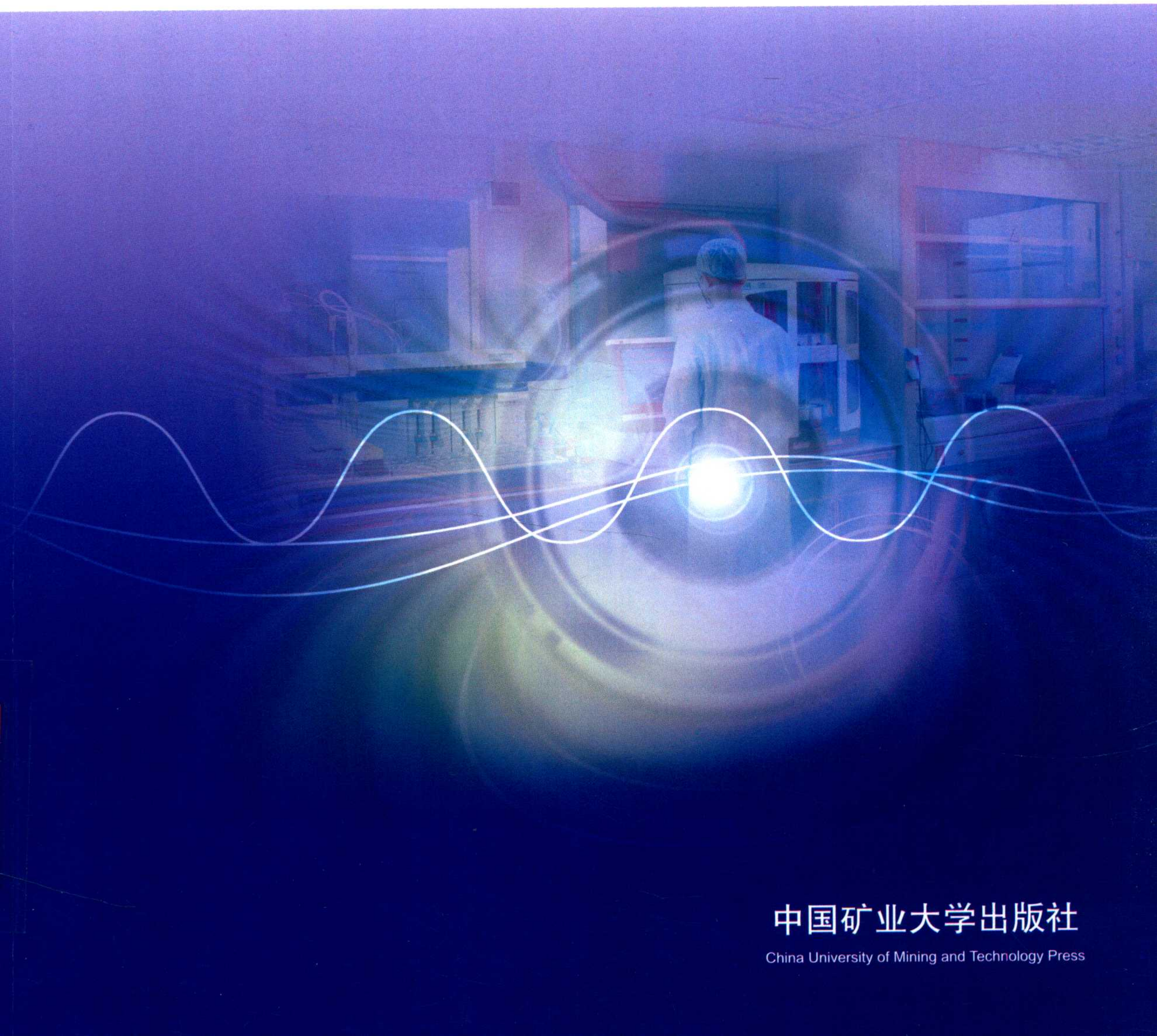
高等教育“十三五”规划教材

医用物理学

YIYONG WULIXUE

高永春　主编



中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等教育“十三五”规划教材

医用物理学

主　编　高永春
副主编　陈　伟　许贺菊　张作凤
　　　　王广新　艾凌艳　赵　强

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

医用物理学是物理学与医学相结合所形成的交叉学科。本书根据教学大纲的要求和医学院校的特点，总结多年的教学改革经验，借鉴国内外相关教材的优点编写而成。

本书在内容的选取和知识深度的把握上，充分考虑了医学相关专业学生的知识基础、科学素质培养要求和专业需要，在注重物理概念、物理原理、物理方法和物理思想传授的同时，更加突出了医用物理学这一交叉学科的特点。此外，加强了物理知识在医学中的典型应用介绍，将与教学内容相关的著名物理学家、医学家的主要科学贡献和医学前沿技术的内容置于学习网站，供学生学习参考。

本书内容包括刚体的运动，流体，振动、波动和声，液体的表面现象，静电场，直流电，磁场，波动光学，几何光学，量子物理基础，原子核和放射性，X 射线共 12 章。

本书可作为高等医学院校及高职专科临床、预防、口腔、影像、检验、药学、麻醉等专业的教材，也可供相关人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

医用物理学 / 高永春主编. —徐州 ：中国矿业大学出版社，2017.7

ISBN 978 - 7 - 5646 - 3623 - 4

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①医用物理学—高等学校—教材 Ⅳ. ①R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 169538 号

书　　名　医用物理学
主　　编　高永春
责任编辑　褚建萍
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 15.25　**字数** 390 千字
版次印次　2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　35.00 元

前言

本书以教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》为依据，基于医学专业的培养目标和教学实际，在总结作者多年的教改经验并吸纳了众多同行专家的教改精华的基础上，结合现代网络信息技术的最新成果编写而成。

《医用物理学》是医学专业学生必修的自然科学类公共基础课，它是将物理学的概念、原理和方法应用于人类保健和疾病的预防、诊断及治疗的一门交叉学科。它的任务是让学生掌握一定的物理学基本概念、规律及其在医学中的应用，为后续医学课程的学习以及将来从事医学教学、科研和临床工作打下必要的物理基础。为了实现这个目标，本书较系统完整地介绍了物理学的基本概念、基本理论和科学研究方法，并适当介绍了物理知识在医学实践中的典型应用。在内容的选取和知识的表述上，充分考虑到学生的数学、物理基础和发展需求，在保持物理概念清楚、不影响学生对物理原理理解的基础上，尽量减少复杂的公式推导过程，使学生在学习时不会感到很困难。将书面教材无法表现的视频、动画以及更深层次的物理与医学结合的应用实例和最新的医学技术成果放在专用教学网站，学生用智能手机扫描书中对应的二维码就可登录网站观看相应内容，便于学习参考。因此，本书有利于开阔学生的视野，激发学生的学习热情和求知欲望，培养学生的自主学习能力，增强学生的探索精神和创新意识，从而使学生科学素质得到全面提升。

为了加强学习的互动和自我测试功能，我们在各章后编写了大量习题放在专用数据库中，学生通过用智能手机扫描各章习题页上的二维码就可登录网站进行练习或自我测试。

本书由高永春担任主编，负责全书统稿，具体编写分工如下：高永春编写第10章，陈伟编写第6、7章，许贺菊编写第1、11、12章，张作凤负责多媒体资源制作，王广新编写第2、3章，赵强编写第8、9章，艾凌艳编写第4、5章。本书可作

为高等院校五年制和七年制医药学各专业的医用物理学课程的教材，也可供基础医学研究人员和临床医务工作者以及生命科学和生物学等相关专业师生学习参考。

本书的出版得到了华北理工大学有关领导的关心与支持，得到了中国矿业大学出版社相关领导和责任编辑的真诚帮助，在此表示衷心的感谢。在本书的编写过程中，编者参考了国内外许多优秀教材和教学参考资料，并在主要参考文献中列出了参考教材。在此谨向相关作者致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中疏漏和欠妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2017年5月

目录

第 1 章 刚体的运动

在研究物体运动时，通常情况下可以把物体看作质点，但是，当研究电机的转动、车轮的滚动、天体的自旋、运动员的肢体运动平衡等问题时，物体的形状、大小往往起重要作用，这时物体不能再看作质点，必须考虑物体的形状、大小以及在力和运动的影响下它们的变化。在很多实际问题中，物体的形状、大小变化都很小，可以忽略，于是人们提出刚体这一理想模型。

1.1 刚体及其运动

刚体(rigid body)是指在任何情况下其形状和大小都不发生变化的物体。

刚体的运动可以分为平动和转动，在运动中，如果刚体上任意一条直线在各个时刻的位置都保持平行，那么这种运动称为**平动**(translation)。如图 1-1 所示，刚体做平动时，在同一时刻，刚体内各质点具有完全相同的位移、速度和加速度，所以，在刚体运动学中，做平动时可以把刚体当成质点来处理。

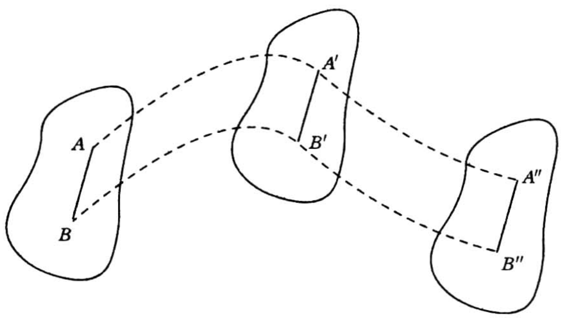


图 1-1 刚体平动图

如果刚体的各个质点在运动中都绕同一直线做圆周运动，那么这种运动就称为**转动**(rotation)，这条直线称为转动轴，如图 1-2 所示。如果在转动过程中，刚体的转轴固定不动，则这种运动称为刚体的**定轴转动**。

平动和转动是刚体的两种基本运动，刚体的任何复杂的运动都可以看成这两种运动的合成。

刚体运动视频

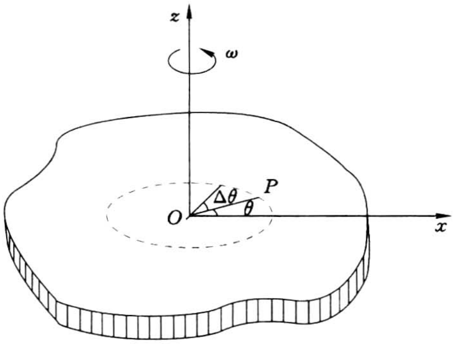


图 1-2 刚体绕固定轴 z 转动

1.2 刚体的定轴转动

1.2.1 刚体定轴转动的运动描写

在研究刚体运动时，常采用平面极坐标或自然坐标描述。极坐标是用角位移、角速度和角加速度等来描述，这些物理量统称为角量；自然坐标是用位移、速度和加速度等描述，这些物理量统称为线量。

(1) 角位移、角速度、角加速度

当刚体做定轴转动时，各质点的速度、加速度一般情况下不同，但各质点的相对位置保持不变，它们做圆周运动的角量都相同，所以描述刚体转动时一般采用角量，如角位置、角位移、角速度、角加速度等。

刚体绕固定轴 z 做定轴转动，如图 1-2 所示，在刚体上任选一点 P；过 P 点的转动平面与转轴交于 O 点，选择 Ox 为参考方向，设 t 时刻 OP 连线与 Ox 的夹角为 θ，则此时 P 点的角位置或角坐标为 θ。$t+\Delta t$ 时刻的角坐标为 $\theta+\Delta\theta$，$\Delta\theta$ 称为刚体在 Δt 时间内的**角位移**(angular displacement)。角位移是描述刚体转动时位置变化的物理量，单位用弧度(rad)表示。如果以 z 轴正方向为转动轴的正方向，习惯上规定逆时针转动时角位移为正，顺时针转动时角位移为负。

角位移 $\Delta\theta$ 与时间间隔 Δt 的比值 $\Delta\theta/\Delta t$ 为刚体在 Δt 时间内转动的平均角速度。当 Δt 趋近于 0 时，平均角速度的极限值称为刚体在 t 时刻转动的瞬时角速度，简称**角速度**(angular velocity)，用 ω 表示，即：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-1}$$

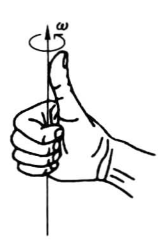


图 1-3 右手螺旋定则

角速度是角位移对时间的一阶导数，是描述刚体转动快慢的物理量，角速度的单位是弧度・秒$^{-1}$($\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$)。角速度是矢量，方向用右手螺旋定则判断，如图 1-3 所示，即四指沿刚体的绕行方向弯曲，垂直伸出的拇指指向代表角速度的方向。

角速度为常量时，刚体做匀速转动，角速度随时间变化时，刚体做变速运动，此时，角速度的增量 $\Delta\omega$ 与时间间隔 Δt 的比值称

为平均角加速度。当 Δt 趋近于 0 时，平均角加速度的极限值称为刚体在 t 时刻转动的**瞬时角加速度**（angular acceleration），用 β 表示，即：

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-2}$$

角加速度是描述刚体转动角速度变化快慢的物理量，是角速度对时间的一阶导数，是角位移对时间的二阶导数。角加速度是矢量，如果刚体做加速转动，则角加速度为正，如果刚体做减速转动，则角加速度为负。角加速度的单位是弧度·秒$^{-2}$（$rad \cdot s^{-2}$）。

（2）角量与线量的关系

刚体转动中的角位移、角速度和角加速度等统称为角量。它和平动中的位移、速度和加速度等线量一一对应。

刚体上任一质点 P 运动所走过的圆弧长度 ΔS 与角位移 $\Delta\theta$ 有如下关系：

$$\Delta S = r\Delta\theta \tag{1-3}$$

刚体上任一点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}$ 与刚体转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有如下关系：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1-4}$$

其大小为：

$$v = r\omega \tag{1-5}$$

其方向由右手螺旋定则判定，当四指从 $\boldsymbol{\omega}$ 方向开始沿小于 π 的角度弯向 $\boldsymbol{r}$ 的方向，拇指所指的方向为线速度的方向（矢量运算法则见附录 1）。

刚体上任一点 P 的切向加速度为：

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \beta r \tag{1-6}$$

刚体上任一点 P 的法向加速度为：

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{1-7}$$

刚体上任意一点的总加速度大小为：

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1-8}$$

（3）刚体定轴转动的运动学规律

刚体转动角速度恒定的转动称为匀速转动，对于匀速转动有：

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{1-9}$$

其中，θ_0 为初始角坐标。

刚体转动的角加速度 β 恒定的转动称为匀变速转动，对匀变速转动有：

$$\omega = \omega_0 + \beta t \tag{1-10}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{1-11}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0) \tag{1-12}$$

其中，ω_0 是初始角速度。

1.2.2　刚体的定轴转动定律

（1）力矩

要改变刚体平动的运动状态，必须给刚体施加一个作用力，要改变刚体转动的运动状

态，必须给刚体施加一个力矩，力矩反映了力的大小、方向和作用点对物体转动的影响。

如图 1-4 所示，设刚体上位于 $\boldsymbol{r}$ 处的 P 点所受到的在转动平面内的合外力为 $\boldsymbol{F}$，则我们定义所产生的**力矩**(moment of force)$\boldsymbol{M}$ 为：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1-13}$$

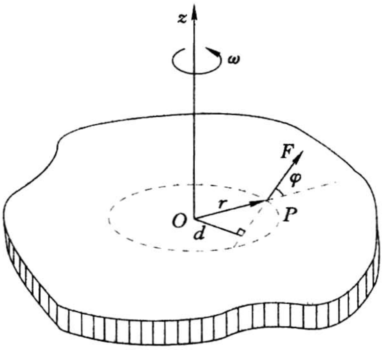


图 1-4 力矩的定义

其大小为：

$$M=Fd=Fr\sin\varphi \tag{1-14}$$

其中，d 为转轴到力的作用线的垂直距离，称为力 $\boldsymbol{F}$ 对该转轴的力臂；φ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 之间的夹角。

力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向服从右手螺旋定则，四指从 $\boldsymbol{r}$ 方向沿小于 π 的角度绕向力 $\boldsymbol{F}$ 的方向，拇指所代表的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向。当 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 垂直时，力矩最大，而 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 平行时，力矩等于零。

当外力 $\boldsymbol{F}$ 不在转动平面内时，把力 $\boldsymbol{F}$ 分解，一个分力平行于转轴，另一个分力在 P 点的转动平面内，力矩定义式中的力 $\boldsymbol{F}$ 应理解为外力在转动平面内的分力。因为只有在转动平面内的分力才对刚体定轴转动的转动状态的改变有作用。

在国际单位制中，力矩的单位是牛·米(N·m)。

(2) 转动惯量

当刚体绕定轴转动时，可以将刚体看成由许多可视为质点的微小体元组成，刚体转动时的动能应为各个质点的动能之和。设各体元的质量分别为 $\Delta m_1,\Delta m_2,\cdots,\Delta m_n$，它们到转轴的距离分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，则整个刚体的转动动能为：

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{1-15}$$

其中，

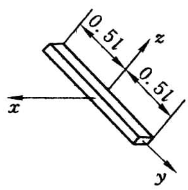
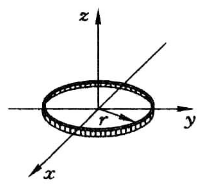
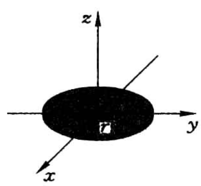
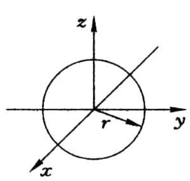
$$J=\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right) \tag{1-16}$$

称为刚体对给定转轴的**转动惯量**(moment of inertia)。若刚体的质量是连续分布的，则转动惯量的表达式应采用积分形式：

$$J=\int r^2\,\mathrm{d}m \tag{1-17}$$

在国际单位制中，转动惯量的单位为千克・米^2（$kg \cdot m^2$）。刚体的转动动能$\frac{1}{2}J\omega^2$ 和质点的平动动能$\frac{1}{2}mv^2$ 相对照，ω 和 v 相对应，转动惯量 J 和质量 m 相对应。质量 m 是反映质点惯性大小的物理量，转动惯量 J 是反映刚体转动惯性大小的物理量。质量 m 是由物体本身性质决定的物理量，而转动惯量既与物体的性质有关，也与刚体本身的几何结构有关，同时还与刚体转动时的转轴位置有关。对于几何形状规则、物质分布均匀且连续的刚体，转动惯量可以通过计算求得；对于几何形状复杂、质量分布不均匀的刚体，转动惯量可以通过实验测定。表 1-1 为几种常见刚体对选定转轴的转动惯量。

表 1-1　几种常见刚体对选定转轴的转动惯量

形　体	转动惯量	
匀质细杆		$J_x=J_z=\frac{1}{12}ml^2$ $J_y=0$
细圆环		$J_x=J_y=\frac{1}{2}mr^2$ $J_z=mr^2$
圆盘		$J_x=J_y=\frac{1}{4}mr^2$ $J_z=\frac{1}{2}mr^2$
球		$J_x=J_y=J_z=\frac{2}{5}mr^2$

【例 1-1】　求质量为 m、长为 l 的均匀细棒，对于通过棒中心且与棒垂直的转轴的转动惯量。

解　如图 1-5 所示，以中心为原点，沿棒向右为 x 轴正方向，在棒上任意 x 处取长度元 dx，则：

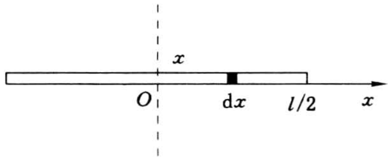


图 1-5　例 1-1 图

该元质量为：
$$dm=\frac{m}{l}dx$$

转动惯量为：
$$J=\int x^2 dm$$

$$J=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\ \frac{m}{l}dx=\frac{m}{3l}x^3\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}ml^2$$

(3) 刚体定轴转动定律

刚体可看作由许多质点所组成，如图 1-6 所示，任一点 P 的切向加速度 $a_\tau=r_i\beta$，P 点所受到的切向力 $F_i=\Delta m_i a_\tau=\Delta m_i r_i\beta$，力 F_i 对转轴的力矩为 $M_i=F_i r_i$，由此可得 $M_i=(\Delta m_i r_i^2)\beta$，整个刚体上的各质点的 β 都相同，对各质点所受力矩求和，则作用在刚体上的合外力矩为：

$$M=\sum M_i=\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\beta=J\beta \tag{1-18}$$

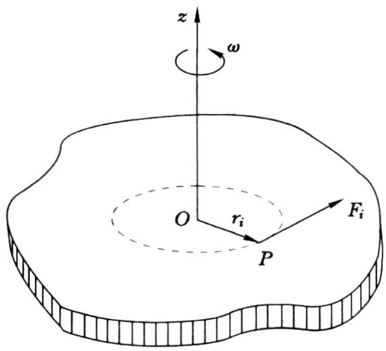


图 1-6　刚体定轴转动定律

刚体在定轴转动时，角加速度的方向与力矩的方向一致，将式(1-18)写成矢量式有：

$$\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta} \tag{1-19}$$

上式表明，刚体的角加速度与作用力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比，角加速度的方向与合外力矩的方向相同，这就是刚体的**定轴转动定律**。

在牛顿定律中，质量 m 是物体平动惯性的量度，决定物体平动状态改变的难易程度。与质点运动的牛顿第二定律相对应，在转动定律中，外力矩一定时，刚体对轴的转动惯量 J 越大，其角加速度 β 越小，越难改变刚体原来的转动状态；反之，刚体对轴的转动惯量 J 越小，其角加速度 β 越大，也就越容易改变刚体原来的转动状态，所以转动惯量是刚体转动惯性大小的量度。

1.3　刚体的角动量定理与角动量守恒定律

1.3.1　刚体的角动量

刚体转动时，其内部任一点都在做圆周运动，设某质点 P 的质量为 m_i，到转轴的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，其线速度为 $\boldsymbol{v}_i$，如图 1-7 所示，定义矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 与其动量 $m_i\boldsymbol{v}_i$ 的叉积为质点对参考点 O 的角动量，即：

$$\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i \tag{1-20}$$

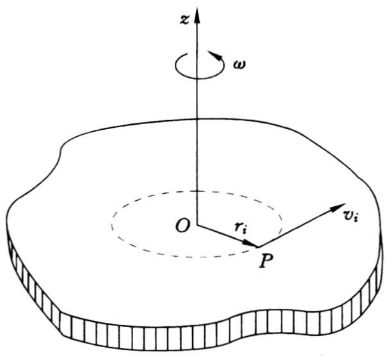


图 1-7　刚体的角动量

角动量为矢量，其大小为：

$$L_i=m_iv_ir_i\sin\theta \tag{1-21}$$

其中，θ 为矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 与线速度 $\boldsymbol{v}_i$ 之间小于 180°的夹角。质点做圆周运动时，θ 等于 90°，$L_i=m_iv_ir_i$，其方向服从右手螺旋定则，与角速度方向一致。在国际单位制中，角动量的单位是千克・米^2・秒$^{-1}$（$\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$）。

刚体的角动量为组成刚体的各个质点的角动量之和，其大小为：

$$L=\sum_{i=1}^{n}L_i=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\omega=\left(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\right)\omega=J\omega \tag{1-22}$$

刚体定轴转动的**角动量**等于其转动惯量与角速度的乘积。方向与角速度的方向一致，写成矢量式为：

$$\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega} \tag{1-23}$$

1.3.2　刚体的角动量定理

如同牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 可以写成动量式：

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1-24}$$

转动定律 $\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta}$ 也可以写成角动量式：

$$\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta}=J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{1-25}$$

这就是**角动量定理的微分形式**；刚体角动量的变化率等于该刚体所受到的合外力矩。

由上式得：

$$\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{1-26}$$

$\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$ 是冲量矩，用来表示力矩的时间累积效应，同冲量 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 表示力的时间累积效应相似。冲量矩也是矢量，其方向与力矩矢量方向一致。冲量矩的单位是牛·米·秒(N·m·s)。

在合外力矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，若在 t_1 到 t_2 的时间间隔内刚体的角动量从 $\boldsymbol{L}_1$ 变化到 $\boldsymbol{L}_2$，相应的角速度从 $\boldsymbol{\omega}_1$ 变化到 $\boldsymbol{\omega}_2$，则有：

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1=J(\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1) \tag{1-27}$$

上式为**角动量定理的积分形式**：即刚体在一定的时间内所受到的合外力的冲量矩等于刚体在此时段内的角动量的增量。

1.3.3 刚体的角动量守恒定律

当刚体所受到的合外力矩为 $\boldsymbol{M}=0$ 时，根据角动量定理，$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$，从而有：

$$\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}=\text{常矢量} \tag{1-28}$$

即物体所受到的合外力矩为零时，物体的角动量保持不变，这就是**角动量守恒定律**。刚体在转动过程中，当角动量守恒时，如果转动惯量 J 不变，则刚体转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不变；如果转动惯量 J 发生变化，则刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 也随之改变，但两者乘积保持恒定。

角动量守恒定律与动量守恒定律一样，是自然界最基本、最普遍的规律之一，既适用于宏观世界，也适用于微观世界。

在日常生活中，利用角动量守恒的例子也很多。例如：舞蹈演员、滑冰运动员在旋转时，往往先将两臂伸开旋转，然后两臂收回靠拢身体，以减小转动惯量，加快旋转速度。跳水运动员在起跳开始旋转后，迅速用两臂抱起双膝，使身体在空中收缩，减小转动惯量，加快旋转翻滚；在入水前又迅速伸直腿臂以增大转动惯量，减慢旋转，以便控制入水角度。

花样滑冰视频

【例 1-2】 一人坐在可以自由旋转的平台中心，两手各持一哑铃，平展两臂于两侧，每个哑铃的质量 $m=4$ kg，两哑铃相距 $l_1=1.5$ m，平台旋转的角速度 $\omega_1=2\pi$ rad·s^{-1}。当此人回收两臂时，两哑铃相距 $l_2=0.8$ m，平台旋转角速度 $\omega_2=3\pi$ rad·s^{-1}，求人和平台的总转动惯量(假设人和平台的总转动惯量不变)。

解 设人和平台的转动惯量之和为 J，此人平展两臂和收回两臂时，人、平台和哑铃的转动惯量之和分别为：

$$J+2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2;\quad J+2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2$$

根据角动量守恒定律可得：

$$\left[J+2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right]\omega_1=\left[J+2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right]\omega_2$$

解得：

$$J=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{1}{2}ml_1^2\omega_1-\frac{1}{2}ml_2^2\omega_2\right)=5.16(\mathrm{kg\cdot m^2})$$

1.4　陀螺旋进

大家都知道陀螺的游戏，当陀螺不转动时，由于受到重力矩的作用，会倾倒下来；而当陀螺快速旋转时，即使对称轴倾斜，不与地面垂直，它也不会在重力矩的作用下倾倒下来，而是在绕自身对称轴旋转的同时，其对称轴绕竖直轴 Oz 缓慢转动，这种运动称为进动或旋进，如图 1-8 所示。

陀螺旋进视频

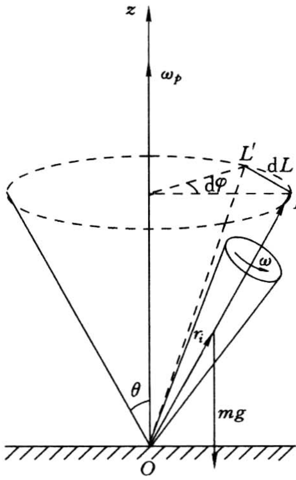


图 1-8　陀螺的旋进

设陀螺以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕自身对称轴旋转，若不考虑摩擦力矩，陀螺只受到重力矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用。重力矩的方向可用右手螺旋定则判断，与旋转角动量 $\boldsymbol{L}$ 和 Oz 轴所确定的平面垂直。根据角动量定理，在 dt 时间内，角动量产生一个增量 $d\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}dt$。角动量增量 $d\boldsymbol{L}$ 的方向和重力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向相同。而重力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向垂直，所以角动量增量 $d\boldsymbol{L}$ 的方向与角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向垂直。因此重力矩不改变陀螺角动量的大小，只改变角动量的方向。由于重力矩始终存在，即陀螺的对称轴与竖直轴 Oz 保持固定的夹角 θ 并绕 Oz 轴以一定的角速度 $\boldsymbol{\omega}_p$ 旋转，这就是陀螺的进动。

陀螺的旋进是陀螺的自旋和重力矩共同作用的结果，由图 1-8 可知，旋进的角速度为：

$$\omega_p=\frac{d\varphi}{dt} \tag{1-29}$$

角动量的增量：

$$dL=L\sin\theta d\varphi \tag{1-30}$$

由角动量定理：

$$Mdt=dL \tag{1-31}$$

联立上面两式得：

$$Mdt=L\sin\theta d\varphi \tag{1-32}$$