

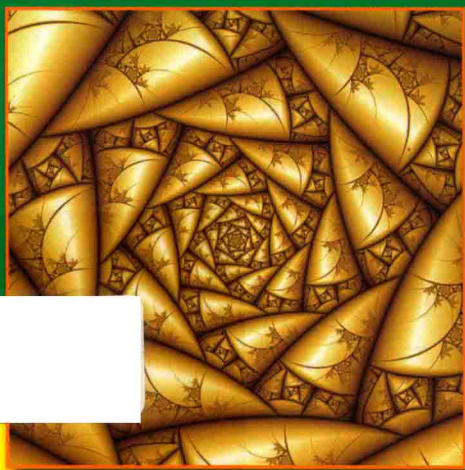


中学数学拓展丛书

数学解题引论

SHUXUE JIETI YINLUN

沈文选 杨清桃 编著



数学解题，人类学习与掌握数学的主要活动！
它是数学活动的一个兴奋中心！

数学解题理论博大精深，提高其理论水平是永远的话题！



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本册书是湖南省教育厅科研课题“教育数学的研究”(编号06C310)成果之五

数学解题引论

SHUXUE JIETI YINLUN

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本册书共分八章:第一章数学解题意义;第二章数学解题研究观点;第三章数学解题过程;第四章数学解题策略;第五章数学解题方法;第六章数学解题思路;第七章几类特殊题型及求解;第八章数学错题校正及数学题错解辨析.

本书可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或数学参考书,也是广大中学数学教师及数学爱好者的数学视野拓展读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题引论/沈文选,杨清桃编著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2017.5
(中学数学拓展丛书)
ISBN 978-7-5603-6564-0

I. 数… II. ①沈… ②杨… III. ①中学数学课—
题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 075534 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 曹 杨
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.75 字数 525 千字
版 次 2017 年 5 月第 1 版 2017 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6564-0
定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



序

我和沈文选教授有过合作,彼此相熟。不久前,他发来一套数学普及读物的丛书目录,包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等,洋洋大观。从论述的数学课题来看,该丛书的视角新颖,内容充实,思想深刻,在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余,忽然觉得公众对数学的认识很不相同,有些甚至是彼此矛盾的。例如:

一方面,数学是学校的主要基础课,从小学到高中,12年都有数学;另一方面,许多名人在说“自己数学很差”的时候,似乎理直气壮,连脸也不红,好像在宣示:数学不好,照样出名。

一方面,说数学是科学的女王,“大哉数学之为用”,数学无处不在,数学是人类文明的火车头;另一方面,许多学生说数学没用,一辈子也碰不到一个函数,解不了一个方程,连相声也在讽刺“一边向水池注水,一边放水”的算术题是瞎折腾。

一方面,说“数学好玩”,数学具有和谐美、对称美、奇异美,歌颂数学家的“美丽的心灵”;另一方面,许多人又说,数学枯燥、抽象、难学,看见数学就头疼。

数学,我怎样才能走进你,欣赏你,拥抱你?说起来也很简单,就是不要仅仅埋头做题,要多多品味数学的奥秘,理解数学的智慧,抛却过分的功利,当你把数学当作一种文化来看待的时候,数学就在你心中了。

我把学习数学比作登山,一步步地爬,很累,很苦。

但是如果你能欣赏山林的风景,那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初始阶段。走入山林,爬得微微出汗,坐拥山色风光。体会“明月松间照,清泉石上流”的意境。当你会做算术,会记账,能够应付日常生活中的数学的时候,你会享受数学给你带来的便捷,感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段,爬到山腰,大汗淋漓,歇足小坐,环顾四周,云雾环绕,满目苍翠,心旷神怡。正如苏轼名句:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中。”数学理解到一定程度,你会感觉到数学的博大精深,数学思维的缜密周全,数学的简洁,你会对符号运算有爱不释手的感受。不过,理解了,还不能创造。“采药山中去,云深不知处。”对于数学的伟大,还莫测高深。

最后是登顶阶段,攀岩涉水,越过艰难险阻,到达顶峰的时候,终于出现了“会当凌绝顶,一览众山小”的局面。这时,一切疲乏劳顿、危难困苦,全部抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”,欣赏数学之美是需要代价的。当你破解了一道数学难题,“蓦然回首,那人却在灯火阑珊处”的意境,是语言无法形容的快乐。

好了,说了这些,还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读,它会帮助你一步步攀登数学的高山,领略数学的美景,最终登上数学的顶峰。于是劳顿着,但快乐着,信手写来,权作为序。

张奠宙

2016年11月13日

于沪上苏州河边

附 文

(文选先生编著的丛书,是一种对数学的欣赏。因此,再次想起数学思想往往和文学意境相通,年初曾在《文汇报》发表一短文,附录于此,算是一种呼应)

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词,历来有许多可供谈助的材料。例如:

一去二三里,烟村四五家。

亭台六七座,八九十枝花。

把十个数字嵌进诗里,读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗:

一片二片三四片,五片六片七八片。

千片万片无数片,飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过,以上两诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系,在于意境。李白《送孟浩然之广陵》诗云:

故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候,总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句,让大家体会一个变量趋向于0的动态意境,煞是传神。

近日与友人谈几何,不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句:

前不见古人,后不见来者。

念天地之悠悠,独怆然而涕下。

一般的语文解释说:上两句俯仰古今,写出时间绵长,第三句登楼眺望,写出空间辽阔,在广阔无垠的背景中,第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪,两相映照,分外动人。然而,从数学上来看,这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间)。陈老先生以自己为原点,前不见古人指时间可以延伸到负无穷大,后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间:天是平面,地是平面,悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考,感到自然之伟大,产生了敬畏之心,以至怆然涕下。这样的意境,数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说,爱因斯坦的思维时空学说,也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时,用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句:

春色满园关不住,一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上,无界变量是说,无论你设置怎样大的正数 M ,变量总要超出你的范围,即有一个变量的绝对值会超过 M 。于是, M 可以比喻成无论怎样大的园子,变量相当于红杏,结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比喻如此贴切,其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题,而解题过程需要反复思索,终于在某一时刻出现领悟。例如,做一道几何题,百思不得其解,突然添了一条辅助线,问题豁然开朗,欣喜万分。这样的意境,想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境:“众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处。”一个学生,如果没有经历过这样的意境,数学大概是学不好的了。

◎

前

言

音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学就是对于模式的研究。

——A. N. 怀特海

甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解一种实际情况,因为我们在试图建立数学模型时被迫考虑了各种逻辑可能性,不含混地定义了所有的概念,并且区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了与事实不符的结果,它也可能是有价值的,因为一个模型的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战争是相似的,有时一次失败比一次胜利更有价值,因为它帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

——A. Renyi

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦耳的优美旋律!

人们喜爱画卷,因为它不仅能描绘出自然界的壮丽,而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅能字词的巧妙组合,而且有抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且增加人的智慧!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或桥

梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、智慧、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学精神,科学与人文融合的精神,它是一种理性精神,一种求简、求统、求实、求美的精神!数学精神似一座光辉的灯塔,指引数学发展的航向!数学精神似雨露阳光滋润人们的心田!

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带着数字印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间的数学踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍;让我们在思疑中启悟,在思辨中省悟,在体验中领悟!

数学方法,人类智慧的结晶,它是人类的思想武器;它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接;它的源头又是那样的寻常!

数学解题,人类学习与掌握数学的主要活动,它是数学活动的一个兴奋中心;数学解题理论博大精深,提高其理论水平是永远的话题!

数学技能,在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式.它是一种智慧,是数学能力的一种标志,操握数学技能是应达到的一种基础性目标!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景,特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学竞赛,许多青少年喜爱的一种活动,这种数学活动有着深远的教育价值,它是选拔和培养数学英才的重要方式之一.这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣,可以扩大他们的数学视野,促进创新意识的发展.数学竞赛中的主题培训内容展示了竞赛数学亮丽的风采!

数学测评,检验并促进数学学习效果的重要手段.测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩.测评数学的深入研究正期待着我们!

数学史证,充满了诱人的前辈们的创造与再创造的心血机智,让我们可以从中汲取丰富的营养!

数学欣赏,对数学喜爱的情感的流淌.这是一种数学思维活动的崇高情感表达.数学欣赏,引起心灵震撼,真、善、美在欣赏中得到认同与升华.从数学欣赏中领略数学智慧的美妙,从数学欣赏走向数学鉴赏,从数学文化欣赏走向数学文化研究!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学。

从而,提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高中华民族的整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标。为此,笔者构思了这套书。

这套书是笔者学习张景中院士的教育教学思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:构建符合时代需求的充满数学常识、数学智慧的书籍。

不积小流无以成江河,不积跬步无以至千里,没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色.这套书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已

发表的文章的修改并整合的基础上完成的。因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者。

这套书,作者试图以专题的形式,对中、小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作。

本册书是《数学解题引论》。

学数学离不开解题。数学解题对建立和发展数学知识结构,形成和增进数学思维能力,培养和造就创造精神等方面起着不可取代的重要作用。解数学题是学习数学的主要形式,是学习数学课程的一个“实践性”环节。通过解题可以使学习者独立地、积极地进行认知活动,深入地理解数学概念,全面系统地掌握数学基础知识,实际地学习数学的本质、精神、思想,切实地掌握解数学题的基本技能和技巧,从而有效地培养运算求解能力、推理论证能力、空间想象能力、抽象概括能力和数据处理能力等。

如何解答无穷无尽的数学问题,如何从新的理论高度来进行数学解题研究,逐步建立并完善数学解题理论体系,……这一系列问题一直是作者近几十年思考的问题。为此,作者于1996年主编了高师院校试用教材《初等数学解题研究》,以及撰写了《中学数学解题典型方法例说》等著作。又经过这20多年的实践检验,在这些年间,作者又学习了各位同仁新的解题研究成果,并进行了一些新的探索,清点梳理,便形成这本《数学解题引论》的主体内容。

本书是作者进行初等数学解题理论建设的一些尝试,在数学解题意义的探讨,解题观点、解题过程的阐述,解题策略、解题方法的系统建构,解题思想的探寻,一些特殊题型的研究等中,既介绍了各位同仁的成果,也融进了作者的一些见解。在这其中,对于某些问题的理解目前尚未取得国内外专家的共识,作者深知,书中所建立的理论框架只是初步的、不完善的。但是形势的需要迫使我们不得不先做抛砖之举,也发挥作者的一点余热。“初生之物,其外必丑”,作者热忱地期待同行、专家的斧正。

衷心感谢张莫宙教授在百忙中为本套书作序!

衷心感谢刘培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、责任编辑老师等诸位老师,是他们的大力支持,精心编辑,使得本书以这样的面貌展现在读者面前!

衷心感谢我的同事邓汉元教授,我的朋友赵雄辉、欧阳新龙、黄仁寿,我的研究生们:羊明亮、吴仁芳、谢圣莫、彭喜、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君、孔璐璐、邹宇、谢罗庚、彭云飞等对我写作工作的大力协助,还要感谢我的家人对我们写作的大力支持!

沈文选

2017年3月于岳麓山下



第一章 数学解题意义

1.1 为什么要解题?	1
1.2 什么是题? 什么是数学题?	3
1.3 数学问题的分类	5
1.3.1 按四信息分析分类	5
1.3.2 按知识内容分类	6
1.3.3 按解题形式分类	6
1.3.4 按评判解答的客观性分类	7
1.3.5 按思维程度分类	7
1.3.6 按用途分类	9
1.3.7 按难度分类	10
1.4 什么是解题?	10
1.4.1 运用系统论科学描述解题	10
1.4.2 问题解决	12

第二章 数学解题研究观点

2.1 系统科学论的观点	15
2.1.1 系统的基本性质与解题	15
2.1.2 信息论与解题	16
2.1.3 三条基本原理与解题	17
2.2 波利亚的观点	19
2.2.1 程序化的解题系统	20
2.2.2 启发式的过程分析	20
2.2.3 开放型的念头诱发	21
2.2.4 探索性的问题转换	21
2.3 弗里德曼的观点	22
2.3.1 强调解题的实践性和创造性	22
2.3.2 解答数学题的实质是要找到一种一般数学原理的序列	22
2.3.3 分析解题过程的程序	23
2.3.4 寻找解题方案的建议	24
2.4 罗增儒的观点	25
2.4.1 解题坐标系的建立	25
2.4.2 解题思路的探求	30
2.4.3 解题过程的改进	31

目录 CONTENTS



目录

CONTENTS

2.5 数学解题研究观	32
2.5.1 数学解题研究的中心内容是什么?	33
2.5.2 数学解题方法系统的轴心系统是什么?	34
2.5.3 数学解题方法系统应怎样建构?	34

第三章 数学解题过程

3.1 解题程序	35
3.1.1 一般解题程序	35
3.1.2 特殊解题程序	39
3.2 数学解题过程分析	41
3.2.1 解题步骤过程的一般性与特殊性分析	41
3.2.2 解题思维过程的四阶段说	45
3.2.3 解题思维过程的图解表示	46
3.3 数学解题思路的探求	47
3.3.1 试悟式探索	48
3.3.2 顿悟式探索	51
3.4 数学解题成果的扩大	56
3.5 数学解题水平的提高	65
3.5.1 提高数学解题水平的基本条件	65
3.5.2 解题水平的主要标志	68
3.5.3 突破解题瓶颈需要加强策略性知识学习	69
3.5.4 沿着五个层次,逐步培训和提高解题水平	69
3.5.5 加强典型练习,提高学用能力	75

第四章 数学解题策略

4.1 数学解题策略应遵循的原则	78
4.1.1 明确的目的性原则	79
4.1.2 熟悉化原则	80
4.1.3 简单化原则	81
4.1.4 具体化原则	82
4.1.5 和谐化原则	83
4.1.6 分析问题的全面性原则	84
4.2 数学解题策略选择、制定中的关注要点	86
4.2.1 观察、逻辑、知识、经验是选择、制定解题策略的重要因素	86
4.2.2 辩证的思维是选择、制定解题策略的根本途径	89
4.3 数学解题策略选择、制定的技术摘要	91
4.4 数学解题策略系统的三大支柱子系统	94
4.4.1 模式运作,化生为熟	95
4.4.2 聚焦切入,活化中介	116
4.4.3 差异分析,适时转化	134

第五章 数学解题方法

5.1 数学解题方法的意义与实质	152
5.1.1 方法及解题方法的各种理解	152

5.1.2 数学解题方法具有根本的意义	154
5.1.3 对数学问题形式的认识是数学解题方法的实质	154
5.2 数学解题方法的分类与系统建构	156
5.2.1 数学解题方法的分类	156
5.2.2 数学解题方法的系统观	157
5.2.3 数学解题方法的系统建构	159
5.3 数学解题方法中的几个关系	161
5.3.1 数学解题方法与数学方法	162
5.3.2 数学解题方法与数学教学	162
5.3.3 数学解题方法与数学思维	163
5.3.4 数学解题方法与数学解题策略	164
5.3.5 数学解题方法与数学思想	164
5.3.6 数学解题方法与数学方法原理	165
5.3.7 数学解题方法与数学学科结构	165
5.3.8 数学解题方法与数学概念	166
5.3.9 数学解题方法与数学操作	166
5.3.10 数学解题方法与一般科学方法	167
5.3.11 数学通用解题方法与数学解题技巧	167
5.3.12 数学基本解题方法与数学通用解法	168
5.4 解数学题的基本方法简介	169
5.4.1 公理化与数学结构型方法	169
5.4.2 符号化与变元表示型方法	188
5.4.3 集合论型方法	201
5.4.4 对应型方法	210
5.4.5 系统与统计型方法	221
5.4.6 化归与辩证型方法	238
5.5 精彩解法来自不断地疑问、优化与改进、探究	259
5.6 一题多解的升华认识	263
5.6.1 对一题多解的初步认识	263
5.6.2 对一题多解的升华认识	267

目 录

CONTENTS

第六章 数学解题思路

6.1 几类平面几何问题的求解思路	272
6.1.1 线段、角的相等	272
6.1.2 平行与垂直	275
6.1.3 线段或角的和差倍分关系	278
6.1.4 线段的比例、乘积、平方关系	280
6.1.5 共线点与共点线	281
6.1.6 点共圆与共点圆	284
6.1.7 定值问题	286
6.2 几类代数问题的求解思路	287
6.2.1 恒等式的证明	287
6.2.2 不等式的证明	290



目录

CONTENTS

6.2.3 函数求值或值域	294
6.2.4 特殊数列的通项公式、前 n 项和的求解	297
6.2.5 复数问题的求解	299
6.3 平面解析几何问题的求解思路	300
6.3.1 平面解析几何问题的证明	300
6.3.2 曲线过定点的问题	302
6.4 立体几何问题的求解思路	305

第七章 几类特殊题型及求解

7.1 数学开放性问题及其求解	307
7.1.1 数学开放性问题的类型及形式	307
7.1.2 数学开放性问题的求解思路	308
7.1.3 数学开放性问题的求解策略	312
7.2 数学应用性问题及其发掘与选编	315
7.2.1 数学应用性问题的发掘、选编原则	316
7.2.2 数学应用性问题的发掘、选编途径	316
7.3 数学选择题及求解	318
7.3.1 数学选择题的结构	318
7.3.2 数学选择题的分类	319
7.3.3 数学选择题的解答思路	319
7.3.4 单一型选择题的几种常用解法	320
7.3.5 数学选择题的编制及其编制原则	324
7.4 数学填空题的求解与答题要求	325
7.4.1 数学填空题的求解方略	325
7.4.2 数学填空题的答题要求	327

第八章 数学错题校正及数学题错解辨析

8.1 数学错题及其校正	328
8.1.1 题意不明确	328
8.1.2 条件不充分	328
8.1.3 条件不相容	329
8.1.4 条件有剩余	330
8.1.5 结论不明确	331
8.1.6 结论不成立	331
8.1.7 “两性”不具有	332
8.1.8 附图有错误	333
8.2 数学题错解辨析	333
8.2.1 知识性错误	334
8.2.2 逻辑性错误	336
8.2.3 心理性错误	339
8.2.4 策略性错误	344
参考文献	347

第一章 数学解题意义

为什么要解题？什么是解题？由这些问题来引导我们探讨解题意义。

1.1 为什么要解题？

从数学在科学起源及发展中的巨大作用来看，重大数学问题的解决，使得科学堡垒一个又一个地被攻克，加速了社会的发展，造就了人类的高度文明。

科学史表明，许多在某个学科领域做出卓越贡献的人，往往在早期就崭露头角，其重要标志之一，就是具有优异的数学才能，善于解决纯数学问题和数学应用问题。

从数学学科的教育与学习来看，也就是说从掌握数学来看，著名的美国数学家和教育家 G. 波利亚指出：“掌握数学意味着什么？这就是说善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发现创造的题。”^①

数学解题的意义由此可见一斑。

波利亚认为，任何学问都包括知识和能力这两个方面。对于数学，能力比起知识来说，要重要得多。那么在数学学科中，能力指的是什么？波利亚说：“这就是解决问题的才智——我们这里所指的问题，不仅仅是寻常的，它们还要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造精神。”在日常解题和攻克难题而获得数学上的重大发现之间，并没有不可逾越的鸿沟。“一个重大的发现可以解决一些重大的问题，但在求解任何问题的过程中，也都会有点滴的发现。一个有意义的题目的求解，为解此题所花的努力和由此得到的见解，可以打开通向一门新的科学，甚至通向一个科学新纪元的门户。”要想有重大的数学发现，就必须重视平时的解题，因为平时的解题和数学发现之间，只有难易程度上的差别，在本质上是完全一样的。“你要求解的问题可能不大，但如果它能引起你的好奇心，它能使你的创造才能得以展现，而且，你是用自己的方法去解决它们的，那么，你就会体验到这种紧张心情，并享受发现的喜悦。在易塑的青少年时期，这样的体验会使你养成善于思考的习惯，并在心中留下深刻的印象，甚至会影响你一生的性格。”因此，波利亚提出：“中学数学教学的首要任务就是加强解题的训练。”当然这里的“解题”不同于“题海战术”。他认为，一个数学教师，如果“把分配给他的时间塞满了例行运算来训练他的学生，他就扼杀了学生的兴趣，妨碍了他们的智力发展……”。因此他主张，与其穷于应付烦琐的教学内容和过量的题目，还不如选择一个有意义但又不太复杂的题目去帮助学生深入发掘题目的各个侧面，使学生通过这道题目，就如同通过一道大门而进入一个崭新的天地。比如，“证明 $\sqrt{2}$ 是无理数”和“证明素数有无穷多个”就是这样的好题目，前者通向实数的精确概念，后者通向数论的门户，打开数学发现大门的金钥匙往往就在这类好题目之中。

① 波利亚 G. 数学的发现[M]. 欧阳绛, 译. 北京: 科学出版社, 1982.

波利亚把“解题”作为培养学生的数学才能和教会他们思考的一种手段和途径,这种思想得到了国际数学教育界的广泛赞同,1976年国际数学管理委员会把解题能力列为十项基本技能的首位。

我国广大数学工作者也逐渐认识到,应将解题教学置于数学教学的中心地位,认为这由数学教学的目的及解题本身的意义所决定。数学教学的目的在于,使学生在数学知识、数学能力、数学素质(包括情感、意志、态度等非智力因素)等方面都得到充分的发展,以促进良好品格结构的形成。而解题教学正是达到上述目标的最好手段,解题对建立和发展数学知识结构、形成和增进数学思维能力、培养和造就创造精神等方面起着不可取代的重要作用。解数学题是学习数学的主要形式,是学习数学课程的一个“实践性”环节。通过解题可以使学习者独立地、积极地进行认知活动,深入地理解数学概念,全面系统地掌握数学基础知识,实际地学习数学的本质、精神、思想,切实地掌握解数学题的方法的基本技能和技巧。例如:善于运用某种方法、手段改变数学问题的情形;善于构想新的解题手段和解题思路;善于区分和积累可能有资的资料;善于在原有题目和解法的基础上,联想构造出新的问题和解题方法;善于自我测验以及对解题进行讨论等,从而有效地培养运算求解能力、推理论证能力、空间想象能力、抽象概括能力、数据处理能力等,以形成运用数学知识来分析和解决社会生活、经济建设和科学技术中的实际问题的能力,以便适应现代化生产的多样性和变化性,从事创造性劳动。

数学教学中的解题,服务于数学教学总目标,这就像数学家的研究工作一样,有时也不完全把找到答案作为目的,而是作为一种工作手段——不断地探究。众所周知,当一个猜想尚未解决时,就像一台发动机在高效运转,它极大地刺激了数学方法的发明和数学分支的创立,其价值有时远远超过猜想的解决本身。数学解题教学,在许多时候是一种训练手段。因为这种训练的意义至少有如下几个:

- (1)知识理解的巩固性意义。
- (2)能力培养的发展性意义。
- (3)思想教育的陶冶性意义。

这些意义不是做一两道习题就能体现的,但做每一道习题都应该力求有所体现。

这些意义与整个数学教学的意义是一致的,因此,解题训练要与基础理论的学习结合起来,融知识的应用过程与知识的发生过程于一体。

这种意义观要求我们重视解题中的思维过程,重视解题在发展学习者的思维、培养学习者的能力、促进学习者良好品质结构方面的作用。在解题中,数学的提炼、准确和严谨,有利于培养严密的逻辑思维能力;数学的抽象性可以培养学习者的抽象思维能力;数学的广泛应用可以培养学习者理论联系实际、分析问题和解决问题的能力,这一切又都有助于学习者养成科学的思维习惯。

这种意义观还要求我们注重数学文化的教养价值,注重数学发现中的美学因素(参见本套丛书中的《数学欣赏拾趣》第五章),把数学素质的培养放在首位。数学的精神、思想和方法是人类文化宝库的重要构成,它不仅是数学家的基本修养,也是各行各业创造性劳动的文化基础(大众数学)。的确,数学解题训练有利于知识的理解和巩固,有利于能力的培养和

发展,但这两者都还有更深一层的意义——把人的思维潜能充分开发出来.所以说,数学是思维的体操,学习数学就是要让人变得更加聪明,解题训练就是开发数学智慧的过程.

明确解题意义,就不会仅仅满足于求出答案,而能够使广大师生从分数的沉重压力下解放出来.当问题还没有解出来时,我们能够坚韧不拔、锲而不舍,当答案已经找到时,我们能够从解题过程中自觉汲取营养,并饶有兴趣地进行新的探索:解题中用到了哪些知识?它们是怎样联系起来的?解题的关键在哪里?思路是怎样打通的?推理是否严谨?思维有无多余回路?还有别的解法吗?还有更简捷的解法吗?这种解法能用于其他问题吗?这个问题能够推广吗?改变一下条件如何?改变一下结论如何?……当你的思想已沉浸在无边的探索时,你也就从解题中获得了崇高的享受,并接受了数学文化的熏陶.

解题历来受到世界各国的重视.例如,我国数学教育界对解题极为重视,并认为是中国学生的特长之一.《普通高中数学课程标准(实验)》中明确提出,数学课程的目标之一是“提高数学的提出、分析和解决问题(包括简单的实际问题)的能力,数学表达和交流的能力,发展独立获取数学知识的能力”.同样,美国数学教育界也十分重视数学问题解决.《美国学校数学教育的原则与标准》(NCTM,2000)把数学问题解决作为各年级数学课程的重要组成部分,提出通过问题解决掌握新的数学知识,解决在数学及其他情境中出现的问题,采用各种恰当的策略解决问题,检验和反思数学问题解决的过程.全美州长协会(NGA)和各州教育长官理事会(CCSSO)共同推出的《美国数学课程州际共同核心标准》(CCSSM,2010)中,把“理解问题并解决问题”作为八大实践目标的首要目标.可以看出,解题成为学校数学教学的焦点,受到世界各国的广泛重视.

显然,作为一个数学工作者,每日每时都离不开解题.因而罗增儒教授也提出了如下的观点:^①

解题是数学工作者数学活动的基本形式.

解题是数学工作者数学活动的主要内容.

解题是数学工作者的一个存在目的.

解题是数学工作者的一个兴奋中心.

1.2 什么是题?什么是数学题?

什么是“题”?这与我们常说的“命题”“例题”“习题”“问题”等又有什么联系呢?这里的“题”是一种有特定含义的概念.

首先,作为一个题,是一种条目性的语句,而且这个语句应该是具有完整意义的.其次,它与普通谈话间的问题又有所不同,普通的问题常借助于口语形象表达,而题总是以书面的形式加以显现.再次,题又与普通的谈话间的问题有所联系,既是对后者经过一定的抽象加工而成的,具有鲜明的学科特点,又通过以往的知识经验加以描述.因此,可以说,题是对现

^① 罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社,1997:86,5.

实问题,通过抽象手段,借助已有的知识和经验加以文字描述而形成的具有完整意义的条目.^①

题在数学中的地位体现可以归结为三点:(1)题是数学知识、方法介绍及引入的起点;(2)题是数学知识与方法迁移的载体;(3)题是数学知识和方法巩固及应用的最终落点.在整个数学教育中,可以说每时每刻都离不开题.

从表现形式上看,一个题由题干陈述及问题两部分组成,这是一个公认的常识.

从内容上看,一个题由立意、情景、设问三方面组成,但各自含义如何,目前还处于经验性陈述阶段,不过这些可以通过大量题的分析使之明确化.题的立意,即题的目的,是指题要反映的知识内容及解答该题所用的知识、方法,反映着与解答者一致或贴近,是立意最基本的要求;题的情景是指题的材料和介质,亦即题的描述、呈现方式,它可以是纯文本的描述,也可以含有表格、图示,还可以是一个实际问题、经验性的知识或问题;题的设问是指问题的方式及内容,从方式上说,所问(或所证)明确者称为封闭式设问,否则称为开放式设问,而从内容上来看,一个题一般要考虑两点:一是设问的方向,如由 A_1, A_2, A_3 求(或证) B 还是由 A_1, A_2, B 求(或证) A_3 ,等等,二是设问的跨度与层次,跨度越大,解答题的难度一般也越大,跨度合理是设问内容的永远追求.

从而在数学中,我们谈论题,主要是谈论数学题.

数学题从提供给我们的信息情形来看,有多种信息.我们可以看到:一道待求解的题,由四部分组成,这就是:条件(Y)、目标(O)、运算(Z)、依据(P),或者说由四类信息组成:条件信息、目标信息、运算信息、依据信息.

对于数学问题,我们还需认识它的如下特征:

(1) 数学问题的形式化特征.

数学问题的产生源于人类的社会实践,即生产、生活和科研活动的需要.将实际问题变成数学问题后,都抽去了对象的物质性,变成了抽象的形式,即纯粹形式化的问题.著名的哥尼斯堡七桥问题,最初并不是一个数学问题,当欧拉把它抽象成“一笔画”问题时,它就被形式化了,从而变成了一个数学问题.数学问题的形式化特征,使得问题对象的物质性被抽去,只保留了数学所关心的本质属性,这样就有利于数学概念、命题的形成,为研究数学和学习数学提供了便利,更加有利于我们理解和认识数学知识.但是,了解形式化问题的获得过程,也是很重要的.形成形式化的数学问题,就是为实际问题建立适当的数学模型.因此,我们在解决数学问题时,不但要解那种纯粹形式化的数学问题,还要解一些带有物质背景的实际问题,学会为实际问题建立数学模型.

(2) 数学问题内涵的广义性特征.

数学问题对于学习者与研究者来说有较大的差异,即有练习型问题与研究型问题的差异.从广义角度来看它们都是数学问题.

练习型的题具有教学性,它的答案为数学家或教师所已知,它成为问题仅相对于教学或学生而言,包括一个待计算的答案、一个待证明的结论、一个待做出的图形、一个待判断的命

① 王明山.题的理论进展探究[J].数学通报,2011(1):42.