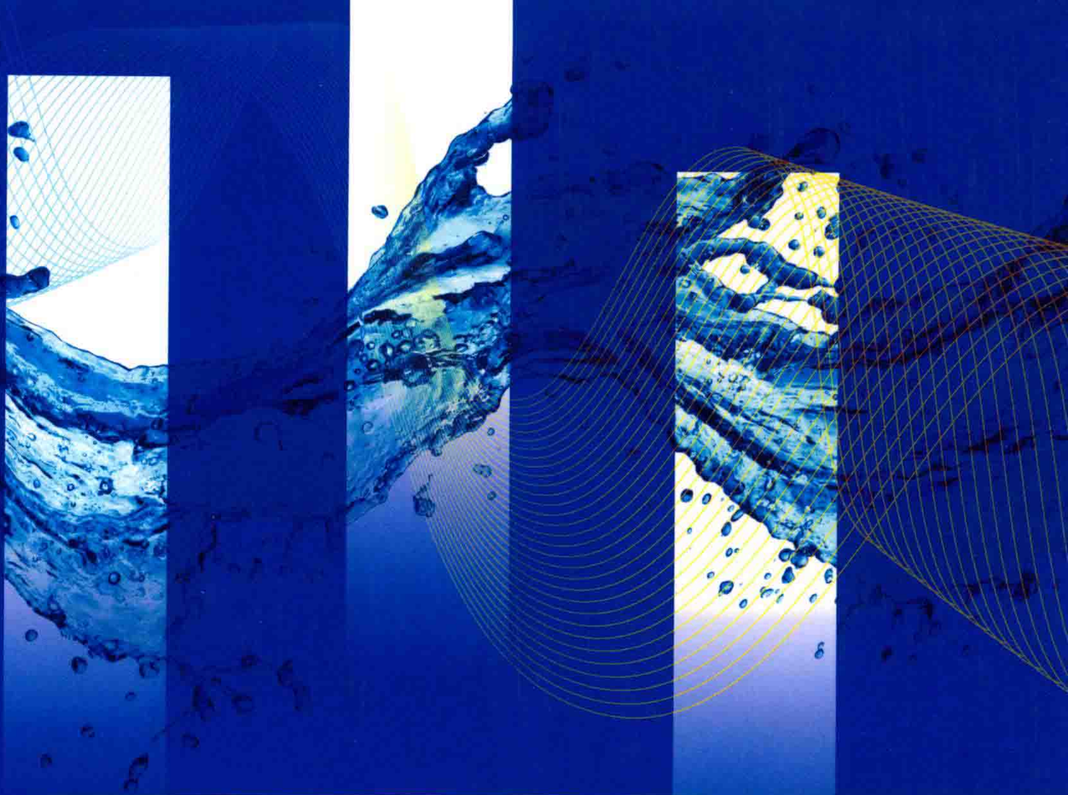

高等数学

Advanced Mathematics

（下册）

主　编　陈海杰　张丽蕊
副主编　朱红鲜　叶超荣
　　　　赵春霞

高等教育出版社

高等数学

Gaodeng Shuxue

（下册）

主　编　陈海杰　张丽蕊

副主编　朱红鲜　叶超荣　赵春霞

高等教育出版社·北京

内容提要

本书依据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成，分为上、下两册。上册内容包括一元函数微积分学、微分方程，下册内容包括空间解析几何、多元函数微积分学、曲线与曲面积分、级数。每章末配有自测题以及综合提高题，方便读者练习与提高，书后附有习题、自测题、综合提高题的参考答案与提示，供读者查阅与参考。

本书注重数学思想的渗透和数学方法的介绍，淡化部分理论与计算技巧，内容由浅入深，例题由易到难，题解分析详细，以逐步使读者掌握利用高等数学知识分析问题、解决问题的基本思路与方法。

本书可供高等学校工科类本科各专业的学生选用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.下册／陈海杰，张丽蕊主编.--北京：高等教育出版社，2016.2

ISBN 978-7-04-044771-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第019866号

策划编辑	张彦云	责任编辑	张彦云	封面设计	赵 阳	版式设计	童 丹
插图绘制	邓 超	责任校对	高 歌	责任印制	韩 刚		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	涿州市京南印刷厂		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	19		
字 数	350千字	版 次	2016年2月第1版
购书热线	010-58581118	印 次	2016年2月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	30.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 44771-00

前　言

当前,我国高等教育已进入“大众化教育”阶段,为探索更好地培养创新型人才,广大高校历经多年教学改革,人才培养模式和人才培养目标发生了深刻的变革,随之而来的,大学数学基础课程的教学也发生了相应的变化。为了适应这种新的需求,我们结合学生现状以及专业要求的实际情况,同时结合多年来的实际教学经验,编写了这本教材。

本书根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新制订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成,主要具有以下特点:

(1) 注重数学思想的渗透和数学方法的介绍,突出知识的应用背景和实例,适当降低部分数学理论的证明与计算技巧。

(2) 参考国外优秀教材,试图通过丰富的实例,并利用大量图形,由浅入深地引入数学的基本概念,使得教材通俗易懂,可读性强。

(3) 例题选取由易到难,题解分析详细,使得读者通过例题的分析逐步掌握利用高等数学知识分析问题、解决问题的基本思路与方法,提高数学应用能力。

(4) 内容涵盖一般专业对高等数学教学的要求,还满足部分学生继续学习深造的需求,凡超出“基本要求”以外的内容都标有 * 号,可作为选学内容,以适应分层次教学的需要。

全书分上、下两册。上册内容包括一元函数微积分学、微分方程;下册内容包括空间解析几何、多元函数微积分学、曲线与曲面积分、级数。每节均配有习题,是读者复习、巩固所学知识的基本练习题,每章后还配置自测题以及综合提高题,方便读者总结与提高。书后附有习题、自测题、综合提高题的参考答案与提示,供读者查阅与参考。

本书由上海海洋大学基础教学部教师编写,参加编写的成员有:叶超荣(第八章),朱红鲜(第九章),赵春霞(第十章),陈海杰(第十一、十二章),张丽蕊(习题),全书由陈海杰、张丽蕊统稿。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 8 月

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过建立平面坐标系将平面上的点与一对有序数组相对应，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法研究几何问题.空间解析几何也是通过类似的方法建立起来的.

本章先引进向量的概念以及向量的线性运算，建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容，主要包括平面和直线的方程、空间曲面和空间曲线的方程. 正如平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，本章的内容对以后学习多元函数微积分将起到重要作用.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做**向量**（**矢量**）.

在几何上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.

图 8-1-1

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$（图 8-1-1）. 有时也用一个黑体字母（或在字母上方加箭头）来表示向量，例如，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$（或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$）等.

向量的大小叫做向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于零的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看做是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且模相等，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.也就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向.因此在数学上，我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**.以后无特别说明，所讨论的向量都是自由向量.

对于任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,当把它们的起点移到同一点时,得到的夹角 θ(如图 8-1-2)称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

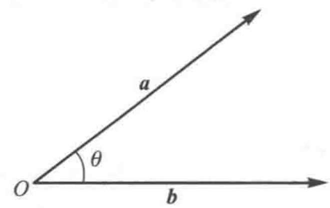

图 8-1-2

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

当两个平行向量的起点移到同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此，两向量平行又称两向量**共线**.

类似地,还有向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant3)$ 个向量，当把它们的起点移到同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 $\overrightarrow{AC}$,则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 8-1-3).

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**.

特别地,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,如图 8-1-4,以 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 为和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.此方法叫做向量相加的**平行四边形法则**.

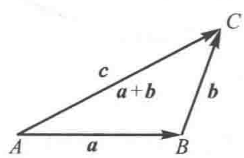

图 8-1-3

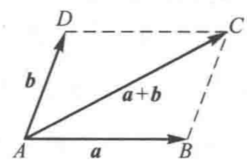

图 8-1-4

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\quad\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $\quad(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：先作向量 $\boldsymbol{a}_1$，然后以前一向量的终点作为下一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点为起点，向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 8-1-5，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 8-1-6(a)）.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 8-1-6(b)）.

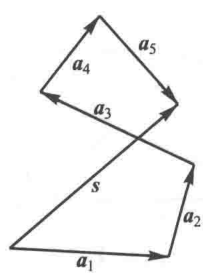

图 8-1-5

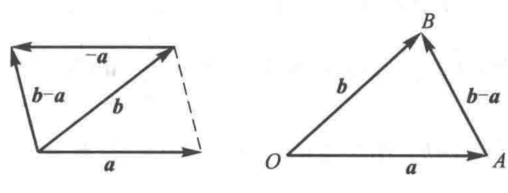

图 8-1-6

由三角形两边之和大于第三边的结论，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{1}$$

及

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \tag{2}$$

其中(1)式和(2)式的等号分别在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向和反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|,$$

它的方向：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这些规律都可以按向量与数的乘法的规定来证明，从略.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

我们把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$.由向量与数的乘法的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,$$

于是

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.这一过程又称为将向量**单位化**.

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点(图 8-1-7).

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA},$$

于是　$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

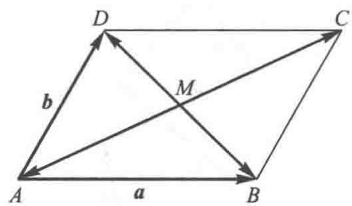

图 8-1-7

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.取 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, \text{即} |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

定理证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox（图 8-1-8），对于数轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

图 8-1-8

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为数轴上点 P 的**坐标**.

由此可知，数轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}.$$

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**，通常按右手规则建立三个坐标轴的正向，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以角度 $\frac{\pi}{2}$ 转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8-1-9. 这样就构成了**空间直角坐标系** $Oxyz$.

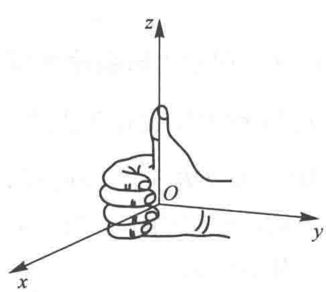

图 8-1-9

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为**坐标面**. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 其中，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的部分为第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面上方，从第一卦限按逆时针方向依次为第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向依次为第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（图 8-1-10）.

对于空间的任一点 M，过点 M 分别作三个垂直于坐标轴的平面，与 x、y、z 轴

分别交于 P、Q、R 三点(图 8-1-11),设 P、Q、R 在各自坐标轴上的坐标分别为 x、y、z,则称 x、y、z 这三个有序数为点 M 的**坐标**,记为 $M(x,y,z)$. 显然,空间点与它的坐标一一对应.

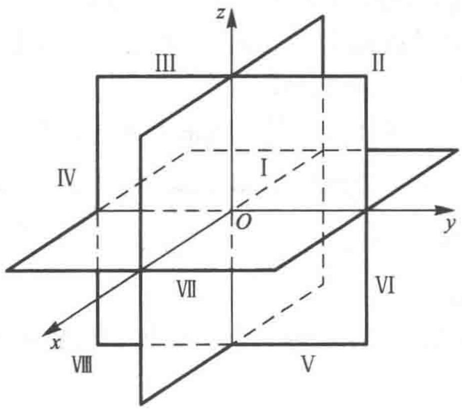

图 8-1-10

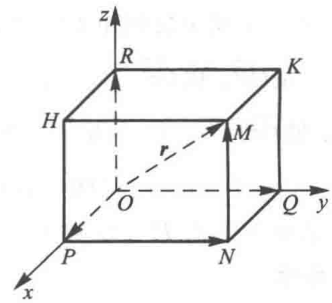

图 8-1-11

如果设三条坐标轴上的单位正向向量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,那么任给向量 $\boldsymbol{r}$,只要将向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点放在坐标原点,就对应有点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.过 M 作三个垂直于坐标轴的平面,它们和三个坐标面围成一个长方体 $RHMK-OPNQ$,如图 8-1-11 所示,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**,$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 也称为点 M 关于原点 O 的**向径**.显然,给定向量 $\boldsymbol{r}$,就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量,从而确定了有序数组 x,y,z;反之,给定一个有序数组 x,y,z,也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M,于是点 M,向量 $\boldsymbol{r}$ 与向序数组 x,y,z 之间有一一对应的关系

$$M\longleftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z),$$

记作 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$,有序数组 x,y,z 也称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\ ,$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\qquad(\lambda\text{ 为实数})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.\end{aligned}$$

由此可见,对向量进行加、减法及与数相乘的运算,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 1 指出,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),\text{即}\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

注 当 a_x,a_y,a_z 有一个为零,例如 $a_x=0,a_y,a_z\neq0$ 时,上式应理解为$\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z},\end{cases}$当 a_x,a_y,a_z 有两个为零时,例如 $a_x=a_y=0,a_z\neq0$,上式应理解为$\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$

例 2 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}\\&=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以,向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda(\lambda\neq-1)$, 在直线 AB 上求一点 M, 使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解法一 如图 8-1-12 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,

从而 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\ \overrightarrow{OB})$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}[\{x_1,y_1,z_1\}+\{\lambda x_2,\lambda y_2,\lambda z_2\}]$$
$$=\left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\}.$$

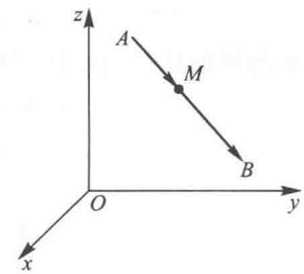

图 8-1-12

这就是点 M 的坐标.

解法二 设所求点为 $M(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$，$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$. 依题意有$\overrightarrow{AM}=\lambda\ \overrightarrow{MB}$，即
$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\lambda\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\},$$
$$\{x,y,z\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\lambda\{x_2,y_2,z_2\}-\lambda\{x,y,z\},$$
$$\{x,y,z\}=\frac{1}{1+\lambda}\{x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2\},$$
所以 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

本例中的点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段AB的中点为
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 8-1-11 所示，有
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$
按勾股定理可得
$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$
由$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，有
$$|OP|=|x|,|OQ|=|y|,|OR|=|z|,$$
于是得**向量模的坐标表示式**
$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 和点 B 间的距离 $|AB|$ 就是

向量$\overrightarrow{AB}$的模.由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 4 在 x 轴上求与两点 $A(0,\ 1,\ 7)$ 和 $B(3,\ 1,\ 5)$ 等距离的点.

解 设所求的点为 $M(x,\ 0,\ 0)$，依题意有 $|MA|^2=|MB|^2$，即

$$x^2+(0-1)^2+(0-7)^2=(x-3)^2+(0-1)^2+(0-5)^2.$$

解之得

$$x=-\frac{5}{2},$$

所以，所求的点为 $M\left(-\dfrac{5}{2},0,0\right)$.

例 5 已知两点 $A(-2,1,3)$ 和 $B(-1,0,2)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为$\overrightarrow{AB}=\{-1+2,0-1,2-3\}=\{1,-1,-1\}$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

于是

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,-1\}.$$

2. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 从图 8-1-13 可见，设$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，由于 x 是向量$\overrightarrow{OP}$的模，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},$$

类似可知

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

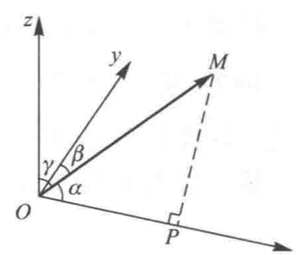

图 8-1-13

从而

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right\}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\{x,y,z\}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r.$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$，并由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 6 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解
$$\overrightarrow{AB}=\{3-4,0-\sqrt{2},2-1\}=\{-1,-\sqrt{2},1\},$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2};$$
所以
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

3. 向量在轴上的投影

设有点 O 及 u 轴(图 8-1-14)，$\boldsymbol{e}$ 是 u 轴上的单位正向向量. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M' 叫做点 M 在 u 轴上的**投影**)，向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**分向量**.设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即
$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质：

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$)，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴正向的夹角；

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u a+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$)；

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$).

例 7 设立方体的一条对角线为 OM,一条棱为 OA,且 $|\overrightarrow{OA}|=a$,求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解 如图 8-1-15,记 $\angle MOA=\varphi$,有

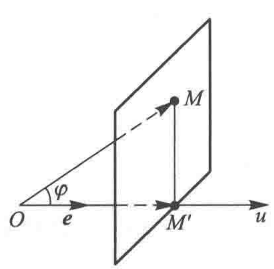

图 8-1-14

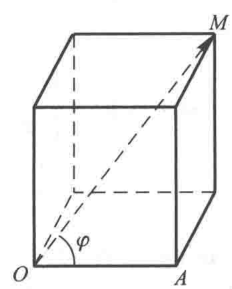

图 8-1-15

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

习题 8.1

1. 填空：

(1) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足________.

(2) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足________.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

4. 把 $\triangle ABC$ 的边 BC 五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

5. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是一个平行四边形.

6. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(2,-2,3),\quad B(3,3,-5),\quad C(3,-2,-4),\quad D(-4,-3,2).$$

7. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？并指出下列各点的位置：

$$A(2,3,0),\quad B(0,3,2),\quad C(2,0,0),\quad D(0,-2,0).$$

8. 求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

9. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

10. 求点 $M(5,-3,4)$ 到各坐标轴的距离.

11. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点.

12. 已知两点 $M_1(0,1,2)$，$M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

13. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 3，且其方向角 $\alpha=\gamma=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

15. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别满足

$$(1)\ \cos\alpha=0;\quad (2)\ \cos\beta=1;\quad (3)\ \cos\alpha=\cos\beta=0,$$

问此时向量和坐标轴或坐标面的关系如何？

16. 已知 $|\boldsymbol{r}|=4$，$\boldsymbol{r}$ 与 u 轴的夹角是 60°，求 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$.

17. 一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$，求该向量的起点 A 的坐标.

18. 求与向量 $\boldsymbol{a}=\{16,-15,12\}$ 平行，方向相反，且长度为 75 的向量 $\boldsymbol{b}$.