高·等·院·校·教·材

离散数学（第二版）

Discrete Mathematics

廖元秀　周生明　编著

科学出版社

离散数学

（第二版）

廖元秀　周生明　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书共分6章，分别是绪论、命题逻辑、谓词逻辑、集合论、代数系统和图论。主要内容包括离散量与离散数学、命题公式演算、命题逻辑的推理理论、归结演绎推理、谓词公式的解释、谓词公式演算、自然演绎推理、集合运算、集合计数、鸽笼原理、包含排除原理(容斥原理)、二元关系、函数与映射、代数运算、同态、同构、群、群在编码理论中的应用、布尔代数、图的基本概念、图的矩阵表示、有向图、欧拉图、哈密顿图、带权图和树。本书设计为72学时，带星号*的章节可视具体情况选讲。

本书可作为高等院校计算机专业的教材，也可供信息及电子等专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/廖元秀，周生明编著. —2版. —北京：科学出版社，2017.6

ISBN 978-7-03-053566-5

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①廖…②周… Ⅲ. ①离散数学 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第132011号

责任编辑：邹 杰/责任校对：郭瑞芝

责任印制：霍 兵/封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市密东印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年2月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017年6月第 二 版 印张：17 1/2

2017年6月第八次印刷 字数：415 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

离散数学是计算机专业的一门重要基础课程，也是信息技术、电子工程等专业的理论基础课。离散数学为计算机科学与技术等应用学科的研究提供了形式化方法，为实际问题的描述提供了数学模型，为问题求解在计算机上的实现提供了数学工具。因此，学好离散数学对于提高学生的学习能力、解决实际问题的能力以及学好相关专业课程都有着重要意义。

本书在第 1 版的基础上进行以下改进。

(1) 本书按 68~72 课时安排讲授内容，因此删除了第 1 版中作为选讲的部分内容。

(2) 对教材中知识点的论述进行进一步细化，特别是对概念和方法的解释给出详细说明，并对知识的应用给出具体的操作步骤。

(3) 增加了例题，为学生提供更多的参考。调整了习题，使之更适合学生课后练习。

(4) 本书内容编排和写作风格与在线开放课程接轨，可作为在线开放课程的教材及慕课、微课的脚本。

此外，本书继承了第 1 版的写作风格，并保持了第 1 版的 5 个目标。

(1) 读者能较为轻松地理解和掌握形式化方法。本书完整、详细地介绍命题逻辑和谓词逻辑的基本概念、基本知识以及基于逻辑知识的形式化方法。通过学习，读者可以领会到形式化方法的思想，学会用形式化方法描述和解决实际问题。例如，如何用命题公式和谓词公式来表示实际问题，怎样用形式符号来描述问题求解过程等。由于计算机的算法、数据结构、程序设计是用形式化方法描述的，所以形式化方法是用计算机求解问题的基本知识和基本技术。熟练掌握形式化方法将为后续的计算机课程打下良好的基础。

(2) 读者能学到许多建立数学模型的思想和方法。本书介绍将自然语言描述的命题转换为用数学符号表示的命题公式和谓词公式的一般原则与详细步骤，并详细介绍谓词公式的解释和含义，以及用命题公式序列和谓词公式序列表示推理的过程。这些推理是人们的思维方式的数学模型。本书还介绍集合作为各种研究对象的数学模型、关系作为对象之间相互联系的数学模型、抽象的代数结构和代数运算作为实际问题的数学模型。其中，群可作为编码的数学模型，图可作为交通、运输、通信、物流、信息传递等网络的数学模型。这些模型都有广泛的应用。

(3) 读者能掌握用于问题求解的数学知识和数学工具。本书介绍的知识，都配有应用这些知识的实例，并给出问题求解的思路和求解步骤。例如，对于构造命题逻辑中的形式证明、构造谓词公式的解释、求关系的传递闭包、代数运算律及特殊元素的性质、求图的最短路径等应用问题，都给出了具体、详细的算法和求解过程。

(4) 提高学生的自学能力。由于许多大学新生不注重对概念的理解和对方法的掌握，习惯于从具体的例题去把握概念，喜欢模仿例题的格式来解题。这些学习习惯导致学生在自学方面不能收到理想的效果。针对这些问题，我们在编写本书时采取了以下措施。

①以知识点为单位展开论述，每个段落所述内容都明确列出相关的知识点，使得重点突出、难点降低。

②对概念的描述简明扼要、直截了当，并对复杂概念的理解和把握给出应注意的事项。

③对于问题求解，给出详细的解题方法，并配有详解的例题。

④对于算法的描述和应用，给出明确的算法思想与详细的操作步骤，并给出算法应用实例的具体操作过程。

⑤对于定理证明，给出思路清晰、层次分明、推理严谨、步骤详细的证明过程。

⑥注意介绍离散数学的思想方法，引导学生从“重例题轻概念”“重模仿轻方法”的学习模式转换到“以概念、方法、原理为主，以例题为辅”的学习模式上来。

(5) 方便教师备课。考虑到知识的连贯性和内容的完整性，我们对书中涉及的有关概念都给予介绍，不需另外查阅其他参考书。对各章节的教学难点都给出了具体的解决方案。

本书在各章节中都贯穿着这样一个主线索：重视概念的理解—理清解题的思路—明确解题的步骤—细化解题的过程。读者在阅读本书时务必要做到以下几点。

(1) 抓住书中的主线索，扎扎实实地攻克每一个知识点。

(2) 掌握书中介绍的思想方法，关注解题过程中“别人是怎么想的”。

(3) 领会书中介绍的解题思路，弄清解题过程中“具体是怎么做的”。

由于作者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

作　者

2017 年 2 月

目　录

第1章 绪 论

1.1 离散量与离散数学

离散数学是包含数理逻辑、数论、代数、图论等多个数学分支内容的一门学科，它的研究对象是离散量的结构以及离散量之间的相互关系。离散量用于描述量之间相互关联的紧密程度。有些量之间的关联是松散的，其分布是稀疏的，这些量称为离散量。例如，整数全体、有限个实数、有限集合等所代表的量都是离散量。而有些量之间的关联是紧致的，它们的分布是稠密的、连续的，这些量称为连续量。例如，实数全体所代表的量是一个连续量。离散量是相对于连续量而言的，目前还没有关于离散量的严格定义。为了更好地把握离散数学的研究对象，下面给出离散量的一个较为严格的定义。

【基本量】定义 1.1 一个独立的不再细分的对象称为一个基本量。

例如，每一个自然数 n 都可以作为一个基本量；三个实数 $\sqrt{2}$、3、6.5 可分别定义为三个基本量；集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 中的每一个元素都可以定义为一个基本量。

注： 基本量是在讨论具体问题时作为一个基准的量来定义的，当一个对象被定义为基本量以后，就不再进行进一步的分解。

例如，在购买飞机的交易中，其价格以元为基本量，那么无论飞机价格如何浮动，都要以元为最小的价格单位，不能有更小的零头。又如，设集合 $A=\{[0,1],[2,3]\}$，把 A 中的元素定义为基本量，则 A 有两个基本量 $[0,1]$ 和 $[2,3]$。作为基本量，$[0,1]$ 不能再进一步分解，只能作为一个整体对待。

【可数无穷集】定义 1.2 设 A 是一个集合，如果存在集合 A 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的双射，则称 A 为可数无穷集。

【离散型集合】定义 1.3 设 A 是一个集合，若 A 是有限集或可数无穷集，则称 A 是离散型集合。

【连续统】定义 1.4 全体实数所构成的集合称为连续统(continuum)。

【连续型集合】定义 1.5 设 A 是一个集合，如果存在集合 A 与连续统之间的双射，则称 A 为连续型集合。

【一个集合所代表的量】定义 1.6 设 A 是一个集合，把 A 中的每一个元素都定义为一个基本量，则 A 中的基本量全体称为 A 所代表的量。

集合 A 所代表的量是由 A 中所有成员构成的。“集合 A”与“集合 A 所代表的量”这两个概念具有不同的含义：对于集合 A 来说，A 中的成员是 A 的元素，仅仅表示一个对象，没有量的含义；而对于集合 A 所代表的量来说，A 中的每一个成员是一个基本量，可以作为量来运算和操作。例如，设 $A=\{1,2,5,10,20,50,100\}$，作为集合，A 由 7 个元素组成，每个元素都是数，不代表任何的量。若把 A 中的每一个元素都定义为一个基本量，

则 A 代表了 7 个量。例如，可以用 A 所代表的量来表示人民币的面值。

【离散量】定义 1.7　设 A 是一个离散型集合，把 A 中的每一个元素都定义为一个基本量，则 A 所代表的量称为离散量。

换言之，设 x 是一个变量，若 x 的所有取值构成的集合是一个离散型集合，则称 x 是一个离散量。

例如，令 x 表示"一个姓张的中国人"，则 x 的所有取值构成的集合为 $M=\{a|a\text{是中国人且姓张}\}$，M 是一个有限集，M 是离散型集合，因此，x 是一个离散量。

【连续量】定义 1.8　设 A 是一个连续型集合，把 A 中的每一个元素都定义为一个基本量，则 A 所代表的量称为连续量。

换言之，设 x 是一个变量，若 x 的所有取值构成的集合是一个连续型集合，则称 x 是一个连续量。

例如，令 x 表示"一个负数"，则 x 的所有取值构成的集合为 $H=\{b|b\text{是实数且}b<0\}$，H 是一个连续型集合，因此，x 是一个连续量。

例 1.1　全体整数所代表的量是离散量；全体有理数所代表的量也是离散量。

解：因为整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数无穷集，有理数集 $\mathbb{Q}$ 也是可数无穷集，所以，按定义 1.7，$\mathbb{Z}$ 所代表的量是离散量，$\mathbb{Q}$ 所代表的量也是离散量。

例 1.2　开区间 $(0,1)$ 上的全体实数所代表的量不是离散量。

解：因为区间 $(0,1)$ 上的全体实数组成的集合不是可数无穷集，所以，该集合所代表的量不是离散量。

【离散数学与计算机数学】离散数学是在计算机科学与技术的发展过程中派生出来的一门学科，而不是在数学的研究过程中从某个数学领域(或数学专题)分离出来的一个数学分支。离散数学的诞生是计算机科学和技术发展的需要。早期，"离散数学"是作为大学计算机专业一门课程的名称出现的。美国于 20 世纪 70 年代开始开设"离散数学"课程。随着计算机硬件和软件的迅速发展，计算机的应用领域不断扩大，许多问题都借助于计算机来解决。但是，计算机不能完美地解决所有实际问题，这是由计算机的系统结构决定的。人们现在用的计算机的系统结构本质上仍属于冯•诺依曼结构。这种系统结构的特征是，在计算机运行一个程序的过程中先将组成程序的指令和相关数据一同存放在计算机的存储器中，然后在执行程序时计算机按照程序指定的逻辑顺序把指令从存储器中读出来逐条执行。由于计算机以字节为单位存储数据，且任何一台计算机只能存储有限字节，因而，一台计算机只能存储有限个数据和指令。所以，计算机只能处理离散型数据。另外，计算机在不同领域中的应用需要不同的数学工具和数学方法；在解决不同的实际问题时需要建立不同的数学模型和不同的算法。而这些数学工具和方法分布在多个数学分支中。于是，人们就把这些在计算机应用中常用到的数学知识和方法归集到一起构成一门课程，给计算机专业的学生讲授。由于这门课程的内容所涉及的量都是离散量，所以把这门课程称为离散数学。

离散数学所涉及的数学分支主要包括：集合论、逻辑演算、递归论、数论、线性代

数、抽象代数、布尔代数、组合论、图论、概率论、近似计算、离散化方法等。到目前为止，从理论上讲，离散数学还没有自己独特的理论体系，离散数学所讨论的内容都是其他数学分支中已有的内容。离散数学只关注能在计算机上应用的数学方法。对于一些不能直接在计算机上应用的方法，如连续函数、积分等，离散数学关注的是如何将它们离散化，然后再用计算机来处理。

可以用一句话来概括离散数学：离散数学就是应用于计算机上的数学内容和数学方法。所以，也有人把离散数学称为计算机数学。

1.2 离散数学的地位和作用

数学方法是计算机理论和技术的基础，是计算机在实现方面最有力的工具之一，许多计算机课程都包含大量的数学内容。举例说明如下。

(1) 在“C 程序设计”中用到数理逻辑的知识。C 语言是一种形式语言，C 语言中的语句都可看做一个逻辑公式。IF 语句就是一个典型的“蕴含式”逻辑公式。C 语言中的关系运算、关系表达式和逻辑运算、逻辑表达式等都用到了逻辑演算的知识，它们的运算法则都遵循逻辑演算的规则。另外，C 语言中表示 n 维数组的方法，就是集合论中表示 n 元关系的方法。

(2) 在“数据结构”中用到集合论、图论、递归论方法等知识。

(3) 在“数据库系统”中用到集合论和谓词逻辑等知识。关系数据模型中的操作用到集合论中的关系运算。基于逻辑的数据模型以一阶谓词逻辑作为数据模型，其操作都是以逻辑演算方法为基础的。

(4) 在“编译原理”中用到形式语言、逻辑演算、图论、布尔代数等知识。

(5) 在“数字电路与逻辑设计”中用到逻辑演算、布尔代数(也称逻辑代数)等知识。

(6) 在“编码理论”中用到抽象代数、线性代数、数论、布尔代数等知识。编码理论是计算机加密技术的理论基础。

(7) “操作系统”“算法设计与分析”“人工智能”“计算机网络”等许多计算机专业课程都用到离散数学知识。

在“离散数学”课程出现之前，各门计算机课程所需要的数学知识都是在讲授该课程时进行补充讲授。由于没有单独开设数学课，学生在各门计算机课程中学到的数学知识是零碎的、不完整的，因此不能系统地掌握相关的数学知识。然而，数学知识的缺乏直接影响到计算机专业课程的预期目标。另外，许多计算机专业课程包含相同的数学内容，在多门计算机专业课程中分别重复讲授相同的数学内容，造成了时间上的浪费。于是，美国的大学就把计算机专业课程中常用的数学知识汇编在一起作为单独的一门课程来讲授。这样的课程是专为计算机专业提供数学基础的，所以早期也把这样的课程称为“计算机数学基础”。随着计算机科学与技术的不断发展及计算机在多个领域的广泛应用，计算机对数学工具的要求越来越多。因而，离散数学所涉及的内容也越来越广泛、越来越深入，现已发展成为一门独立的数学学科。

由于许多学科的研究和应用都把计算机作为主要工具，许多信息和数据都需要用计

算机表示(或显示)。因此，离散数学也成为电子工程、信息技术等学科的数学基础。

离散数学不但作为理论基础在计算机科学中有着重要的地位和作用，而且作为应用技术在计算机求解问题中也起着极大的作用。

用计算机求解实际问题的过程可分为四大步骤。

(1)用数学语言描述问题，或称为建立实际问题的数学模型。

(2)给出解决问题的步骤，或称为设计解决问题的算法。

(3)写出实现算法的程序。

(4)在计算机上运行程序并验证程序的正确性。

在这四个步骤当中，每一个步骤的完成都需要数学工具。

在第一步中，需要用抽象的数学概念、数学符号和数学结构来表示实际问题。例如，开发一个城市道路交通管理系统，借助于计算机来管理城市交通。首先就要用图论中的图表示城市的交通网络。实际生活中的交通网络图是地图的样式，两地间道路的长短呈一定的比例，有些弯曲的道路在地图上画出来也是弯曲的。但是，用数学方法表示网络图中两点间的连线时不用真正的线条，而是用顶点集中的一个序对来表示。例如，用(u,v)表示连接顶点u与顶点v的一条边，用一个二元组$G=<V,E>$表示一个图，其中，V是图的顶点集，E是图的边集。也可以用一个矩阵来表示一个图。总之，只有用数学模型把实际问题表示出来，才能用计算机解决问题。

在第二步中，要给出解决问题的算法。例如，要确定某两个地点之间是否有通路，有多少条通路？在实际生活的交通图中，可以按某种经验确定两地间是否有通路。但在计算机求解问题过程中，必须先把实际问题转化为数学问题，然后写出求解数学问题的步骤。这种解决问题的步骤就是算法。这样把实际问题(找两地间的通路)转化为数学问题(找图中两点间的通路)，解决这类问题的数学算法有图的搜索算法或矩阵运算的算法等。

第三步是写出实现算法的程序，也就是通常所说的编程。计算机不能直接运行用数学语言描述的算法，只能执行程序设计语言的指令，必须用程序设计语言的指令描述这些算法，才能在计算机上运行。算法中所描述的数据都是用数学结构表示的，所以在程序中描述数据也必须用数学方法来解决。

在第四步中，把程序放到计算机上运行并验证程序的正确性。在程序验证过程中最重要的是验证算法的正确性。一个算法的正确性是指对于待求解的这类问题的任何输入实例，按照算法的操作都可得出正确的输出结果。有些算法对某一组数据的输入可得到正确的输出结果，对另一组数据的输入却得到错误的输出结果，这种算法就不是正确的算法。算法的正确性必须用数学方法(如数学归纳法等)或逻辑推理的方法来证明，不能用若干组数据来验证。因为算法中有些变量可以取无穷多个值，此时，有限个值的验证不能说明算法的正确性。

由以上分析可知，在计算机求解问题过程中，每一个步骤的实现都以数学知识和数学方法为基础，没有数学工具计算机就解决不了问题。至此，我们已经看到离散数学在计算机科学与技术中的地位和作用，同时也回答了为什么要学离散数学这个问题。

1.3　计算机为什么要依赖数学

为什么计算机一定要依赖数学？在用计算机解决实际问题的过程中能否绕过数学或用别的办法来替代数学的作用呢？例如，在处理文字、网页、艺术、音乐、自然语言翻译等与数学无关的问题时，能否避开数学工具和数学方法呢？我们的回答是：使用计算机的人在处理这些问题时可以不涉及数学，但开发这些应用软件的人员必须要用数学工具和数学方法。这里从以下几方面来说明为什么计算机离不开数学。

(1) 计算机只能处理“0,1 代码”。所有数据和操作都要转换为“0,1 代码”计算机才能处理。那么，现实世界中有形形色色的数据，有千千万万待解决的问题，计算机仅用“0,1 代码”能完成这么多任务吗？回答是肯定的。理论上，“0,1 代码”有无穷多个，不同的“0,1 代码”可以代表不同的对象、不同的操作以及不同的含义。所以，“0,1 代码”可以表示无穷多的事物。但要编排这些“0,1 代码”，让某些“0,1 代码”恰好能代表人们所要做的事情就非得用数学方法不可。

(2) 计算机只能理解形式语言。在用计算机解决实际问题的过程中，要编写程序放到计算机上运行，计算机才能完成指定的任务。然而，编程所用的语言要求是一种形式语言。形式语言是使用简单的没有二义性的词汇，按照严格的语法规则构成没有歧义的语句，由这些语句构成的语言就是形式语言。而要构造形式语言只能用数学方法，没有其他选择。

(3) 计算机只能接受用数学结构表示的数据。在计算机程序中会涉及相关的数据，要使计算机能正确地识别、操作这些数据，必须按一定的格式来表示这些数据。而计算机能接受的格式只能是某种数学结构。虽然每一种程序设计语言都有自己可用的数据类型，但表示这些数据类型的结构都是数学结构。

(4) 只有数学算法才是计算机的有效算法。程序是算法在计算机上的体现，它告诉计算机如何操作相关的数据。算法的描述是计算机能否正确解决问题的关键，能正确解决问题的算法是有效算法，否则就是无效算法。因为计算机程序设计语言和数据结构都是用数学方法表示的，所以描述操作数据的步骤必须用数学方法来实现。

总而言之，计算机的应用要依赖于数学。数学工具是由“用自然语言描述实际问题”过渡到“用计算机语言描述问题”的途径，数学方法是人和计算机都能理解的唯一的共同平台。可以说，计算机所做的一切有意义的事情都依赖于相应的数学工具，没有数学工具，计算机将一事无成。

1.4　如何学好离散数学

离散数学的内容比较抽象，学习起来有一定的难度，而且离散数学是计算机科学的基础理论课程，不能一眼看到其在计算机中的直接应用。因此，许多学生对这门课程兴趣不大。在这种“难度不小，兴趣不大”的情况下，如何学好离散数学对老师和学生都是一个极大的挑战。在此，本书提出如何学好离散数学的一些建议，供大家参考。

1. 端正态度，投入精力

离散数学被列为计算机科学基础理论的核心课程，为许多后续课程提供基础知识和思想方法，其重要性是不言而喻的。学好离散数学将会对今后的学习产生重大影响，不仅能给后续课程带来帮助，还能提高逻辑思维能力以及解决问题的能力。另外，离散数学是一门必修课，是绕不开也逃不掉的，所以在学习离散数学课程时不要优柔寡断，应该端正态度，投入时间和精力，下决心把这门课学好。可以肯定地说，学好离散数学是一举多得的好事情。

2. 重视概念，把握方法

学科知识是在相关概念和方法上建立起来的。概念是一门课程的基石，而方法是课程的精彩内容。因此，理解概念和掌握方法是学好一门课程的关键。换句话说，概念理解和方法掌握的程度直接反映了学习的效果。离散数学概念众多，不能死记硬背，要根据定义的描述，结合具体例子理解其中的含义，特别要弄清概念的内涵和外延。离散数学中的方法比较抽象，在学习过程中要注意将方法具体化。本书的许多地方已经写出了方法的应用操作步骤，认真学习领会其中的每个步骤，并将这些步骤应用到具体例子中，就能有效掌握这些方法。

3. 抓住特点，对症下药

每一门课程都有其独特的内容和特点，抓住其特点，采用具有针对性的学习方法可收到事半功倍的学习效果。下面给出本书的各章节的学习要点。

第 2 章(命题逻辑)：有两个核心概念，一是命题联结词；二是命题公式的真值。这两个概念贯穿整章内容，是学习该章内容的纽带和主线索。可以说，第 2 章的所有内容离不开这两个概念。因此，理解掌握好这两个概念及其应用就学好了该章的一半。另一半是该章中用到的三个重要方法，一是命题公式真值的计算(包括真值表的构造)；二是命题公式的等值演算；三是命题逻辑的推理。这三种方法在书中都有详细的描述，并给出了具体的操作步骤，理解领会这些操作步骤并加以实践，可以学好命题逻辑的内容。

第 3 章(谓词逻辑)：谓词逻辑是命题逻辑的扩充，在命题逻辑的基础上增加了对命题中个体对象的性质和个体对象之间关系的描述及推理。谓词逻辑主要研究命题中涉及的全体对象与特定对象、部分对象与特定对象以及全体对象与部分对象之间的逻辑关系。该章有三个特别重要的概念，一是个体；二是量词；三是谓词公式的解释。个体是谓词逻辑描述的对象，这可以从谓词公式得到反映：一元谓词公式描述个体的性质，n 元(二元或二元以上)谓词公式描述个体之间的关系。量词是对谓词公式描述个体性质或个体间关系范围的一种限制，量词对个体的限制范围可从其辖域反映出来。谓词公式的解释是给抽象的谓词公式符号赋予具体的内容，谓词公式经过解释就成为一个命题。这三个概念贯穿第 3 章的内容，能起到纲举目张的作用。该章有三个重要方法，一是构造谓词公式的解释；二是谓词公式的等值演算；三是谓词逻辑的推理。这三种方法在书中都有详细的描述，并给出了具体的操作步骤。只要按照书中的操作步骤进行练习可以掌握该章

的知识。

第 4 章(集合论)：集合论有两个重要概念，一是集合的构成；二是关系的构成。集合的定义和集合运算规则都是简单明了的，而常常遇到的困难是对于具体的集合如何进行各种运算。在此，本书给出一个学习要点：遇到给定的集合，首先要确定该集合由哪些元素组成。换句话说，对于任何一个对象，要能确定该对象是不是这个集合的元素。具体做法是根据集合的表示方法(集合一般有两种表示法：枚举元素法、元素属性描述法)来确定集合的元素。如果集合是用枚举元素法表示的，那么集合元素是一目了然的。如果集合是用元素属性描述法表示的，那么就需要正确理解用于描述集合元素的所有属性，满足所有属性的对象就是集合的元素，否则就不是集合的元素。确定集合的元素是集合论基本运算的核心问题，解决了这个问题，其他问题就会迎刃而解。例如，对于两个集合的交、并、对称差运算，如果能确定这两个集合的元素，那么这些运算就容易解决了。另一个重要概念是二元关系的构成。首先，二元关系是一个集合，适用于集合的各种运算。其次，二元关系的每一个成员(集合的元素)都是一个有序对。在学习二元关系的内容时，确定二元关系的元素是最关键的问题。只要确定了二元关系的元素，二元关系的各种性质和各种运算就会顺利得到解决。学习集合论要关注两个重要的方法：一是集合元素的重组；二是关系定义域中的元素与值域中的元素之间的联系。所有集合运算(包括关系运算)都可看做集合元素的重组，而在讨论关系的自反性、对称性、传递性等性质时反映的是关系定义域元素与值域元素之间的联系。抓住这个思路，学习就容易了。

第 5 章(代数系统)：代数系统是在给定的基础集合上定义若干个满足某些条件的运算。因此，在讨论一个代数系统时，首先要确定该代数系统基础集合包含哪些元素，其次是分析集合上的运算具有什么性质，然后验证这些运算是否满足所要求的条件(如结合律、交换律等)，最后找出代数系统所要求的特殊元素(如单位元、逆元、零元等)。代数系统的学习方法可概括为：充分利用基础集合中元素的特性，并找出代数运算的规律，将集合元素的特征和代数运算的规律结合起来验证给出的“集合及其上的运算”是否构成所要求的代数系统。例如，实数的加法满足交换律；但实数的减法不满足交换律；在整数集合中，任何两个不同元素相乘都不等于 1；但在有理数集合中，任何不等于 0 也不等于 1 的元素，都存在一个与之不同的元素使它们相乘等于 1。

第 6 章(图论)：图论有两个最重要的概念，一是图的连通性；二是带权图的最短路径。连通性包括两个顶点间的连通性和整个图的连通性，以及无向图的连通性及有向图的连通性。一个图无论是用集合表示还是用矩阵表示，直接判定一个图是否连通有困难。一般都是通过计算图的邻接矩阵来判定图的两个顶点间是否存在通路，进而判定整个图是否连通。计算 $A^* = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$ (其中 A 是图的邻接矩阵)是用于判定图的连通性最常用也是最重要的方法，务必熟练运用。带权图的最短路径有着广泛的应用，求带权图最短路径的经典算法是 Dijkstra 算法，应该深刻理解其思想方法并熟练掌握其操作过程。

第2章　命 题 逻 辑

2.1　命题逻辑概述

【逻辑】逻辑一词是英文 Logic 的译音，它有几方面的含义：事物的规律；思维规律；逻辑学。本书谈到的逻辑是指“逻辑学”。这与代数指“代数学”、几何指“几何学”、物理指“物理学”一样。逻辑学是研究思维的形式结构及其规律的科学。

【数理逻辑】数理逻辑也称符号逻辑，是用数学方法研究逻辑的一门学科。它使用人工语言和形式化方法研究语句、推理、论证等。数理逻辑是计算机科学的理论基础，它的研究内容包括：逻辑演算(包括命题逻辑、谓词逻辑等经典逻辑和模态逻辑、归纳逻辑、多值逻辑、构造逻辑等非经典逻辑)、集合论、递归论(可计算性理论)、模型论和证明论等。

【命题逻辑】命题逻辑是数理逻辑中的一小部分内容，是研究命题之间运算和命题之间推理的理论。在命题逻辑中，命题是最基本的研究对象，简单命题是最小的研究单位，不能将简单命题再细分为更小的单元。但是，由命题和命题联结词可以构成复合命题。

命题逻辑分为经典命题逻辑和非经典命题逻辑，非经典命题逻辑有构造命题逻辑、模态命题逻辑、相干命题逻辑、多值命题逻辑等。本书讨论的命题逻辑是经典命题逻辑，是所有逻辑都共有的最简单、最基本的内容。历史上最早研究命题逻辑的是古希腊斯多阿学派的哲学家。用现代方法研究命题逻辑始于 19 世纪中叶。弗雷格于 1879 年建立了第一个经典命题逻辑的演算系统。当初数学家创建经典命题逻辑理论的时候还没有出现计算机，命题逻辑是出于对自然语言描述命题的精确化问题和对数学中的证明给予严格定义的考虑而建立起来的一套理论体系。

命题逻辑是作为数学理论来研究和发展的。但在 20 世纪 40 年代人们发明了计算机以后，它就成为了计算机科学研究和学习的对象，也成为计算机强有力的应用工具。因为计算机上的运算和操作是以命题逻辑为基础的，计算机能使用的语言都是符号化的语言，计算机语言中的语句都是以命题形式出现的，许多程序设计语言中的指令或语句实际上就是一个命题公式，所以命题逻辑可以看成计算机程序设计语言的基础语言。

命题逻辑有两个最重要的概念，即命题联结词和命题的真值。这两个概念贯穿本章的内容。命题联结词的性质反映复合命题的性质；命题真值之间的联系反映命题之间的推理关系。因此，研究命题联结词的性质就可知命题运算的性质，从而获知复合命题的性质；研究命题之间真值关联的规律就可获知命题推理的规律。

所以，研究命题逻辑往往从研究命题联结词的性质和命题真值的规律开始，所采用的方法是形式化(或符号化)方法。这种形式化的表示方法和推理方法是对“用自然语言描述的推理”的一种抽象，命题逻辑中的推理是人们通常使用的推理的一种数学模型，

也是人类思维方式的一种数学模型。

【形式语言】语言是人们表达思想、交流信息的一种工具。人们日常生活所使用的语言称为自然语言(如汉语、英语、俄语等)。还有一种语言称为形式语言，它不属于自然语言。这种语言在科学研究和计算机科学技术中经常用到，如数学语言、计算机程序设计语言等。形式语言由一些意义明确的符号按照严格的语法规则构成，其中的词汇和语句没有歧义。形式语言只研究语言的组成规则，不研究语言的含义。

与形式语言不同，自然语言中的某些词汇是多义词，某些语句存在歧义。自然语言具有含义丰富、使用灵活的优点，但也有不够严谨、一词多义的缺点。例如，下面一句话："张三告诉李四他考过英语四级了。"看了这句话的人不能肯定是张三考过了英语四级还是李四考过了英语四级。这句话可以理解为"张三告诉李四：张三通过了英语四级考试"；也可以理解为"张三告诉李四：李四通过了英语四级考试"；还可以理解为"张三告诉李四：张三考完了英语四级"。可见，用自然语言描述问题不能保证每一个问题都能得到准确的理解；用自然语言描述推理过程不能保证所得结论都是正确的。发生这种情况在数学证明或计算机程序设计中是不能接受的。所以，为了保证对问题的准确描述，需要对描述问题的语言形式进行严格的限制。换句话说，在严谨的科学研究和技术应用中只能使用没有歧义的形式语言，不能使用自然语言。命题逻辑是一种形式语言，可用于计算机科学技术的研究。

2.2 命题及命题联结词

【命题】定义 2.1 能够判断真假的陈述句称为命题。

由定义知：非陈述句肯定不是命题，既不真也不假的陈述句也不是命题，可真可假的陈述句更不是命题。一个陈述句成为一个命题的关键特征是该语句或是一个真语句或是一个假语句，二者必居其一。

例 2.1 请问下列语句中哪些是命题？哪些不是命题？

(1) 北京是中国的首都。

(2) 足球是圆的。

(3) $2+3=5$。

(4) C 语言是一种计算机程序设计语言。

(5) 如果温度达到零度以下，则水会结成冰。

(6) 鸟会飞，但鸡不会飞。

(7) 赵六是大学生吗？

(8) 香格里拉真是太美丽了！

(9) 杨七是高个子。

(10) $1+x>3$。

解：(1)～(6)都是命题，(7)～(10)都不是命题。因为(1)～(6)都是可以判断真假的陈述句；(7)和(8)不是陈述句；(9)中的"高个子"是一个模糊概念，不能判断其真假性；(10)的真假判断结果不唯一，当 $x=5$ 时，$1+x>3$ 是真的，当 $x=-6$ 时，$1+x>3$ 是

假的。

【理解“命题”概念应注意的问题】确定一个陈述句是否为命题并非一件容易的事。特别是初学者，在理解“命题”这个概念时需注意以下几个问题。

(1) 一个陈述句往往不是只写给一个人看的，而是写给很多人看的。那么，由谁来判定这个语句的真假性呢？例如，语句“2008 年 1 月 1 日是晴天”是真还是假呢？这与读这句话的人所处的地点有关。如果北京当天是晴天，那么当天在北京的人就认为这句话是真的；而如果广州当天下雨，那么当天在广州的人就认为这句话是假的。一个语句的真假常常与情境(时间和地点)有关。

(2) 以什么技术、什么方法、什么理论来检验语句的真假，或者说以什么准则来判定语句的真假，所得到的结论是不一样的。例如，对于一张假币的判断，没有经验的人可能认为语句“这是一张 100 元的人民币”是真话；而有经验的人通过手摸或用验钞机检查，则会判断语句“这是一张 100 元的人民币”是假话。

(3) 人的判断能力是有限的，许多断言有确定的真假值，但人们不能确定它们。换句话说，人们没有能力识别所有陈述句的真假。例如，语句“地球之外存在生命”是真还是假？也许某一天有人能得出确定的结论，也许永远得不到确定的结论。

(4) 尽管确定陈述句的真假有一定的困难，但这并不影响我们对命题逻辑的学习和研究。研究命题逻辑的目的不是要对所有陈述句的真假进行分析和判断，也不是要分析出所有命题的真假。而是要研究命题运算的性质和命题之间推理的规律，是为了能够更好地使用没有歧义的语言来描述问题，保证合法的推理一定得出正确的结论。从而，为包括计算机科学在内的科学技术的研究和应用提供强有力的工具。

【判断陈述句真假的参考原则】在命题逻辑中，判断一个陈述句的真假时可参考如下原则。

(1) 按常识理解，据常理推断。例如，对语句“鸟会飞，但鸡不会飞”的判定，按常识理解，这个语句是真的。不要钻牛角尖，不要由于有些鸟不会飞(如鸵鸟)，就认为该语句不是真命题。

(2) 具体问题具体分析。例如，对语句“今天是晴天”的判定，可对具体情况进行具体分析，最好在语句中写出与问题有关的时间和地点。例如，写成“2008 年 1 月 1 日北京是晴天”，或“2008 年 1 月 1 日上海是晴天”就很容易判断了。当然，如果根据上下文可推断出说话时的时间和地点，也可以推断出语句的真假。

(3) 重应用，不过多追求理论上的完美。对于那些难以判断真假的语句不必花太多精力去研究，而应该在描述实际问题时使用简明的、易于判断真假的语句。例如，不使用“张三考过了英语四级”这种有歧义的语句，而写成“张三通过了英语四级考试”，或“张三参加了英语四级的考试”这样的语句。后两个语句没有歧义，而且容易判别语句的真假性。

【命题的真值】每个命题都有一个反映命题的真假特征的属性。正如每个人都有一个反映人的生理特征的属性一样。反映人的生理特征的属性，我们把它称为人的“性别”。而反映命题的真假特征的属性就称为命题的“真值”。

“性别”是人的一个属性的名称，这个属性只有两个值：{男，女}。每个人都有一