高等院校公共课教材

高等数学

同步辅导（下册）

马　燕　主编
任秋艳　蒙　頔　姚小娟　李建生　郭中凯　副主编

清华大学出版社

高等数学同步辅导(下册)

马　燕　主　编

任秋艳　蒙　頔　姚小娟　副主编

李建生　郭中凯

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

针对高等数学这门课程中涉及的概念、公式、定理抽象难懂，解题方法多样，学习难度系数大的现状，我们编写了这本与高等数学课程配套的同步辅导书.

本书分为上、下两册，共 12 章，以小节为单位编写. 每章以“本章知识导航”开篇，简明扼要地总结了每章的主要学习内容，然后按节展开，每节中包括重要知识点，典型例题解析和课后练习题. 其中“重要知识点”部分归纳总结了每小节的主要内容，包括基本概念、性质、定理、公式、基本解体方法等；“典型例题解析”部分精选具有代表性的例题进行分析讲解，示范做题方法和技巧；“课后练习题”部分按难易程度分为基础训练和能力提升两级，其中基础训练题主要用于学生课后夯实基础，提升能力题主要用于加强学生对知识点的应用.

本书可作为理工科院校高等数学课程的教学参考书和学习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导(下册)/马燕主编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48461-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①马…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 225957 号

责任编辑：陈立静
封面设计：李　坤
责任校对：吴春华
责任印制：刘海龙
出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：10.25　　**字　数**：240 千字
版　　次：2017 年 9 月第 1 版　　**印　次**：2017 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：26.00 元

产品编号：076945-01

前　　言

本书是在顺应教学改革发展的需求下，为与高等院校“高等数学”课程配合而编写的教学参考书和学习指导书，对于优化学生的知识结构、培养学生的逻辑思维能力、提高学生的数学素质起着重要的作用，同时也为后续课程的学习打下坚实的数学基础.

本书除具有基本知识点全面、阐述解释清楚易懂等特点外，还具有以下特色.

(1) 内容按章节展开，理论知识体系完整，按板块构建框架，条理清楚，层次分明，突出了辅导书的实用性功能；

(2) 知识点总结紧扣大纲，力求概念阐述准确，符号使用规范，公式书写简明；

(3) 例题的选编具有针对性，分析解答全面准确，对解题方法起到很好的示范作用；

(4) 课后习题分级选编，兼顾不同水平的读者需求.

本书由马燕任主编，章节具体编写分工是：马燕编写第 1、4、5、6、9 章；姚小娟编写第 2、3 章；任秋艳编写第 7 章；李建生编写第 8 章；蒙頔编写第 10、11 章；郭中凯编写第 12 章.

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间比较仓促，书中难免有疏漏及错误之处，敬请读者及同行批评指正.

编　者

目　　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章知识导航：

向量代数
- 向量的概念(定义、模、方向角、方向余弦、单位向量)
- 向量的运算(向量的坐标表示式、线性运算、数量积、向量积、混合积)
- 两向量的夹角及垂直、平行的条件

空间平面与直线
- 空间平面方程(点法式、一般式、三点式、截距式)
- 空间直线方程(标准式、一般式、参数式、两点式)
- 直线与平面的相互位置(二直线、二平面、线面角及平行、垂直)
- 距离公式(点到直线、点到平面、二直线之间的距离)

空间曲面与曲线
- 曲面方程(旋转曲面、柱面)
- 曲线方程(一般式、参数式；空间曲线在坐标面上的投影)
- 二次曲面(球面、椭球面、抛物面、双曲面)

8.1　向量及运算

8.1.1　重要知识点

1．空间直角坐标系

(1) 坐标轴：三条过空间一定点 O，且两两垂直的具有相同的长度单位的数轴，分别记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴.

(2) 空间直角坐标系：由 x 轴、y 轴、z 轴构成的 $Oxyz$ 坐标系. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线，数轴的正方向通常符合右手法则.

(3) 坐标面：在空间直角坐标系中，由任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标面，分别为 xOy 面、xOz 面、yOz 面.

(4) 卦限：三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为卦限. 共八个卦限，依次记为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.

2．向量的概念

(1) 向量：既有大小、又有方向的量称为向量. 起点为 A 点、终点为 B 点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$.

(2) 向径：以坐标原点为始点的向量.

(3) 自由向量：与起点无关的向量，简称向量.

(4) 向量的模：向量的大小. 向量$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$.

(5) 单位向量：模等于1的向量.

(6) 零向量：模等于0的向量，记作$\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

(7) 向量相等：如果向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的大小相等，且方向相同，则说向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是相等的，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

(8) 向量的平行：两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 记作$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

3. 向量的坐标

(1) 空间点M的坐标：过空间的一点M分别作垂直于x轴、y轴、z轴的三个平面，它们与x轴、y轴、z轴的交点在x轴、y轴、z轴的坐标依次为x、y、z，则M点在此空间直角坐标系中的坐标为x(横坐标)、y(纵坐标)、z(竖坐标)，记作$M(x,y,z)$. 空间点M与有序数组x，y，z之间是一一对应的关系，所以，空间点M的坐标在同一坐标系中也是唯一的.

(2) 空间两点间的距离公式：设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则两点距离为$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(3) 基本单位向量：在空间直角坐标系中，记$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$分别为沿x，y，z轴方向的单位向量，称为这一坐标系的基本单位向量.

(4) 向量的坐标：设空间向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

4. 向量的模、方向角、投影

(1) 向量的模：$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(2) 向量的方向角：如果非零向量$\boldsymbol{a}$与三条坐标轴的正向的夹角分别为α，β，γ，且$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，则称$\alpha$，$\beta$，$\gamma$为向量$\boldsymbol{a}$的方向角.

(3) 投影：向量$\boldsymbol{a}$在坐标轴上的投影为

$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$,记作 $\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_x$

$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta$,记作 $\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_y$

$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$,记作 $\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_z$

即为$\boldsymbol{a}$的坐标.

(4) 方向余弦：称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，即为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

5. 向量的线性运算

(1) 向量的加法：设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，向量的加法满足三角形法则和平行四边形法则.

(2) 坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$

(3) 向量与数的乘法：向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反，当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向可以是任意的. 坐标表达式为 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$.

(4) 线性运算的性质：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (加法交换律)；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (加法结合律)；

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (数乘结合律)；

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (分配律)；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (分配律).

6. 利用坐标判断两向量相等、平行

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z$；

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行：$\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}\ \ (\boldsymbol{a}\neq 0)\Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

即 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\neq 0)\Leftrightarrow(b_x, b_y, b_z)=\lambda(a_x, a_y, a_z)$，或 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}=\lambda$.

8.1.2　典型例题解析

1. 向量的线性运算

(1) $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反；

(2) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于将 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点接 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点，$\boldsymbol{a}_1$ 的起点接 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点等，依次相接后，连接 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所得到的向量；

(3) $\lambda\boldsymbol{a}$ 是数乘向量，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_1$ 同方向的单位向量；

(4) $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合，向量的分解就是将一个向量表示成另外若干个向量的线性组合.

2. 求向量的坐标

一般常用的方法有：

(1) 如果已知 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标 $A(x_1,y_1,z_1)$ 及终点坐标 $B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}=\left\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right\}$；

(2) 如果已知 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量分解式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}=\left\{x,y,z\right\}$；

(3) 当向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 及方向角 α，β，γ 已知时，$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\beta,|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}$；

(4) 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=\left\{x,y,z\right\}$ 平行时，$\boldsymbol{a}=\left\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\right\}$ (λ 为实数)，其中，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\lambda>0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\lambda<0$；

(5) 根据向量的运算性质确定.

例 8.1.1 把△ABC 底边 BC 三等分，D、E 分别为三等分点，若 $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$.

分析 试画图分析，利用向量的加法和数乘运算将 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 用 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{DE}$ 来表示.

解： $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

例 8.1.2 写出 $P(1,-2,-1)$ 的下列对称点的坐标：

(1) 关于三个坐标平面分别对称；

(2) 关于三个坐标轴分别对称；

(3) 关于原点对称.

分析 (1) 一点关于某一坐标面对称的点的坐标，只需保留对应于该坐标平面的两个坐标不变，改变另一个坐标的符号即得；

(2) 一点关于某一坐标轴对称的点的坐标，只需保留对应于该坐标轴的坐标不变，改变另外两个坐标的符号即得；

(3) 一点关于原点对称的点的坐标只需同时改变该点三个坐标的符号即得.

解： (1) P 点关于 xOy,yOz,zOx 对称点的坐标分别为 $(1,-2,1),(-1,-2,-1),(1,2,-1)$；

(2) P 点关于 x 轴，y 轴，z 轴对称的点的坐标分别为 $(1,2,1),(-1,-2,1),(-1,2,-1)$；

(3) P 点关于原点对称的点的坐标为 $(-1,2,1)$.

例 8.1.3 已知有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度为 6，方向余弦为 $-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$，$P_1$ 点的坐标为 $(-3,2,5)$，求 P_2 点的坐标.

分析　参照向量坐标求法(1)和(3).

解： 设 P_2 点的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{x+3,y-2,z-5\}$，

由已知得
$$\overrightarrow{P_1P_2}=\left\{6\times\left(-\frac{2}{3}\right),6\times\frac{1}{3},6\times\frac{2}{3}\right\}$$

故有
$$x+3=6\times\left(-\frac{2}{3}\right),y-2=6\times\frac{1}{3},z-5=6\times\frac{2}{3}$$

解得
$$x=-7,y=4,z=9，$$

即 P_2 点的坐标为 $(-7,4,9)$.

例 8.1.4　向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 以及 $\boldsymbol{c}$ 在 x 轴方向上的投影、投影向量.

分析　用向量的分量或坐标表达式进行计算，明确向量在坐标轴上的投影即为该向量的坐标的概念.

解： $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-2(2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k})=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}=(-3,1,-9)$，故 $\boldsymbol{c}$ 在 x 轴方向上的投影为 -3，$\boldsymbol{c}$ 在 x 轴方向上的投影向量为 $-3\boldsymbol{i}$.

8.1.3　课后练习题

习题(基础训练)

1．设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$.

2．求点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面的对称点与点 $(2,1,2)$ 之间的距离.

3．$\boldsymbol{m}=\{3,2,1\},\boldsymbol{n}=\{4,-1,3\},\boldsymbol{p}=\{1,2,3\}$，求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

4. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$ 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,1,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,0,-2\}$，向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，并且点 A 的坐标是 $\{3,1,-3\}$，试求点 B 的坐标.

习题(能力提升)

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,2,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{8,-4,1\}$，则与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 ___，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 _________，$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$ 上的投影为 ________.

2. 设 $ABCD$ 是平行四边形，E 是 AB 的中点，AC 与 DE 交于 O 点，证明 O 点分别是 ED 与 AC 的三等分的分点.

3. 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

4. 一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，它在 X 轴，Y 轴和 Z 轴上的投影依次为 4，−4 和 7，求此向量和起点 A 的坐标.

5. 已知 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

6. 设 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{3}\{2,2,1\},\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{3}\{-2,1,2\},\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{3}\{1,-2,2\}$，试将向量 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ 表示成 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合.

8.2　向量的乘积运算

8.2.1　重要知识点

1. 两向量的数量积

(1) 定义：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两向量，且它们之间的夹角为 θ，称数量 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，亦称内积，并记作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$；

物理背景：设一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\boldsymbol{S}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角.

(2) 数量积的性质：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，零向量和任何向量都垂直；

③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交换律);

④ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ (分配律);

⑤ $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (λ 为数)(结合律).

(3) 数量积的坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

两向量夹角余弦的坐标表示式：设 $\theta=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，则当 $\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|a||b|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$；

(4) 数量积与投影：由 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|b|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，$|b|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. 同理，当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

2. 两向量的向量积

(1) 定义：设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方程式给出

① $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

② $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定，那么，向量 $\boldsymbol{c}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积或叉积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

物理背景：设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ，力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，它的模 $|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$，而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的，根据向量积的定义，力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

(2) 向量积的性质：

① $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；

② $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

③ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ (分配率);

④ $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为数)(结合律).

(3) 向量积的坐标表示式：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

8.2.2 典型题型解析

1. 数量积与向量积是本节的重点，在向量的各种关系中，主要是依赖它们的性质与

运算求解各类问题的.

2. 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|a|\cdot|b|\cos\theta$ 的主要用法：

(1) 计算两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(如例 8.2.2)；

(2) 判别两个向量是否垂直(如例 8.2.5)；

(3) 模的计算：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

3. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$都垂直，并使$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成右手系，所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积(如例 8.2.4 和例 8.2.5).

4. 求满足一定条件的向量的坐标的常用方法：

(1) 当所求向量平行于向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$（或与之共线）时，可设所求向量为 $\boldsymbol{P}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$，然后利用其他条件求得 λ；

(2) 当所求向量垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 时，可设所求向量 $\boldsymbol{P}=(x,y,z)$，由此得一方程 $a_xx+a_yy+a_zz=0$，再与其他条件所建立的方程联系，求得 x,y,z (如例 8.2.5)；

(3) 当所求向量同时垂直于两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$和$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 时，即说明所求向量平行于向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，故可设所求向量为 $\boldsymbol{P}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，然后利用其他条件求得 λ.

5. 面积和体积问题：

(1) 面积问题.

① 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{matrix}\right\|$$

② 以平面三点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，$M_3(x_3,y_3)$ 为顶点的三角形的面积

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{matrix}\right\|$$

(2) 体积问题，共面问题.

① 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱边的平行六面体的体积

$$V=\pm[\boldsymbol{abc}]=\pm\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix};$$

② 三向量共面的充要条件是：$[\boldsymbol{abc}]=0$；

③ 四点共面的充要条件是：$\left[\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}\,\overrightarrow{M_1M_4}\right]=0$.

例 8.2.1　设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\},\boldsymbol{b}=\{1,3,-4\}$. 求 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

分析　利用向量数量积的坐标表示式.