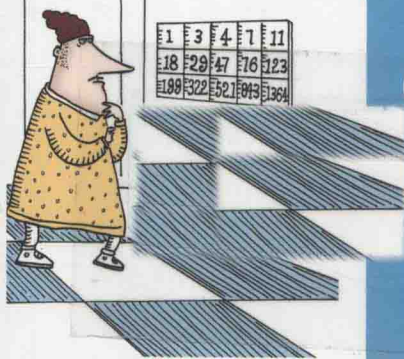




加德纳趣味数学

经典汇编



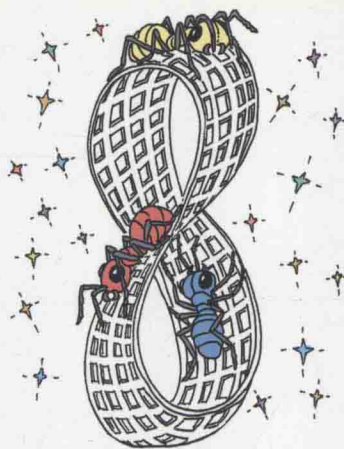
怪棋、多米诺骨牌及太阳系趣闻

马丁·加德纳

著

陆继宗

译



上海科技教育出版社



加德纳趣味数学

经典汇编

怪棋、多米诺骨牌及太阳系趣闻

马丁·加德纳 著 陆继宗 译



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

怪棋、多米诺骨牌及太阳系趣闻/(美)马丁·加德纳
(Martin Gardner)著;陆继宗译. —上海:上海科技教育
出版社,2017.6

(加德纳趣味数学经典汇编)

ISBN 978-7-5428-5911-2

I. ①怪... II. ①马... ②陆... III. ①数学—普及
读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第061785号

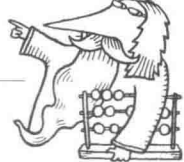
序

女士们、先生们：

欢迎观赏这世上最伟大的数学马戏团表演！来看看由人类凭借其超凡智慧所创造的迄今最魅惑人心最难以想象的智力趣题吧！为在数的世界中，在词的海洋中，在几何学中以及在自然界中展现出来的那些神秘的、迷人的模式而惊奇吧！为那些奇异的、刺激的悖论，为那些令人难以置信的脑力体操绝技而颤抖吧！请看看第5、7章中的那些“三环大马戏”^①吧！就在这里——所有最有趣娱乐的真实来源，如今，在一个新的版本中，以空前的博大恢弘展现在你们面前。

马丁·加德纳再次成为一场快节奏马戏综艺表演的技艺精湛的演出指挥。这里为每个人都准备了一些好东西；确切地说，这里为每个人准备了几十件好东西。本书将各种激动人心的思想美妙地协调平衡在其10章中。这些思想，或发端于近在眼前的物件，如火柴棒，如纸币，或起始于远在天边的对象，如行星，如无穷的随机行走。我们将得知古代做算术的器具和现代对人工智能的解释。这里既能让你的双眼秀色饱餐，让你的双手过足玩瘾，又能让你的大脑酣

① 原文为 three rings，双关。显义即本书第5、7章中那些三个圆相切或相交的插图。但其隐义似有二：一是英国作家托尔金(John Ronald Reuel Tolkien, 1892—1973)的奇幻小说里的“精灵三戒”，是一种虚构的魔法人工制品；另一是 three-ring circus，一种在相邻的三个圆形场子上同时演出三套不同节目的大型马戏表演。不管怎么说，此词无非隐喻本书内容或像魔戒那样法力无边、变幻无穷，或像马戏表演那样五花八门、精彩纷呈。——译者注



畅淋漓地运转一番。

马丁·加德纳撰写的关于数学娱乐的300篇专栏文章，就如同海顿^①的交响乐或博斯^②的画作那样，是这世上的瑰宝。许多年来，我一直把它们作为信息和灵感的源泉，放在我工作的书房里伸手可取的地方。起先，我保存原初的页面，这是从我自己的各期《科学美国人》上撕下来的，这些资料最早发表在那上面。后来，当这些专栏文章以书的形式结集出版时，我又急不可待地去把每一本都弄到手，赏读其中增添的趣闻轶事和事实背景。我希望有一天，当技术发展能让书籍以数字形式记录在盒式磁带上发行时，这些珍宝将属于第一批被制成可在网上获得的文字作品。

是什么使得这些小文章如此让人另眼相看？原因很多，可能比我想到的要多。但我认为主要的原因是，马丁本人的热情在他那温文尔雅的文笔中熠熠生辉。他有一种特别的本领，即能用最少的行内话来描述数学的各种构思，使得数学概念的美，可被各种年龄、各种背景的人所欣赏。他的作品我的父母能看，我的孩子也能看。然而他所描述的数学内容，具有足够密集的信息，以至像我本人这样的专业人员，仍能从中获得不少知识。

巴纳姆^③说得对，人喜欢偶尔被骗一次，而魔术师马丁诡计多端，奇招满身，哄骗有方，搞笑怡人。但重要的是，他一丝不苟，秉直公正。他煞费苦心地核查了他依据的所有事实，提供了完美的历史背景。这些文章既是学术性的宏

① 海顿(Joseph Haydn, 1732—1809)，奥地利作曲家。古典主义音乐的杰出代表，被誉为交响乐之父和弦乐四重奏之父。——译者注

② 博斯(Hieronymous Bosch, 1450—1516)，荷兰画家。早期尼德兰画派最著名的代表之一，被尊为对人性具有深刻洞察力的天才画家和第一个在作品中表现抽象概念的画家。其作品主要是复杂而独具风格的圣像画。——译者注

③ 巴纳姆(Phineas Taylor Barnum, 1810—1891)，美国马戏团经纪人兼演出者。以骗局起家，又以展出侏儒等畸形人而大发横财。后转为文艺演出的经纪人，创建了著名的大型巡回马戏团——巴纳姆和贝利马戏团，首先推出了前文提到的“三环大马戏”。——译者注

论,又是普及性的诠释;它们是完全可靠的,是经过仔细推敲的。有好几次,我对于某个论题做了一次我认为是全面综合的研究,而同时马丁也在独立地准备一篇关于同一论题的专栏文章。结果无一例外地,我会发现所有据我所知最值得选取的珍品他都选取了,而且我所遗漏的少量瑰宝也被他发掘了。

好了,快、快、快——马上进大帐篷去,一场令人惊叹的表演就要开始了!拿上一大袋花生,坐到你的座位上去。乐队要开始奏序曲了。演出开始了!

高德纳^①

1992年修订

^① 高德纳(Donald Ervin Knuth, 1938—), 美国计算机科学家。因在算法分析及编程语言设计方面的贡献获 1974 年图灵奖。他的《计算机程序设计艺术》(*The Art of Computer Programming*)一书最为世人称道。——译者注



引言

有时这些想法仍会惊愕着
纷扰的子夜和午间的静澈。

——T·S·艾略特^①

本书各章原本是每月一篇出现在《科学美国人》杂志上的专栏文章,这个专栏的标题是 Mathematical Game(数学游戏)。经常有数学家问我,我采用这个词组做标题是什么意思。这可不容易回答。game 这个词曾被维特根斯坦^②用作例子来说明他所谓的“家庭词”(family word),即一种无法给予单一定义的词。一个家庭词有着多个词义,这些词义有点像一个人类家庭中的成员那样联系在一起,而这种联系是在语言的演化过程中建立起来的。你可以这样定义 mathematical game 或 recreational mathematics(趣味数学),即说它是任何含有一种很强的 play(玩耍)因素的数学,但这几乎什么也没说,因为 play、recreation(消遣)和 game 大致上是同义词。到头来,你不得不借助于这样的油嘴滑舌:把诗定义为诗人所写的东西,把爵士乐定义为爵士乐手们所演奏的东西。趣味数学是趣味数学家觉得很有趣的那种数学。

虽然我不能把数学游戏定义得比我对诗的定义更像样一些,但是我坚持

① T·S·艾略特(Thomas Stearns Eliot, 1888—1965),出生于美国的英国诗人、剧作家、文学评论家,1948年获诺贝尔文学奖。——译者注

② 维特根斯坦(Ludwig Wittgenstein, 1889—1951),出生于奥地利的英国哲学家、逻辑学家,语言哲学的奠基人。——译者注

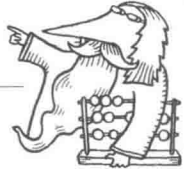
认为,不管数学游戏是什么,它是初等数学教学中攫住年轻人兴趣的最佳方法。一道巧妙的数学趣题、一个诡异的数学悖论、一手精彩的数学戏法,能迅速激发一个孩子的想象力,比一个实际应用(特别是当这个应用与这个孩子的生活经验相距甚远时)要迅速得多。而且,如果这个“游戏”挑选得当,那么它可以几乎不费吹灰之力地引导孩子们走向一些重要的数学概念。

不光孩子,就是大人,也会迷上一道根本预见不到什么实际应用的趣题,而且数学史上也充满了专业数学家以及业余爱好者对这种趣题进行研究而导致意外结果的例子。贝尔^①在他的《数学:科学的皇后和仆人》(*Mathematics: Queen and Servant of Science*)一书中谈到了关于纽结分类和枚举的早期工作,说这种曾经看来只不过是玩玩智力游戏的事,后来却发展成了拓扑学的一个繁荣兴旺的分支:

因此,纽结问题不仅仅是智力趣题。类似的情况在数学中屡屡出现,部分原因在于数学家有时候颇为执拗地把严肃的问题改述为似乎不起眼的智力趣题,而这些趣题与那些他们希望解决但未能解决的难题从抽象的角度看完全是一回事。这个低劣的鬼花招诱骗了一些胆小的门外汉,他们本来可能会被这些趣题的真实面貌吓跑的,而不少被骗进的业余爱好者为数学作出了重要的贡献,却对他们所做事情的价值毫无察觉。一个例子就是常在数学娱乐书籍中提到的柯克曼十五女生问题^②。

① 贝尔(Eric Temple Bell, 1883—1960),出生于苏格兰的美国数学家、科学普及作家、小说家。——译者注

② 柯克曼(Thomas Penyngton Kirkman, 1806—1895),英国数学家。柯克曼十五女生问题是他于1850年提出的一个趣味数学问题:15名女生,3人一组,出去散步,连续7天,那么是不是有一种分组方案(每天一种分法),使得在这7天中,任意两名女生都能同组一次且仅一次?找出这样一个方案并不难,难的是这个问题所引出的许多问题,它们成了当今组合数学中区组设计领域的主流问题。——译者注



有些数学趣题确实平淡无奇,也没有什么发展空间。然而上述两种类型的趣题有其共同的东西,对于这一点,没有谁能比著名数学家乌拉姆^①在他的自传《一位数学家的经历》(*Adventures of a Mathematician*)中表达得更好了:

尽管数学有其壮观的远景,有其审美,有其对新生事物的洞察力,但数学也有一种容易使人上瘾的特性。这个特性不太明显,或者不太有益于健康。或许这类似于某些化学药物的作用。最小的趣题,一看就知道平庸肤浅或老一套的,也能起到这种使人上瘾的作用。你只要着手去解这种趣题,你可能就被套住了。我想起当初《数学月刊》(*Mathematical Monthly*)^②偶然发表了由一位法国几何学家投寄的一些题目,它们是关于圆、直线、三角形在平面上的平凡分布的^③。“Belanglos^④”,正像德国人常说的那样。但是,一旦你开始考虑怎样去解决它们,这些图形就会把你套住,即使你始终明白,无论怎样的一个解答,都几乎不可能导致更为刺激或更为广泛的论题。这与我所说的关于费马定理^⑤的历史

① 乌拉姆(*Stanislaw Marcin Ulam*, 1909—1984),出生于奥匈帝国伦贝格(后称利沃夫,曾属波兰,现属乌克兰)的美国数学家。曾参加美国试制原子弹的曼哈顿计划,主要以设计了一类以概率统计理论为指导的数值计算方法——蒙特卡罗法而闻名。——译者注

② 当指《美国数学月刊》(*American Mathematical Monthly*)。——译者注

③ 几何对象在平面上呈平凡分布(或称简单分布、一般分布),是指这些几何对象间的相对位置不符合一些常见的特殊要求。如任何三点不共线,任何四点不共圆;任何两条直线不平行,任何三条直线不共点。对于在平面上呈平凡分布的几何对象,会有一些有趣的结论。如:设平面上有呈平凡分布的点 $2n+3$ 个,则其中必有3个点,使得过这3点的圆把其余 $2n$ 个点的一半包围在圆内,另一半排斥在圆外。——译者注

④ 德语,没有重要性的或无关紧要的。——译者注

⑤ 指费马大定理,由法国数学家费马(*Pierre de Fermat*, 1601—1665)于1637年提出。它说:当 n 为大于2的正整数时,关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解。由于费马声称他已证明了这个结论,故称之“定理”;加个“大”字,以区别于另一个“费马小定理”。但是费马的证明一直没人见到,而后人也长期未能另外予以证明。直到1994年,英国数学家怀尔斯(*Andrew Wiles*, 1953—)运用现代数学多个领域的成果,给出了费马大定理的一个证明。现在人们一般认为,费马当初的证明很可能是搞错了。——译者注

截然相反。费马定理导致了大量代数学新概念的产生。区别或许在于,小题目通过适度的努力就可以解决,而费马定理仍然悬而未决,它是一个持久不息的挑战。不过,数学的这两类宝贝玩意儿,对于那些想要成为数学家的人——他们存在于数学的各个层次,从数学的细枝末节到比较令人振奋的层面——都有一种强烈的成瘾性。

马丁·加德纳

1979年3月

目 录

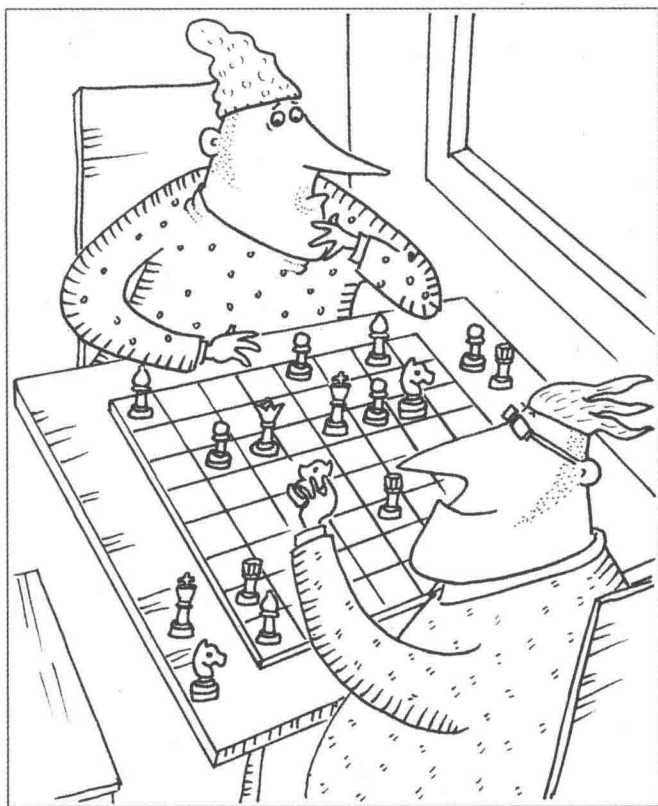
序

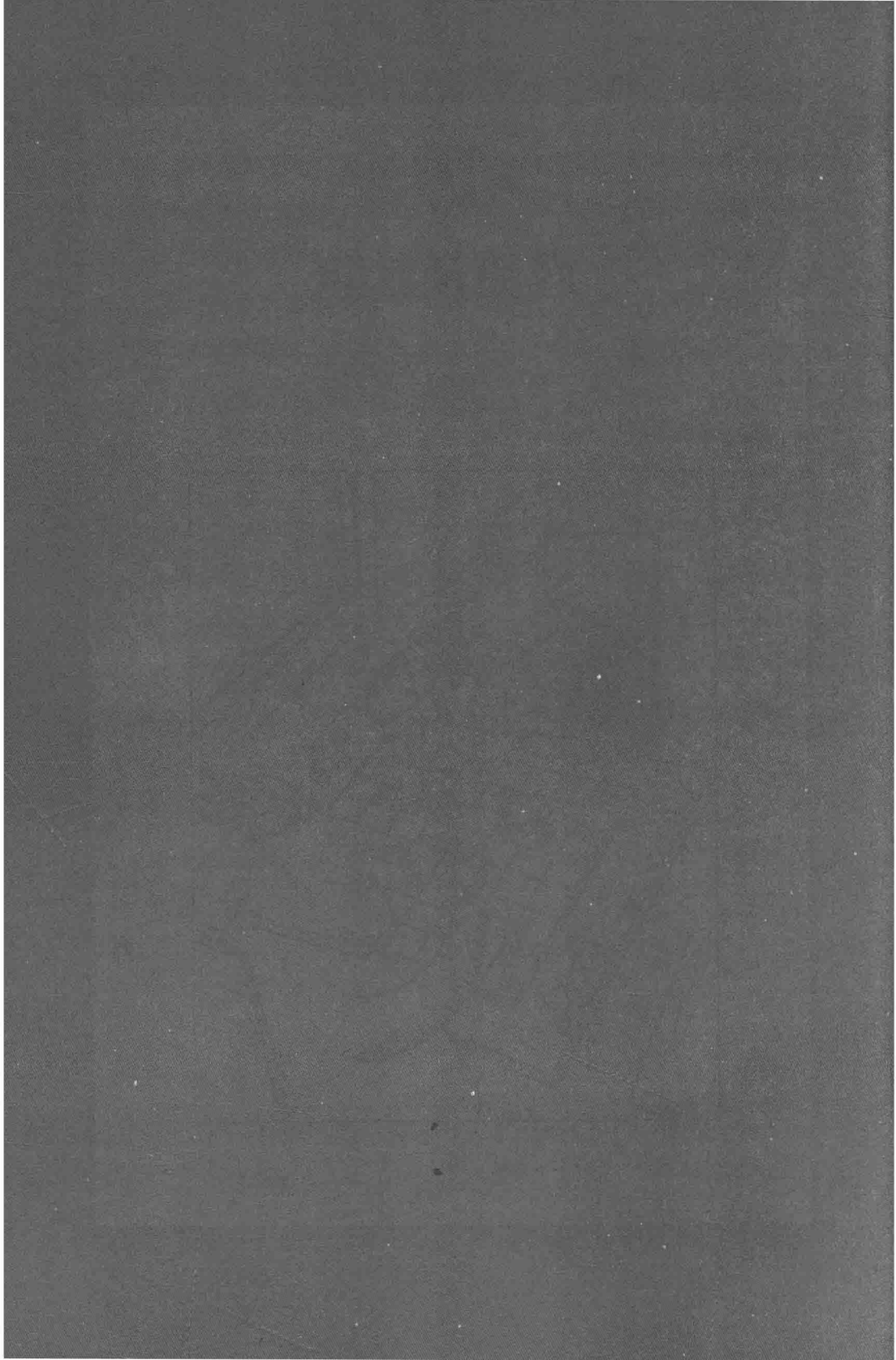
引言

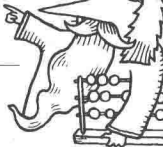
- | | | |
|-----|------|------------|
| 1 | 第1章 | 怪棋及其他 |
| 17 | 第2章 | 多米诺骨牌 |
| 31 | 第3章 | 斐波那契数和卢卡斯数 |
| 49 | 第4章 | 简单性 |
| 63 | 第5章 | 旋转的圆桌及其他问题 |
| 85 | 第6章 | 太阳系趣闻 |
| 101 | 第7章 | 马斯凯罗尼作图法 |
| 117 | 第8章 | 算盘 |
| 129 | 第9章 | 文字回文和数字回文 |
| 145 | 第10章 | 一美元钞票 |
| 157 | 附记 | |

第 1 章

怪棋及其他







1. 怪 棋

最近一次访问假想棋俱乐部,我看到了布莱克先生和怀特先生^①正在对弈的一局棋,他们是俱乐部里的两位最古怪的棋手。这局使我吃惊的棋如图 1.1 所示。我最初认为两位棋手下的是开始时就缺一只马的缺子棋,黑方已经走了一步棋,不料布莱克先生告诉我他刚走完了一局标准棋的第四步,已经走过的棋如下:

白	黑
N-KB3	P-Q4
N-K5	N-KB3
N-QB6	K-NQ2
N 取 N	N 取 N

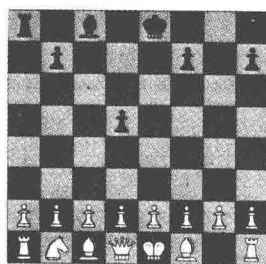


图 1.1 黑方第四步棋后的棋盘

一小时后,在我输给了另一棋手一局棋后,我回来看到布莱克和怀特两位先生的棋结束了。他们第二局的棋盘情况看起来与前面的一局完全相同,只是现在四只马都没有了!走黑棋的布莱克先生看了一下说:“我刚走了我的第五步棋。”

^① 布莱克(Black)、怀特(White)就是英文中的黑、白。——译者注

a. 读者是否能合理地构造出一局会出现此种开局情况的棋来？

“顺便提一下，”怀特先生说，“我想出了一个或许会让你的读者开心的问题。假设，我们把一副国际象棋棋子——所有 16 只黑棋和 16 只白棋——倒入一顶帽子里并摇动帽子，然后随机地取出一对。如果两只都是黑的，我们就把它们放在桌上，构成一堆黑棋子。如果碰巧两只都是白的，我们就把它们放在桌上，构成一堆白棋子。如果两只棋子的颜色不同，我们就把它们扔回到各自的棋盒中去。当所有 32 只棋子都从帽子里取出后，在黑堆里的棋子数与白堆里棋子数精确相等的概率是多少？”

“嗯，”我说，“我随便猜猜，这个概率应该是相当低的。”布莱克和怀特轻声地笑着，继续下棋。

b. 两堆黑白棋中棋子数相等的正确概率是多少？

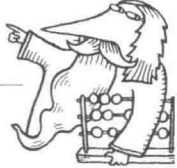
2. 唠叨的夏娃

隐算术(或叫字母算术,有些编谜人更喜欢这样说)^①是一种古老的、不知起源的游戏,当然是最佳的游戏之一,而且,我想,大多数读者并不熟悉它:

$$\frac{EVE}{DID} = .TALKTALKTALK\dots$$

其中相同的字母代表相同的数字,包括 0。 $\frac{EVE}{DID}$ 已被简化为最简分数。它的小数部分有个 4 位数的循环节。解是唯一的。为了求解它,回忆一下得到与不可约分数等价的有 n 个重复数字的小数的标准方法,将此循环节放置在 n 个 9 的上面,然后将它简化为最简分数。

^① 隐算术是用英文字母(亦可以是其他符号)代替 0 至 9 的数字,要求玩家找出那些字母代表的数字的一种游戏。



3. 三个正方形

只用初等几何学(甚至不需用到三角学),就可以证明图 1.2 中的 $\angle C$ 等于 $\angle A$ 和 $\angle B$ 之和。

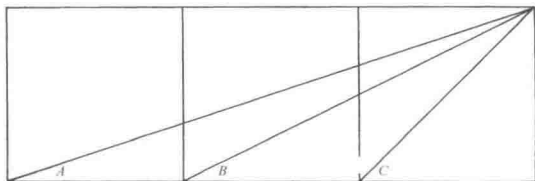


图 1.2 证明角 A 加角 B 等于角 C

对于这个迷人的简单问题,我要感谢卡茨(Lyber Katz)。儿童时期的他在莫斯科上学,他的四年级几何课老师给出了这道题,能够解出这道题的人可以获得额外的学分。他补充说:“这道题导致的死胡同数目是非比寻常的。”

4. 波尔的诀窍

一位顶级的科幻小说作家波尔^①想出了一个花招,这个花招出现在一本叫做《后记》(Epilogue)的魔术杂志最近一期上。计算机编程人员可能会比其他人更快地解决这个问题。

请一个人在一张纸上画一排水平的小圆圈,代表一排硬币。当他这样做时,你转过身去。然后,他把右手大拇指的指尖放在第一个圆圈上,使得他的拇指和手掌完全遮盖了这一排圆圈。你转过身来打赌说,你可以立即在这张纸上写下一个数字,这个数字将预言每一枚硬币投掷时可能出现的正面和背面组合的总数。例如,两枚硬币能有四种组合,三枚硬币有八种等。

① 波尔(Frederik Pohl, 1919—2013),美国著名科幻小说作家和编辑,也是一个超级科幻小说迷。——译者注

你不知道他画了多少个硬币,却能够轻易地赢此打赌。这是如何做到的?

5. 埃斯科特滑块

如图 1.3 所示,这个著名的滑块游戏是由 1946 年去世的美国数学家埃斯科特(Edward Brind Escott)发明的,发表在一本短命的、名为《游戏文摘》(*Games Digest*)的杂志 1938 年 8 月号上,没有公布解答。埃斯科特提出的问题是把块 1 和块 2 与块 7 和块 10 交换位置,移到图右所示的位置上,其他滑块的位置不论。要求是要在平面上、直角边界内移动,一次只能移动一块;即使有地方可以转动,也不可转动滑块;在移上、移下、移左或移右时,必须保持每一块滑块的方向不变。

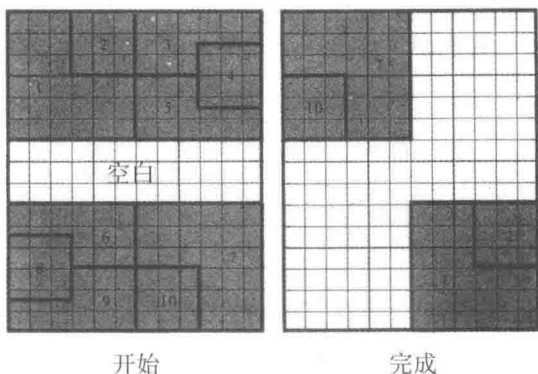


图 1.3 埃斯科特滑块游戏

这是我在出版物中看到的、最为困难的滑块游戏。解决方法是移动 48 次,一块滑块每移动一次,就计数 1 次,即使是转弯移动过去的。

埃斯科特是一位经常给数学杂志投稿的数论专家,他曾在美国中西部的几所学校和学院任教,晚年在伊利诺伊州奥克帕克市的一家保险公司任保险精算师。