

◎ 原著 美国数学及其应用联合会 (COMAP)
美国工业与应用数学学会 (SIAM)
编译 梁贯成 赖明治 乔中华 陈艳萍



教学与评估指南

Guidelines for Assessment and Instruction in
Mathematical Modeling Education

本书英文版由美国工业与应用数学学会 (SIAM)
美国数学及其应用联合会 (COMAP)
美国全国数学教师协会 (NCTM) 联合推出

本书是美国数学教育、落实美国数学课程共同核心国家标准 (CCSSM) 的一部力作
正值中国高中数学课程标准修订版即将颁布, 本书旨在为学校加强数学核心素
学建模的教与学提供助力

数学建模教学与评估指南

Guidelines for Assessment and Instruction in
Mathematical Modeling Education

美国数学及其应用联合会(COMAP)

美国工业与应用数学学会(SIAM)

原著

梁贯成 赖明治 乔中华 陈艳萍 编译

上海大学出版社

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教学与评估指南/梁贯成等编译. —上海:
上海大学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-5671-2840-8

I. ①数… II. ①梁… III. ①数学模型—教学研究
IV. ①0141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 100185 号

统 筹 张岩峰

责任编辑 焦贵萍 徐海丽

封面设计 缪炎栩

数学建模教学与评估指南

梁贯成 赖明治 乔中华 陈艳萍 编译

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.press.shu.edu.cn> 发行热线 021-66135112)

出版人 戴骏豪

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷有限公司印刷 各地新华书店经销

开本 787 mm×960 mm 1/16 印张 18.25 字数 315 千

2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5671-2840-8/O·068 定价 58.00 元

原版说明

《数学建模教学与评估指南》帮助读者理解建模过程是 STEM(科学、技术、工程、数学)学习和研究的一部分,同时帮助读者教授数学建模——这一培养解决问题和逻辑思维能力的的基本工具。本书有助于提高包括学生实践经验在内的核心素养和能力(Core Competencies),同时为加强各级数学建模教育提供方向。

美国工业与应用数学学会(SIAM)

美国数学及其应用联合会(COMAP)

原版版次: 2016 年 4 月第 1 版

ISBN: 978-1-611974-43-0 eISBN: 978-1-611974-44-7

版权所有,未经出版人事先书面同意,本书任何内容不得以在线或任何其他方式复制、储存或传播。中文版版权由儒莲教科文机构拥有。

中文版序一

在《数学建模教学与评估指南》的英文版序言中我们表明，“……我们主要的读者是您，教师。尽管我们希望考试和政策的制定者会阅读这份文件，并在决策中用到它，但本书原本乃为一线教师而写。当你们把数学建模的实践纳入课堂时，我们希望这些指南能有所帮助。”本书写作的宗旨在于为日常教育创造实在的变革。

本书作者坚信数学建模本身即是一种生活技能。唯此，我们相信对于所有教育层次而言，数学建模都需要成为数学教育中必不可少的一部分。我知道，在高等教育层次，中国的大学已经认识到建模的重要性，并相应调整了教育科目与课程。这样的过程现在也开始在基础教育层次展开。

本书的目的是为您铺垫门径——向您展示如何在每一个年级引入数学建模，让学生在学更多数学知识的同时，在更宽的视野中看到数学一系列的重要应用。我们知道，引入一套新的课程需要时间与合作，我们视本书即为这一进程的第一步。

需要指出的是，您面前的版本并非简单对美国文本的翻译。我们明白，在我们的教育体制之间存在不同之处。因此，您在中文版的案例附录中将会看到中国当前的教学经验，那是来自北京和上海的中学教师的教学范例。

并且，我们还增加了一节新的附录，介绍“国际数学建模挑战赛”（IMMC 或 IM^2C ）。从中您可以看到，当数学建模成为教育体系的一部分，学生可以达至怎样的成就。

我愿再一次强调，本书是为您——教师而作。愿本书助您开启一段新的教育里程，我们期待着与您携手同行。

索尔·加芬克尔



美国数学及其应用联合会总裁

Preface

In the preface to the English edition of the GAIMME report we state: "...our primary audience is you the teacher. While we hope that test and policy makers will read this document and use it in their decision-making, it has been written for the front-line teacher. We hope and intend that these guidelines will be of help as you incorporate the practice of mathematical modeling into your classrooms." This report has been written in the spirit of creating real day-to-day educational change.

The authors of this report firmly believe that mathematical modeling is a life skill in and of itself. Because we believe this so strongly, we believe that mathematical modeling needs to be an essential part of a student's mathematics education at ALL educational levels. My understanding is that at the tertiary level Chinese universities have recognized the importance of modeling and adjusted programs and curricula accordingly. This process is just beginning at the K – 12 level.

The purpose of this report is to ease the way-to show how mathematical modeling can be introduced at each grade level as students learn more mathematics and see a broader spectrum of possible and important applications. We know that introducing a new curriculum perspective will take time and cooperation. We see GAIMME as a first step in that process.

It should be mentioned that what you have before you is not simply a translation of a U.S. document. We understand that there are differences in our educational systems. Therefore, you will find an appendix detailing the current

Chinese experience with input from local teachers. Examples and exemplars have been taken from secondary schools in Beijing and Shanghai.

In addition, we have created a second new appendix on the International Mathematical Modeling Challenge (IMMC or styled as IM²C) to highlight and document what students can achieve when mathematical modeling is part of their educational system.

Again, I want to emphasize that this report is written for you the teacher-to help you on a new educational journey-one we look forward to going on together.

Sol Garfunkel

A handwritten signature in black ink, reading "Sol Garfunkel". The signature is fluid and cursive, with the first name "Sol" and last name "Garfunkel" clearly distinguishable.

Executive Director, COMAP

中文版序二

数学既是人类知识体系中基本的科学语言,也是人类探索和改造世界的重要科学工具。数学的广泛应用根本地推动着科技的进步,深刻地影响着文明的进程。特别是近半个多世纪以来,随着计算机和信息技术的迅猛发展,数学的应用不仅在工程、技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用,而且以空前的广度和深度向着经济、管理、金融、医学、环境、能源等新的领域渗透交叉。数学技术已经成为当代高新技术的基础和重要组成部分。

数学的应用,即把数学的方法应用到实际问题中,要求我们利用基于经验直观或科学规律的假设,来简化原本的现实问题,使用数量、公式等形式来表示问题内部的客观联系,从而得出供人们做分析、预报、决策或控制的定量结果。这个过程就是我们通常所说的数学建模。数学建模是联系数学和实际问题的桥梁,同时也是应用数学去综合解决实际问题过程中最为关键的,有时也是最具挑战性的步骤。建立数学模型是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程,需要通过调查和收集数据资料,考察和研究实际对象的固有特征和内在规律,从纷纭的关系中抓住问题的主要矛盾,建立起反映实际问题本质的数量关系,然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这就需要做好扎实的数学知识和方法的准备,需要发挥敏锐的想象力和深刻的洞察力,以及保持对实际问题的浓厚兴趣,还要掌握与问题相关的宽广知识。

近几年来,数学建模在科学、技术、工程、经济与社会发展中的重要作用越来越受到普遍重视,数学建模能力已经成为现代科技工作者必备的重要能力之一。数学建模进入各级各类学校课堂已经成为世界教育的潮流。

数学建模是从 20 世纪 60 至 70 年代开始进入一些西方大学的,中国的大学也在 20 世纪 80 年代初将数学建模引入课堂。经过 30 多年的发展,为了适应科技进

步和培养高质量、复合型的人才的需要,数学建模课程和讲座已经进入了绝大多数本科院校和许多专科学校,并且逐渐向中小学教育渗透。当初富于远见的举措为培养学生利用数学方法分析和解决实际问题的能力开辟了一条有效途径。实践证明,数学建模是培养学生基本科学素养和综合创新能力的有效方法,是科技创新教育的题中应有之义。

数学建模教育需要分阶段、有系统和持之以恒地开展,同时也要形式灵活,密切联系生产生活和社会发展的实际,用发展的眼光和热情来调动学生的兴趣。因此,对广大数学与科技工程相关学科的教师提出了新的更高的要求。美国工业与应用数学学会和美国数学及其应用联合会编写的这本《数学建模教学与评估指南》,总结了美国近四十年来数学建模教学的经验和最新教育成果,内容涵盖了从学前、小学、中学到大学的各级教育,把建模过程作为 STEM(科学、技术、工程、数学)学习和研究的核心部分,同时也把建模教学作为培养解决问题和逻辑思维能力的根本途径。本书有助于教师通过建模过程的教学来内化学生实践经验,塑造核心素养和能力(Core Competencies),同时也为加强各级数学建模教育提供了方向性指导。本书的侧重点不是在于给出一套完整的教学大纲或者课堂评估方案,而是给读者提供清晰明了的数学建模概念、教学策略和方法。以此为指导方针,本书分别针对学前、小学、初中、高中和大学阶段介绍了数学建模该如何逐级展开,并且针对如何从一个年级段自然地过渡到另一个年级段给出了清晰的指导和可行的建议。

本书在告诉读者数学建模的重要性的同时,也说明数学建模并不是一个站在金字塔上端的概念,恰恰相反,它是可以普及的,并可渗透到学生教育的每一个阶段。无论学生处于数学学习的哪一个阶段,无论他们的数学程度如何,只要对探索和创造充满好奇与兴趣,他们都可以行之有效地在老师的指导下参与到数学建模的学习与实践中来。本书所阐明的数学建模的普遍性以及如何使得数学建模成为学生学习体验中的重要一环,并贯穿学生的整个教育过程,无疑对我们推广和普及数学建模教育具有良好的启发和参考意义。

数学建模是连接学习与研究的桥梁,可以帮助学生发现自己感兴趣的问题。

兴趣是最好的老师,可实际情况往往是很多学生不知道自己的兴趣所在,也不知道读书有什么用,从而失去了学习的动力,这时候非常容易产生厌学的心理。遇到这种情况,以本书为指导方针,在老师的引导下,吸引学生选择实际问题开展数学建模研究,学生就会在研究中很快发现自己知识不够,他(她)就会自学或者选修一些课程,从而增强学习的积极性和主动性。

中国的科技进步召唤中国的数学建模教育有进一步的蓬勃发展。从“天河二号”的超级计算到高速铁路的运行优化,从深海探测到航天遥感,从“互联网+”到“中国制造 2025”,从人工智能到万物互联……数学应用和数学建模都发挥着举足轻重的作用。毫无疑问,培养数学建模能力和素养将是未来各行各业对创新型人才的共同要求。

张平文

中国工业与应用数学学会理事长

中国科学院院士

2017 年 2 月 26 日

中文版序三

祝贺《数学建模教学与评估指南》中文版正式出版,同时,祝贺国际数学建模挑战赛(IMMC 或 IM^2C)全面推进。在 2017 年,中国即将公布新版“高中数学课程标准”,在新修订的“高中数学课程标准”中,把数学建模作为数学核心素养,要求数学建模理念贯穿整个高中数学教育的始终。这些举措都将对中国的数学建模教学、数学建模活动产生重大影响,同时,也将促进数学的教、学和评价的变革。

《数学建模教学与评估指南》是由美国数学及其应用联合会(COMAP)联合美国数学教师协会(NCTM)和美国工业与应用数学学会(SIAM)合作推出。这本书是推动数学教育深入发展的重要著作,也是探索数学建模教学和评价规律的奠基性著作。这本书凝练了近几十年数学建模教学和评价的经验,推进数学建模在小学、初中、高中、大学数学教育中一体化,对于下一阶段中国数学课程的教学、评价的深入发展有很好的借鉴意义。

自二十世纪八九十年代以来,中国大学、中学、小学在数学教育中,陆续以不同方式引入了数学建模的思想,大体经历了以下阶段。第一阶段,在大学、中学先后开展了数学建模竞赛活动,一方面,这些活动为学生展示数学应用才华提供平台,促进学生数学应用能力的发展,使得很多学生的数学应用能力在不同职业发展中,发挥了很大的作用;另一方面,在研究和教学上为教师专业发展开拓了新的方向,为后续数学建模课程、教学、评价的深入发展,培养了一批中坚力量;更为重要的是普及了数学建模的理念、意义及作用。第二阶段,开展数学建模活动——校本课程,首先在大学很多学校陆续开设了数学建模课程,包括理科院系、工科院系以及文科院系,建设了一批数学建模、数学实验的教材,各有特色;在很多中学也开设了不同形式的数学建模校本课程,一些中学还建立了数学实验室,数学建模又是依托实验室开设的主要课程;在小学,综合实践课程的主要内容本质上也是数学建模。第三阶段,从校本课程至国家课程,教育部大学数学教学指导委员会把数学建模、数学实验课程纳入了大学数学课程体系,并不断推进数学建模课程在不同院系开设,使得数学建模已经成为很多学校的必修课程,成为大部分学校的选修课程;

2003年,在中国大陆《高中数学课程标准(实验稿)》中,把数学建模列为课程内容,并提出了具体要求;在2017年即将公布的修订版“高中数学课程标准”中,提出数学建模作为数学核心素养,要求把数学建模理念贯穿在整个高中数学教育的始终,把数学建模作为内容主线,安排了具体课时。这也是中国基础教育数学课程发展的一个标志性结果。

在下一个阶段,中国的“数学建模的教学和评价”将面临很大挑战,尤其是基础教育中的数学建模教学与评价。例如,如何全面推进数学建模的教学?如何评价学生数学建模水平?特别是在考试评价中,如何命制考察学生数学建模能力的试题?如何提升高中教师自身的数学建模能力和数学建模教学能力?这些都需要中国的数学和数学教育工作者借鉴国内外的经验,共同努力,克服困难,推动中国数学教育的发展。

为了更好地推动中国数学建模活动,在《数学建模教学与评估指南》一书中还介绍了“国际数学建模挑战赛”(IMMC或IM²C)。这一国际大赛已经举办了三届,主要面对世界各国的中学生。“国际数学建模挑战赛”还特设大中华赛区,使之在中华地区全面推广。该挑战赛通过专家命题的形式持续展示数学在各行各业的广泛应用,同时,鼓励学生自主发现和提出生活中有价值的问题,在思考、分析、解决这些问题过程中,完成自己的研究成果,展示数学建模与应用的能力和才华。挑战赛为学生创新能力发展提供了广阔舞台,也是一个国际交流的园地,对推进本地区学生开展数学建模活动发展提供强大的动力。我们希望中国广大教师关注、参与此项活动,鼓励、支持、指导学生积极参加竞赛;我们更希望中国大陆的教师能把竞赛活动与数学建模日常教学有机结合起来,探索提升数学教学特别是数学建模教学的经验。

我们衷心祝愿中国的数学建模教育不断深入发展。

王尚志

教育部高中数学课程标准研制组副组长

教育部高中数学课程标准修订组组长

首都师范大学教授

2017年3月

中文版序四

本书将数学教师带入一个之前也许较少涉略的领域——数学建模。数学建模就是如何将数学应用到现实生活的历程,非常值得数学教师在课堂引入相应教学以加强学生学习数学的动机。数学建模的概念在教师教学培养的过程中,或是在加速的数学教学中常被忽略的,因而最后在教学现场只剩标准而乏味的“数术”问题。而本书配合不同的学习阶段,从学前、小学、初中、高中到大学,各给出如何将原本纯数学的教学问题改造成建模问题的例子,并配合学生的数学能力,给出对应的生活情境。如小学的加减问题转化为旅游野餐的食物准备;高中斜率问题转换为打工薪资比较问题;到了大学则以微积分差商来评估无人机飞行安全问题。每一个都是由原始的数学问题出发,透过添加意义与解释来转变成建模问题。这几个例子给老师一个起点,一个将教学现场的问题联结现实生活问题的方式。

数学建模历程通常是反向的,也就是将现实生活问题透过数学来解决,就像书中提到的,该去哪个加油站加油的问题一样。虽然在繁琐的日常生活中,这有一种为赋新词强说愁的感觉,但是学生甚至老师都会有这样的感觉:“这根本是未定义完全的数学问题嘛!”其实,生活中有哪件事情是完美的呢?不完美的故事才有遗憾,才能引人深思,不是吗?学生为了解决这种现实生活的问题,就得自己找寻这故事中不足的片段,一步一步将这个故事拼完。这不就是我们的教育想要培养学生自我思考、动手做的能力吗?书中这些数学建模的例子就留给读者自行阅读、体会并思考了。在这里我们强调的数学建模,绝对不是用以取代整体的数学课程,而是在原始的抽象训练之外,提供与现实生活的联结,以增强学生应用数学的能力。

本书在三个不同的学习阶段,小学到初中、高中以及大学都设独立章节给予了更多数学建模的例子,并依据学生的数学及心理成熟度来建议教师在整个过程中该扮演的角色及指导原则。数学建模是一个需要时间培养的能力,它不像一般数

学问题有一个完全正确的答案,更鲜少会漂亮地有一个快速的解法!所以在此过程中,教师的陪伴是非常重要的。除了鼓励学生不畏挫折,给学生指引方向,更必须多一双发现学生数学以外优点的慧眼;就如同毕业后去工作一样,专业能力固然重要,缺了内部沟通、公关展示,也不过像是自己开了一部超强挖土机暴走一样,怎么也盖不出一栋大楼来。教师在教学现场究竟要带给学生什么?又想要学生在他们的未来探索中留下些什么?教师必须打开学生心中“你的数学很棒”的另一扇门!

本书也对数学建模的历程给了一个评价方式。如果读者已全然了解数学建模的精神,就会发现那其实也是一种建模,是用一个简易的方式来评价学生的学习历程。但教师必须了解到,这绝对不是要分个高下,而是提醒学生还有哪里可以做得更好。硬要给出分数加起来,难道是为了让大家排成一条线容易给奖吗?容易升学吗?难道就为了如此要大家拿贝多芬跟莫内来比较吗?所以,本书的最后提醒了读者,数学建模是一种艺术,是一种品味。其实,每个人可以对数学建模有不同的认识。对我来说,有了它,数学精彩了,数学课不再只是囚禁在纸与笔牢笼中的数字竞赛那般无聊了!

最后,感谢美国工业与应用数学学会、数学及其应用联合会及儒莲教科文机构为数学建模教育的付出和努力。

台湾数学会理事长 交通大学讲座教授 赖明治

台湾工业与应用数学会执行秘书 成功大学副教授 舒宇辰

前言

2015 年,美国工业与应用数学学会(SIAM)和美国数学及其应用联合会(COMAP)的负责人一起制定了一部被命名为 GAIMME 的报告——数学建模教学与评估指南。这个报告的命名效仿了美国统计学会的 GAISE 报告¹的名字。如同 GAISE 报告,我们的主要读者是作为教师的您。我们期望当您把数学建模的实践纳入教学课堂时,这些指南对您能有所帮助。另外,虽然本报告是为一线教师所写,然而我们希望考试和政策的制订者们也能阅读本报告,并将其应用到他们的决策中。

编制 GAIMME 的一个主要原因是基于以下事实:尽管数学被证明在解决现实世界的复杂问题时实用而有价值,它有助于分析问题并对决策提供指导,但许多人的数学建模经验非常有限。数学建模作为一个过程,我们想为其描绘一幅更清晰的图景(关于它是什么以及它不是什么),清楚地刻画出无论学生掌握多少数学知识,数学建模的教学都将随着学生年级的递增而有机地发展。

本书的编写让您的阅读可以专注于其中某些部分,但是我们非常希望您有时间和兴趣从头至尾地阅读本书。本书的开篇,“什么是数学建模”,是写给每一位读者的,它阐述了将数学建模纳入所有年级的主要理由,是对后续章节的一个必要导引。随后三个章节分别介绍了小学(包括学前)与初中、高中以及大学三个学段的数学建模。作为教师的您或许自然地希望从“什么是数学建模”直接进入相关学段章节的阅读,但我们鼓励您参看前后章节的内容,从而更清晰地认识到各年级建模过程的教学怎样从一个学段有机地发展到另一个学段。数学建模在各学段虽有不同,但拥有着重要的共同元素。本书的二、三、四章的开篇阐释了如何针对该年级段开展数学建模教学。在相关联的情况下,我们也讨论某个特定阶段数学建模过程的教学与前一阶段如何不同,

简介

如何使用本书

而这与创建模型所需要的数学知识无关。

每一章节都包含一些典型的建模任务案例。这些建模任务的选择基于以下一个或多个理由：

- 是学生感兴趣的,同时(或者)对学生体验是重要的。
- 是建模周期特定要素的典型示例。
- 在真实的课堂上,在现实的时间内,对学生来说是可完成的。

因为建模问题可能极为丰富,并且时常需要重新审视我们的假设,所以这需要时间和篇幅进行探讨。因此,附录 B 和附录 C 中收录了几个较长的问题及其解答。

在每个学段,我们不但讨论了通过建模过程来教授数学,也讨论了数学建模过程本身的教学。此外,我们还讨论了合理评估的特征。由于这种结构,您可能会发现一些重复的观点,这其实是特意安排的。在不同年级的数学建模教学有其各自的特征,但更值得强调的是,它们也存在着许多重要的共同特征。

在三个教学阶段的章节之后,我们再次回到“什么是数学建模”的问题,并通过直接引述写作团队诸作者的语言和评论呈现出来。这一部分是写给所有读者的,是站在数学建模实践者和数学教育工作者的角度来强调建模的艺术性和品味。

本报告中的资源附录 A,给出了一些正被广泛使用的重要的建模评估和课程材料范本。在此附录中还讨论了什么是好的建模评价,以及如何使评价实现不同的建模目标。附录 D 总结了一些用于数学建模的教学或通过建模进行数学教学的量表以及评估工具的例子。

本书不是一门课程,它不包含一整套建模问题。它不是可立即用于课堂的教学计划,也不是一套完整的课堂评估。相反,这本指南的目的在于提供一个概念,告诉读者究竟什么是数学建模,什么不是数学建模,并且提供一系列实施建议,告诉读者如何在不同年级进行数学建模教学。我们尝试阐明数学建模的重要性,以及为什么并如何使数学建模成为每个学生的数学体验的重要组成部分,并贯穿学生整个教育过程。

作者 Sol Garfunkel

目 录

Preface

中文版序一	1
中文版序二	5
中文版序三	9
中文版序四	11
前言	13
第一章 什么是数学建模	1
第二章 低中年级数学建模：学前班至 8 年级	17
第三章 高中数学建模：9 至 12 年级	38
第四章 大学本科数学建模	64
第五章 什么是数学建模：艺术与品味	89
附录 A：数学建模资源	95
附录 B：学前到初中建模实例	111
附录 C：拓展的建模实例	141
附录 D：评估工具	189
附录 E：中国高中建模实例	201
附录 F：国际数学建模挑战赛	240
参考文献及延伸阅读	262
致谢	268