大 学 数 学 系 列 教 材

Mathematics

第二版

线性代数与概率统计

马丽杰 明杰秀 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

大学数学系列教材

Mathematics

第二版

线性代数与概率统计

马丽杰 明杰秀 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计/马丽杰,明杰秀编著．—2 版．—武汉：武汉大学出版社,2017.11(2018.3 重印)
大学数学系列教材
ISBN 978-7-307-17082-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.①马…　②明…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材　②概率论—高等学校—教材　③数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.①O151.2　②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 067197 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:李孟潇　　版式设计:韩闻锦

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北民政印刷厂
开本:720×1000　1/16　印张:20.25　字数:384 千字　插页:1
版次:2011 年 2 月第 1 版　2017 年 11 月第 2 版
2018 年 3 月第 2 版第 2 次印刷
ISBN 978-7-307-17082-7　定价:38.00 元

前言

近年来，独立学院大量涌现并快速发展，已成为高等教育的一个重要组成部分. 面对迅猛发展的独立学院教育教学，无论是在思想观念、办学模式、教材建设，还是在师资队伍的建设上都存在许多问题需要研究解决. 特别是在教材的建设方面，目前大多沿用了在本科教材的基础上增减修补的方式，没有从根本上解决独立院校的教学需要. 因此，编写符合独立院校人才培养需求的教材，成为当前的重要任务.

基于上述考虑，我们编写了这本《线性代数与概率统计》教材. 本书从培养应用型、技能型人才的目标出发，力求将基本理论写得比较自然顺畅，更侧重实用性. 本书具有以下特点：

1. 不过分追求理论体系的完整性和运算技巧，但保持叙述的严谨性，把握基本概念的准确性，以突出数学思想和数学方法的应用为核心.

2. 在内容上精心安排，起点较低，由浅入深，循序渐进. 在引入一些抽象的概念时，我们利用直观的“模型”为载体，降低起点，化难为易，使学生易于理解，由具体到抽象，知识过渡自然，并且对一些重要的概念和定理加以注释，从多角度帮助学生正确领会概念、定理的内涵. 使学生从不同侧面理解、掌握用数学处理实际问题的方法，提高他们分析问题、处理问题的能力和素质.

3. 本书配有大量例题，除每节配有紧扣该节内容的习题外，每章还配有该章内容的综合练习. 习题的配置注意到难度上循序渐进、知识点覆盖面广及题型多样性.

本教材由武汉东湖学院组织编写，其中线性代数部分由马丽杰编写，概率统计部分由明杰秀编写，全书由马丽杰统稿.

陈桂兴、魏克让、黄象鼎三位教授仔细阅读了书稿，提出了很多宝贵的意见和建议，同时武汉东湖学院的领导、教务处以及武汉大学出版社也给予了大力支持与帮助，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中难免会有很多缺点、错误和不足之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2017 年 9 月

目　录

第一章 行列式

行列式的理论起源于线性方程组，是线性代数中的重要概念之一，在数学的许多分支和工程技术中有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则.

1.1 n 阶行列式

1.1.1 二阶、三阶行列式

在许多实际问题中，人们常常会遇到求解线性方程组的问题，我们在初等数学中曾学过如何求解二元一次线性方程组和三元一次线性方程组.

例如，对于以 x_1, x_2 为未知元的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

由这个解的特点得到启发，为了简明地表达这个解，引入了二阶行列式的概念.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中，数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫行，竖排叫列. 元素 a_{ij} 的

第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列.

由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和.这个规律性表现在行列式的记号中就是"对角线法则". 如图 1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式等于主对角线上两元素的乘积减去副对角线上两元素的乘积.

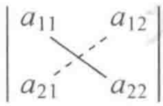

图 1-1

由上述定义，得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1) 的解可用二阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

注 从形式上看，这里分母 D 是由方程组(1.1) 的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中的第一列所得的行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中的第二列所得的行列式. 本节后面讨论的三元一次线性方程组的解也有类似的特点，请读者学习时注意比较. 总之，当(1.1) 中未知量的系数排成的系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1) 的解可由(1.3) 给出.

例 1.1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13, \\ 5x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 5 = -23 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 13 \times (-4) - 3 \times (-2) = -46,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 13 \times 5 = -69,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-46}{-23} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-69}{-23} = 3.$$

例 1.2 设 $D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ 3 & 1\end{vmatrix}$，问：(1) 当 λ 为何值时，$D=0$？ (2) 当 λ 为何值时，$D\neq 0$？

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ 3 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda,$$

若 $\lambda^2-3\lambda=0$，则 $\lambda=0$，$\lambda=3$. 因此可得：

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$；

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，$D\neq 0$.

现在来看三元一次线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.4}$$

同样，由消元法可得，当

$$\begin{aligned}D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ \neq& 0\end{aligned}$$

时，(1.4) 的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}),\\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3),\\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}).\end{cases}\tag{1.5}$$

同前面一样，为方便记忆，我们引入三阶行列式的概念：

定义 1.2 记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

注 这个行列式含有三行、三列，其展开式是 6 个项的代数和. 这 6 个项中的每一项都是由不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正号或负号构成的. 我们可用一个简单的规律来记忆，这就是所谓三阶行列式的对角线规则，如图 1-2 所示，即实线上三个元的乘积构成的三项都冠以正号，虚线上三个元的乘积都冠以负号.

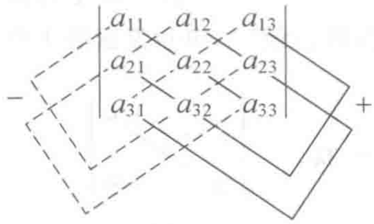

图 1-2

例 1.3 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 \\ &\quad -2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6 \\ &= 10.\end{aligned}$$

例 1.4 展开行列式 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

有了三阶行列式后，(1.5) 可以很有规律地表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

上面三式右边居分母位置的三个行列式都是 D，它是线性方程组(1.4) 的系数按原有相对位置而排成的三阶行列式，也称为方程组(1.4) 的**系数行列式**，而在 x_1,x_2,x_3 的表达式中的分子分别是把系数行列式 D 中第 1,2,3 列换成常数项 b_1,b_2,b_3 而得到的三阶行列式，依次记为 D_1,D_2,D_3. 这与二元线性方程组的解具有相同的规律. 不仅如此，以后我们还可以看到：n 元线性方程组的解

也同样可以用"n 阶行列式"来表达，其情况与二元、三元线性方程组解的表达式完全类似. 于是三元线性方程组的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.5 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解 因为 $\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-8\neq 0$，以及

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\ D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,\ D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6,$$

故有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}.$$

例 1.6 求解方程 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0.$

解 方程左端

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

1.1.2 n 阶行列式

通过前面的讨论，对于二阶、三阶行列式可用对角线法则定义，但是对于 n 阶行列式如果用对角线法则来定义，当 $n>3$ 时，它将与二阶、三阶行列式没有统一的运算性质，因此，对一般的 n 阶行列式要用其他的方法来定义. 在线性代数中有不同的定义方式，我们在本书中采用下面的递推法来定义.

从二阶、三阶行列式的展开式中，可发现它们都遵循着相同的规律——可按第一行展开，即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}, \tag{1.6}$$

其中

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

M_{11} 是原来三阶行列式 D_2 中划掉元素 a_{11} 所在的第 1 行和第 1 列的所有元素后剩下的元素按原来的次序排成的低一阶的行列式. 称 M_{11} 为元素 a_{11} 的**余子式**. 同理，M_{12} 和 M_{13} 分别是 a_{12} 和 a_{13} 的**余子式**. 为了使三阶行列式的表达式更加规范化，令

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13},$$

A_{11}, A_{12}, A_{13} 分别称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的**代数余子式**.

因此，(1.6) 即为

$$D_2=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.7}$$

同样，

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}, \tag{1.8}$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21}.$$

注 定义一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$（不要把一阶行列式 $|a_{11}|$ 与 a_{11} 的绝对值相混淆）.

如果把(1.8) 和(1.7) 作为二阶、三阶行列式的定义，那么这种定义的方法是统一的，它们都是利用低一阶的行列式来定义高一阶的行列式. 因此，我们自然而然地会想到，用这种递推的方式来定义一般的 n 阶行列式，这样定义的各阶行列式就会有统一的运算性质. 下面具体给出 n 阶行列式的递推法定义.

定义 1.3 n **阶行列式** D 是由 n^2 个数组成的一个计算式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $n=1$ 时，定义 $D=|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.9}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，M_{1j} 是原来 n 阶行列式 D 中划掉元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列的所有元素后剩下的元素按原来的次序排成的低一阶的行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

在 D 中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**，另外一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义可见，二阶行列式的展开项共有 2！项，三阶行列式的展开项共有 3！项，n 阶行列式的展开项共有 n！项，其中每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积，在 n！项中，带正号的项和带负号的项各占一半.

例 1.7 计算下三角形行列式（主对角线以上所有的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 行列式第一行的元素 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$，由定义得 $D=a_{11}A_{11}$. A_{11} 是 $n-1$ 阶下三角形行列式，于是

$$A_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推，不难求出 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即下三角形行列式等于主对角线上各元素的乘积.

注 主对角线下方所有的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**，除了主对角线上元素之外其余元素全为零的行列式称为**主对角行列式**.

特别地，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$