俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume V(2))

斯米尔诺夫高等数学

（第五卷·第二分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫　著　　斯米尔诺夫高等数学编译组　译

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume V(2))

(第五卷·第二分册)

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内容简介

本书共分两章：度量空间与赋范空间，希尔伯特空间. 理论部分叙述扼要，应用部分叙述详尽，可供数学系高年级学生，高等学校数学教师以及其他需要泛函分析知识的科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第五卷. 第二分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 3

ISBN 978－7－5603－6585－5

Ⅰ. ①斯…　Ⅱ. ①斯…　②斯…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088392 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

В. И. Смирнов《Курс высшей математики》

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 22.5　字数 429 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6585－5
定　　价　68.00 元

目录

度量空间与赋范空间

第四章

84. 度量空间

在这一章开始我们先叙述抽象空间的理论，然后再介绍这些理论对各种具体空间（其中主要是函数空间，即某一类型函数的集合）的应用. 同一个抽象空间可以有多种不同的具体实现，因此研究抽象空间的理论是适宜的.

任一抽象空间都是满足若干公理的非空集合. 集合中元的性质是不加规定的，任一抽象空间的理论只是确定该空间的那些公理的推论. 为使叙述连贯起见，我们先专门介绍抽象空间的理论，而把这种理论在抽象空间做各种具体实现时的应用放在最末. 首先我们来介绍度量空间的理论.

集合 X（它的元我们用字母 x,y,z 等表示）叫作度量空间，是指其中任一对元 x 与 y 有一个非负数 $\rho(x,y)$（x 与 y 间的距离）与之对应，并且满足以下条件：

1. $\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$（即 x 与 y 是同一个元）时等号成立；

2. 对称公理

$$\rho(y,x)=\rho(x,y) \tag{1}$$

3. 三角形公理

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z) \tag{2}$$

对于任意元 $x,y,z\in X$，以上条件都必须成立. 若 y_1，$y_2,\cdots,y_m$ 是 X 中的元，则重复应用(2)可得

$$\rho(y_1,y_m)\leqslant\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_3)+\cdots+\rho(y_{m-1},y_m) \tag{2'}$$

设 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是元的某一无穷序列，并且存在元 x_0，使 $n\to\infty$ 时 $\rho(x_0,x_n)\to 0$. 因此，x_0 叫作序列 x_n 的极限，并写作 $x_n\Rightarrow x_0$ 或 $\lim x_n=x_0$. 不难看出，序列不能有多于一个的极限. 事实上，假设 $x_n\Rightarrow x_0$ 与 $x_n\Rightarrow y_0$，我们需证明 $x_0=y_0$. 依(2) 有

$$\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)$$

当 n 无限增大时，不等式右端趋于 0，取极限则得 $\rho(x_0,y_0)\leqslant 0$. 但 $\rho(x_0,y_0)\geqslant 0$，由这两个不等式可得 $\rho(x_0,y_0)=0$，即 $x_0=y_0$. 显然，若 $x_n\Rightarrow x_0$，则它的任一无穷子序列 $x_{n_k}\Rightarrow x_0$.

现在证明 $\rho(x,y)$ 是 x 与 y 的连续函数，即若 $x_n\Rightarrow x_0$ 及 $y_n\Rightarrow y_0$，则 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)$.

由(2′) 可得

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y_n)$$
$$\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_0)$$

由此

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_0,y_n)$$
$$\rho(x_0,y_0)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(y_n,y_0)$$

即

$$|\rho(x_0,y_0)-\rho(x_n,y_n)|\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(y_n,y_0)$$

当 $n\to\infty$ 时右端趋于零，由此推得 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)$.

若序列 x_n 有极限($x_n\Rightarrow x_0$)，则对任一给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $m,n\geqslant N$ 时

$$\rho(x_m,x_n)\leqslant\varepsilon \tag{3}$$

这可由不等式 $\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_m,x_0)+\rho(x_0,x_n)$ 立即推得，因其右端当 $m,n\to\infty$ 时趋于零. 但是，根据所采用的公理，由(3) 不能推得序列 x_n 有极限(柯西极限存在判别法的充分性在此不成立). 若引入补充条件，使得由(3) 可推出序列 x_n 有极限，则这样的度量空间叫作完备的.

设 U 是度量空间中元的某个集合. 若存在元 x_0 与正数 A，使对于 U 中任一元 x 有 $\rho(x_0,x)\leqslant A$，则称 U 是有界的. 设 x_1 是任一异于 x_0 的固定元，我们有

$$\rho(x_1,x)\leqslant\rho(x_1,x_0)+\rho(x_0,x)$$

于是对 U 中的元 x 得 $\rho(x_1,x)\leqslant\rho(x_1,x_0)+A$，而这个不等式的右端是一个正数. 因此，集合 U 的有界性定义与元 x_0 的选择无关. 不难证明，若序列 x_n 有极限，则元 x_n 的集合是有界的.

元 x_0 叫作 X 中元的集合 U 的极限元，如果存在 U 中的序列 x_n 使 $x_n\Rightarrow x_0$. 若集合 U 包含其所有极限元，这个集合 U 叫作闭的. 若 U 非闭，我们把它的所有极限元添加进去所得的新集合是闭集[31]，并记为 $\overline{U}$. 由 U 变到 $\overline{U}$ 的过程叫作

集合 U 的封闭.若 U 为闭集,则 $\overline{U}=U$.若 U 是空集(不含任何元),则 $\overline{U}$ 应看作空集.满足条件 $\rho(x_0,x)<R$(这里 x_0 是固定元,R 是正数)的元的集合叫作以 x_0 为中心、R 为半径的开球,而当 $\rho(x_0,x)\leqslant R$ 时叫作闭球.

利用 $\rho(x_0,x)$ 是 x 的连续函数这一事实,不难证明上面所定义的闭球是一个闭集.

我们指出,X 中的每个非空集合 U,如果对于 U 中的元来说,$\rho(x,y)$ 的定义仍和在 X 中的一样,那么 U 也是度量空间.空间 X 中的元的个数可以是有穷的.

设有两个度量空间 X 与 X',并设它们的元之间可以建立这样的一一对应关系,使 $\rho(x,y)=\rho(x',y')$(这里 x 与 x' 及 y 与 y' 是 X 和 X' 的任意两对对应元).这时我们称 X 与 X' 是等距的.从抽象理论观点来看,等距的空间是没有区别的.

85. 度量空间的完备化

X 中元的序列 x_n 叫作基本的(或自己收敛的),是指它满足条件(3).若 X 不是完备空间,则它的基本序列不全有极限.下面要证明,这时可给空间添进新的元(有时称作"理想元"),使得在相应推广的距离概念之下,所得空间是完备的.

先证明一个辅助定理:

辅助定理 若 x_n 与 y_n 是两个基本序列,则数列 $\rho(x_n,y_n)$ 有极限.

由(2′)得

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n)$$

因此

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n)$$

交换下标 m 与 n 并利用(1),可得

$$\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n)$$

由这两个不等式推出

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n)$$

当 m 和 n 无限增大时,上式右端趋于零,因此数列 $\rho(x_n,y_n)$ 满足极限存在的柯西判定法,这就是所要证明的.

我们将所有基本序列分类:把满足 $\rho(x_n,x'_n)\to 0$ 的基本序列 x_n 与 x'_n 列入同一类.若 x'_n 与 x''_n 都和 x_n 属于同一类,则 x'_n 与 x''_n 属于同一类,因从 $\rho(x_n,x'_n)\to 0$ 与 $\rho(x_n,x''_n)\to 0$ 以及(2)可知 $\rho(x'_n,x''_n)\to 0$.对于不同类中的序列 x_n 与 y_n,$\rho(x_n,y_n)$ 的极限是异于零的正数.由(2)还可推出,若序列 x_n 在 X 中有极限 x_0,则同一类中的任一其他序列 x'_n 也收敛并有同一极限 x_0.由距离的连续性可知,出现在不同类中的序列不可能有同一极限.这样,所述的基本

序列类就分为两种.先谈第一种的类.设 x_0 是 X 中的某一元,那么存在一个以 x_0 为极限的基本序列的类.例如,所有的元都是 x_0 的序列 x_n 就属于这个类.对于任一 x_0,都存在这种序列类.第二种的类是由在 X 中没有极限的基本序列所组成的.若 X 是完备的,则第二种序列类不存在.设 X 不是完备空间.现在我们构造一个新的度量空间 $\widetilde{X}$,它的元是上述 X 的基本序列的类.在 $\widetilde{X}$ 中还应引入距离并检验它是否具有度量空间中距离的三个性质.设 $\widetilde{x}$ 与 $\widetilde{y}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的两个元.我们从这两个元的相应序列类中各任取序列 x_n 及 y_n,并用以下公式定义 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$,即

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n) \tag{4}$$

现证明非负数 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 与在 $\widetilde{x}$ 及 $\widetilde{y}$ 的相应类中如何选择序列 x_n 和 y_n 无关.设 x'_n 与 y'_n 是分别属于两类的任意序列,并且 $\rho'(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n)$.需证 $\rho'(\widetilde{x},\widetilde{y})=\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$.由(2′)知

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x'_n)+\rho(x'_n,y'_n)+\rho(y'_n,y_n)$$

注意 $\rho(x_n,x'_n)\to 0$ 与 $\rho(y'_n,y_n)\to 0$,并在上面的不等式中取极限,即得 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})\leqslant\rho'(\widetilde{x},\widetilde{y})$.同理可得 $\rho'(\widetilde{x},\widetilde{y})\leqslant\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$,因此 $\rho'(\widetilde{x},\widetilde{y})=\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$.于是,式(4)所定义的距离 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 是唯一确定的.现在来证明它具有距离的三个基本性质.$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})\geqslant 0$ 是显然的.

1) 设 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=0$,即 $\rho(x_n,y_n)\to 0$.由此推出序列 x_n 与 y_n 属于同一类,即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

2) $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=\rho(\widetilde{y},\widetilde{x})$,由 $\rho(x_n,y_n)=\rho(y_n,x_n)$ 即得.

3) 在与 $\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}$ 相应的类中各取序列 x_n,y_n,z_n,可得

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{z})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,z_n)]=\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})+\rho(\widetilde{y},\widetilde{z})$$

设 $\widetilde{x}$ 是 $\widetilde{X}$ 中相应于第一种序列类的元,且 x_0 是这个序列类中序列的极限.我们可把 $\widetilde{X}$ 中这样的 $\widetilde{x}$ 和 X 中的元 x_0 看作等同的.$\widetilde{X}$ 中所有与第二种序列类相应的元 $\widetilde{x}$ 在 X 中找不到等同元.若 $\widetilde{x}$ 与 $\widetilde{y}$ 是和第一种序列类相应的元,而 x_0 与 y_0 是和它们等同的 X 中的元,则在(4)中对于任一 n 可令 $x_n=x_0$ 与 $y_n=y_0$,因此

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_0,y_0)=\rho(x_0,y_0)$$

即对 X 中的元这个新定义的距离与原来的距离相同.若元 $\widetilde{x}$ 是 $\widetilde{X}$ 中与第一种序列类相应的元(x_0 是 X 中的等同元),而 $\widetilde{y}$ 是 $\widetilde{X}$ 中与第二种序列类相应的元,则式(4)给出

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_0,y_n)$$

还要证明,若 x_n 是定义元 $\widetilde{x}$ 的类中的序列,则当 $n\to\infty$ 时 $\rho(\widetilde{x},x_n)\to 0$.

依定义，$\rho(\widetilde{x},x_n)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m,x_n)$. 由于 x_n 是基本序列，故(3)成立，因此当 $n\geqslant N$ 时 $\rho(\widetilde{x},x_n)\leqslant\varepsilon$，即当 $n\to\infty$ 时 $\rho(\widetilde{x},x_n)\to 0$.

现证 X 在 $\widetilde{X}$ 中稠密，即若 $\widetilde{x}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的任一元，ε 是任给的正数，则有 X 中的元 x 使 $\rho(\widetilde{x},x)\leqslant\varepsilon$. 若 $\widetilde{x}$ 与第一种序列类相应，而 x_0 是它在 X 中的等同元，则对任一 $\varepsilon>0$，取 $x=x_0$ 即满足要求，因为 $\rho(\widetilde{x},x_0)=\rho(x_0,x_0)=0$. 设 $\widetilde{x}$ 与第二种序列类相应，x_n 是这一序列类中的基本序列. 我们固定这样的 m，使当 $n\geqslant m$ 时 $\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon$，并证明可取 $x=x_m$. 事实上，$\rho(\widetilde{x},x_m)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_m)$，由于当 $n\geqslant m$ 时 $\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon$，故得 $\rho(\widetilde{x},x_m)\leqslant\varepsilon$.

现再证明 $\widetilde{X}$ 是完备空间. 设 $\widetilde{x}_n$ 是 $\widetilde{X}$ 中的基本序列，即当 $n,m\geqslant N$ 时 $\rho(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)\leqslant\varepsilon$. 应证明在 $\widetilde{X}$ 中存在元 $\widetilde{x}$ 使当 $n\to\infty$ 时 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}_n)\to 0$. 由前面的证明可知，对任意的 n，在 X 中存在元 x_n 使 $\rho(\widetilde{x}_n,x_n)\leqslant\frac{1}{n}$. 不难看出，$X$ 中元 x_n 的序列是基本序列，因为

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,\widetilde{x}_n)+\rho(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)+\rho(\widetilde{x}_m,x_m)\leqslant$$
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\rho(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)$$

序列 x_n 属于某个 —— 定义 $\widetilde{X}$ 中某一元 $\widetilde{x}$ 的 —— 序列类. 我们证明 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}_n)\to 0$. 这可由不等式

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}_n)\leqslant\rho(\widetilde{x},x_n)+\rho(x_n,\widetilde{x}_n)\leqslant\rho(\widetilde{x},x_n)+\frac{1}{n}$$

及 $\rho(\widetilde{x},x_n)\to 0$(已于上面得证)推出. $\widetilde{X}$ 的完备性得证.

定理 1 X 在其中稠密的 X 的完备化空间，除等距的不计外是唯一的.

设 Y 是 X 在其中稠密的完备度量空间. 我们需要证明 Y 与 $\widetilde{X}$ 等距. 于此自然假定，属于 X 的 Y 中两个元间的距离与在 X 中的距离相同. 设 y 是 Y 中某一元. 因 X 在 Y 中稠密，故存在 X 中元的序列 x_n 使其在 Y 中满足 $\rho(y,x_n)\to 0$，因此 x_n 是 Y 中的也是 X 中的基本序列. 这个序列与 $\widetilde{X}$ 中的一个确定元 $\widetilde{x}$ 对应. 易见 $\widetilde{x}$ 与 x_n 的选择无关，只要 $\rho(y,x_n)\to 0$ 即可. 我们使 $\widetilde{x}$ 与所述 Y 中的元 y 对应. 现设我们有 $\widetilde{X}$ 中的一个元 $\widetilde{x}'$. 取 X 中定义 $\widetilde{x}'$ 的任一序列 x'_n，它是完备空间 Y 的基本序列，因此决定 Y 中的一个元 y'. 易知 y' 与序列 x'_n 的选择无关，只要它是确定 $\widetilde{x}'$ 的序列即可. 我们使 y' 与 $\widetilde{x}'$ 对应，这样就不难看出，我们建立了 Y 与 $\widetilde{X}$ 的元之间的一一对应. 尚需证明的是 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}')=\rho(y,y')$.

这由在 $\widetilde{X}$ 中 $\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}')$ 的定义以及在 Y 中距离的连续性推出

$$\rho(\widetilde{x},\widetilde{x}')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=\rho(y,y')$$

我们之所以要详细地叙述度量空间的完备化问题，是由于在度量空间理论的应用上这种方法具有重大的作用，并由此我们可限于讨论完备空间. 下面介

绍三个简单的例子.

1) 设 X 是由所有实有理数 $x,y,z,\cdots$ 所组成的空间,并且距离由公式 $\rho(x,y)=|x-y|$ 定义. 显然,$\rho(x,y)$ 满足度量空间定义中距离的三个条件. 取实有理数的一个基本序列 x_n. 根据柯西判定法,它应有实数极限,不过若极限是一个无理数,则序列 x_n 在 X 中就无极限,因此 X 并不完备. X 的完备化是引入所有无理数,所以所有实数构成的空间 $\widetilde{X}$ 是完备的.

2) 考察由所有在有穷区间$[a,b]$上连续的实函数 $x(t),y(t),z(t),\cdots$ 所组成的空间 C,并用下式定义距离 $\rho(x,y)$[14],即

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

不难验证 $\rho(x,y)$ 的这种定义是容许的. 这时的收敛 $\rho(x,x_n)\to 0$ 即是在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一致收敛 $x_n(t)\to x(t)$,且若 $n,m\to\infty$ 时 $|x_n(t)-x_m(t)|\to 0$,则存在连续函数 $x(t)$ 使 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$[Ⅰ;144],即 C 是完备的.

3) 现研究由上例中函数所组成的空间 F,但距离改由下式定义

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

这个距离也是容许的. 在 F 中取基本序列 $x_n(t)$,当 $n,m\to\infty$ 时

$$\int_a^b|x_n(t)-x_m(t)|^2\mathrm{d}t\to 0$$

依式(5)所定义距离的意义,序列 $x_n(t)$ 有极限[56],不过极限函数可能是 L_2 中的任一函数,因为连续函数在 L_2 中是处处稠密的[60]. 若极限函数与连续函数不相抵,则这个基本序列在 F 中无极限,即空间 F 不完备. 把 L_2 中与连续函数不相抵的函数添入 F 后,可得出 F 的完备化空间,从而把 F 变成 L_2.

除单变数函数外,我们还可以讨论在 n 维空间的有界闭集上连续的 n 个变数的函数 $x(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 的集合.

我们还要指出,把具体的度量空间完备化时,重要的是要明确在完备化之后,新的元具体指些什么? 在上一例中,它们就是 L_2 中的与连续函数不相抵的函数. 又如前面所知,可以在任一可测集上考察 L_2. 我们这里之所以限于考察有界闭集这一情况,是因为我们从连续函数的空间 F 出发的.

现介绍一个对完备度量空间成立的定理. 以后,X 中以 x 为中心、r 为半径的开球用 $S(x,r)$ 表示,闭球用 $\overline{S}(x,r)$ 表示.

定理 2 设在完备度量空间 X 中有一个闭球序列 $\overline{S}(x_n,r_n)(n=1,2,\cdots)$,每一球都含于它的前一球内,且当 $n\to\infty$ 时半径 $r_n\to 0$. 那么存在唯一的点属于所有的 $\overline{S}(x_n,r_n)$.

依条件,$\overline{S}(x_{n+p},r_{n+p})\subsetneqq\overline{S}(x_n,r_n)(p>0)$,因此对任一 $p>0$ 有 $\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant 2r_n$,即序列 x_n 是基本序列,又因 X 完备,故 x_n 有极限,记之为 x_0. 取任一

固定的球 $\bar{S}(x_n,r_n)$,我们证明 $x_0\in\bar{S}(x_n,r_n)$.

事实上,根据定理的条件,以 x_0 为极限的序列 $x_n,x_{n+1},\cdots$ 中,每个元均属于 $\bar{S}(x_n,r_n)$,又因 $\bar{S}(x_n,r_n)$ 是闭集,故 $x_0\in\bar{S}(x_n,r_n)$.

现假定元 x'_0 也含于所有的 $\bar{S}(x_n,r_n)$ 中,我们证明 $x'_0=x_0$. 因 x_0 与 x'_0 都属于所有的 $\bar{S}(x_n,r_n)$,故

$$\rho(x_0,x'_0)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,x'_0)\leqslant 2r_n$$

取极限得 $\rho(x_0,x'_0)\leqslant 0$,即 $\rho(x_0,x'_0)=0$,因此 x'_0 就是 x_0. 定理得证.

再指出,完备度量空间 X 中的任一闭集 U 也是完备度量空间(于此,显然假定 x 与 y 在 U 中的距离 $\rho(x,y)$ 等于在 X 中的距离). 所述命题由以下事实立即推得:U 中每个基本序列 x_n 在 X 中有极限,因 U 是闭集,故这个极限亦在 U 中.

86. 算子与泛函,压缩映象原理

设 X 与 X' 是两个度量空间. 由 X 中的元 x 到 X' 中的一个确定元 x' 间的对应关系 $x'=Ax$ 叫作由 X 到 X' 中的算子. 算子可能不是在整个 X 上定义的. X 中对算子 A 有定义的元的集合叫作算子 A 的定义域,并记作 $D(A)$. 值 Ax 的集合用 $R(A)$ 表示,它是 X' 的元的某个集合. 若 $R(A)$ 是整个 X',则方程

$$x'=Ax\tag{6}$$

对于 X' 中的每个 x',至少有一个解. 现假定 A 确立 D 与 R 间的一个一一对应,即对 $D(A)$ 中的不同 x,由(6)得出 $R(A)$ 中的不同 x'. 这时,方程(6)对于 $R(A)$ 中的任一 x' 有 $D(A)$ 中的唯一解.

算子的一个很重要的特例是泛函. 所谓泛函,就是当 X' 是实数空间时的算子,而空间的距离用[85]中的定义 $\rho(x',y')=|x'-y'|$. 有时取 X' 为在同样距离定义下的复数空间.

我们介绍一个当 X' 与 X 重合时,判定方程 $x-Ax=0$ 有唯一解的定理.

定理(压缩映象原理) 若算子 A 把完备度量空间 X 映射到自身中,且 $D(A)=X$,并对 X 中的任意两个元 x 与 y 有

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y)\tag{7}$$

其中 α 是满足 $0<\alpha<1$ 的数,则方程 $x=Ax$ 有且只有一个解. 这个解可由任意选出的初始元 x_1 出发所组成的序列

$$x_2=Ax_1,x_3=Ax_2,x_4=Ax_3,\cdots\tag{8}$$

取极限得到.

在所考察的情形中,$D(A)=X$,$R(A)\subsetneq X$. 我们有

$$\rho(x_n,x_{n+1})=\rho(Ax_{n-1},Ax_n)\leqslant\alpha\rho(x_{n-1},x_n)$$

把这样的估值继续应用到 $\rho(x_{n-1},x_n)$ 等上面,可得

$$\rho(x_n,x_{n+1})\leqslant\alpha^{n-1}\rho(x_1,x_2)\quad(n=1,2,\cdots)$$

由此推出，当 $m > n$ 时

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant$$
$$\alpha^{n-1}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1})\rho(x_1, x_2) \leqslant \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_2)$$

注意 $\rho(x_n, x_n) = 0$ 与 $\rho(x_n, x_m) = \rho(x_m, x_n)$，可知当 n 与 $m \to \infty$ 时 $\rho(x_n, x_m) \to 0$. 由于 X 是完备的，故序列 x_n 有极限，用 x_0 记之($x_n \Rightarrow x_0$). 现证 $Ax_n \Rightarrow Ax_0$：因 $\rho(x_n, x_0) \to 0$，故

$$\rho(Ax_n, Ax_0) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_0) \to 0$$

在等式 $x_n = Ax_{n-1}$ 两端取极限得到 $x_0 = Ax_0$. 还要证明方程 $x = Ax$ 的解是唯一的. 设 x' 也是这个方程的解：$x' = Ax'$. 需证 $x' = x_0$. 因

$$\rho(x_0, x') = \rho(Ax_0, Ax') \leqslant \alpha\rho(x_0, x')$$

即 $(1-\alpha)\rho(x_0, x') = 0$，于是 $\rho(x_0, x') = 0$，所以 x' 与 x_0 相同. 定理证毕.

注　设 U 是 X 中的某闭集. 若 $D(A) = U$，$R(A) \subsetneqq U$ 且条件(7)成立($0 < \alpha < 1$)，则定理也成立，并且 $x_0 \in U$，而满足方程 $x' = Ax'$ 的 x' 与 x_0 相同. 这里假定 $x' \in U$，因为 A 是在 U 上定义的.

87. 例

在谈压缩映象原理的应用之前，先引入几个完备度量空间的例子.

1. 所有 n 个实数的有序组所构成的空间 R_n. R_n 中元 $x(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $y(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的距离定义如下

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

还可定义由 n 个复数的有序组所构成的复空间 R_n. 这时距离(9)中的 $(a_k - b_k)^2$ 应换为 $|a_k - b_k|^2$. 这一点对于以后的序列空间或函数空间的例子也是一样的.

2. 所有总体有界的无穷数列 $x(a_1, a_2, \cdots)$ 组成的空间 m，即对 m 中的每一元 x，存在正数 m_x，使对于一切 i 均有 $|a_i| \leqslant m_x$.

$\rho(x, y)$ 的定义如下

$$\rho(x, y) = \sup_k |a_k - b_k| \tag{10}$$

m 中的收敛是按坐标的收敛，并且对坐标的序号是一致的.

3. 所有无穷数列组成的空间 s，其中

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k(1 + |a_k - b_k|)} \tag{11}$$

$\rho(x, y)$ 的这个定义满足距离的三个条件，这可由下面讨论类似的函数空

间 S 所用的方法来验证[①].

与 R_n 一样,s 中的收敛也是按坐标的收敛[②].

4. 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^p <+\infty \tag{12}$$

的无穷复数序列 $x(a_1,a_2,\cdots)$ 组成的空间 $l_p(p\geqslant 1)$,并且

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{\infty} | a_k-b_k |^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

三角形公理当 $p=1$ 时显然成立,当 $p>1$ 时可由闵可夫斯基关于和的不等式[62] 推出.

5. 定义在 n 维空间 R_n 中某有界闭集 $\mathscr{E}$ 上的连续函数 $\varphi(x)$ 组成的空间 C,并且

$$\rho(\varphi,\psi)=\max_{x\in\mathscr{E}} | \varphi(x)-\psi(x) | \tag{14}$$

6. 定义在 R_n 中某可测(按勒贝格)集 $\mathscr{E}$ 上的函数 $\varphi(x)$ 组成的空间 M. 相抵的函数看作等同的,且 M 中的函数均为有界(或与有界函数相抵).

距离定义如下

$$\rho(\varphi,\psi)=\inf_{m(\mathscr{E}_0)=0}\ \sup_{\mathscr{E}-\mathscr{E}_0} | \varphi(x)-\psi(x) | \tag{15}$$

这个定义的意义是:从 $\mathscr{E}$ 中除去某个测度为零的集合 $\mathscr{E}_0$ 后,在余集 $\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$ 上取 $| \varphi(x)-\psi(x) |$ 的上确界,再取所有可能的这种 $\mathscr{E}_0$,并对所得这一切非负上确界 $\sup\limits_{\mathscr{E}-\mathscr{E}_0} | \varphi(x)-\psi(x) |$ 的集合取下确界. 有时把(15) 写作

$$\rho(\varphi,\psi)=\operatorname{vrai}\ \max | \varphi(x)-\psi(x) | \tag{16}$$

若 $\mathscr{E}$ 是有界闭集,则 C 是 M 的一部分且 C 上的 $\rho(\varphi,\psi)$ 与 M 上的相同,即 C 与 M 的一部分等距.

7. 定义在 R_n 中具有有穷测度的可测集 $\mathscr{E}$ 上的函数 $\varphi(x)$ 组成的空间 S,并且

$$\rho(\varphi,\psi)=\int \frac{| \varphi(x)-\psi(x) |}{1+| \varphi(x)-\psi(x) |}\mathrm{d}x \tag{17}$$

这里以及下面所涉及的测度与勒贝格积分都是对 R_n 而言的.

8. 空间 $L_p(\mathscr{E})(p\geqslant 1)$,它由定义在可测集 $\mathscr{E}$ 上并满足

$$\int_{\mathscr{E}} | \varphi(x) |^p \mathrm{d}x <+\infty$$

---

① 可参考刘斯铁尔尼克与索伯列夫合著的《泛函数分析概要》,杨从仁译,科学出版社出版.——译者注

② 对坐标的序号来说,这个收敛一般是不一致的.——译者注

的函数 $\varphi(x)$ 所组成,并且

$$\rho(\varphi,\psi)=\left[\int_{\mathscr{E}}|\varphi(x)-\psi(x)|^{p}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \tag{18}$$

$\rho(\varphi,\psi)$ 满足度量空间的公理[62].

9. 空间 $V[a,b]$,它由在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上囿变的、在区间的内点右连续而当 $x=a$ 时取零值的函数 $\varphi(x)$ 所组成,并且

$$\rho(\varphi,\psi)=\overset{b}{\underset{a}{V}}|\varphi(x)-\psi(x)| \tag{19}$$

若放弃条件 $\varphi(a)=0$,则 $\rho(\varphi,\psi)$ 定义如下

$$\rho(\varphi,\psi)=|\varphi(a)-\psi(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}|\varphi(x)-\psi(x)| \tag{20}$$

这时空间被扩大了,且原来空间与扩大后空间中的一部分等距.

所有上述的空间都是完备的.

关于 L_p 与 l_p 的完备性已证明过,其余空间的完备性证明不难,我们不引进这些证明.

我们较详细地来讨论空间 S. 注意 $\omega(t)=\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}$ 是当 $t\geqslant 0$ 时的增函数,且

$$\frac{|t+\tau|}{1+|t+\tau|}\leqslant\frac{|t|+|\tau|}{1+|t|+|\tau|}\leqslant\frac{|t|}{1+|t|}+\frac{|\tau|}{1+|\tau|}$$

由此推出三角形公理对 S 成立. 现在证明 S 中的收敛等效于依测度收敛.

设 $\varphi_n(x)$ 在 $\mathscr{E}$ 上依测度收敛于 $\varphi(x)$. 我们证明 $\rho(\varphi,\varphi_n)\to 0$. 引入集合 $\mathscr{E}_n(\delta)=\mathscr{E}[|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\geqslant\delta]$. 依条件,对于任意固定的 $\delta>0$,当 $n\to\infty$ 时,$m[\mathscr{E}_n(\delta)]\to 0$. 我们有

$$\rho(\varphi,\varphi_n)=\int_{\mathscr{E}}\frac{|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}{1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_{\mathscr{E}_n(\delta)}1\mathrm{d}x+\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}_n(\delta)}\frac{|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}{1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}\mathrm{d}x$$

由此,并注意 $\omega(t)$ 是增函数以及在集合 $\mathscr{E}-\mathscr{E}_n(\delta)$ 上 $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\delta$,即得

$$\rho(\varphi,\varphi_n)\leqslant m[\mathscr{E}_n(\delta)]+\frac{\delta}{1+\delta}m(\mathscr{E})$$

设已给正数 ε,可确定一个 $\delta>0$,使 $\dfrac{\delta}{1+\delta}m(\mathscr{E})\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 此外存在 N,使当 $n\geqslant N$ 时 $m[\mathscr{E}_n(\delta)]\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$,因此当 $n\geqslant N$ 时 $\rho(\varphi,\varphi_n)\leqslant\varepsilon$,即 $\rho(\varphi,\varphi_n)\to 0$. 现设 $\rho(\varphi,\varphi_n)\to 0$,我们证明 $\varphi_n(x)$ 在 $\mathscr{E}$ 上依测度收敛于 $\varphi(x)$. 根据上面所述的 $\omega(t)$

的性质,若 $x \in \mathscr{E}_n(\delta)$,则

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|:[1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|] \geqslant \delta:(1+\delta)$$

这样就有

$$\rho(\varphi,\varphi_n) \geqslant \int\limits_{\mathscr{E}_n(\delta)} \frac{\delta}{1+\delta}\mathrm{d}x = \frac{\delta}{1+\delta}m[\mathscr{E}_n(\delta)]$$

其中 $\delta > 0$ 看作是固定的. 由条件 $\rho(\varphi,\varphi_n) \to 0$ 以及上一个不等式,推出 $m[\mathscr{E}_n(\delta)] \to 0$,此即所要证明的.

利用[44]的定理与上文所证,可以断定,若在 S 中 $\rho(\varphi,\varphi_n) \to 0$,则存在子序列 $\varphi_{n_k}(x)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收敛于 $\varphi(x)$. S 的完备性可如 L_2 那样得证.

作函数空间 L_p,M 及 S 时,我们也可采用勒贝格－斯蒂尔切斯测度与积分.

88. 压缩映象原理的应用举例

1. 考察含 n 个未知数的 n 个方程的方程组

$$\xi_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k + b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{21}$$

这里的 λ 是数值参数. 我们把方程组的右端看作是对整个 R_n 中的元 $x(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 定义的由 R_n 到 R_n 的算子 Ax. 由柯西不等式得

$$\rho(Ax,Ay) \leqslant |\lambda| \left[\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \rho(x,y)$$

因此,若

$$|\lambda| < \left[\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

则在 R_n 中可应用压缩映象原理.

2. 考察无穷方程组

$$\xi_i = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k + b_i \quad (i=1,2,\cdots) \tag{22}$$

并且我们把序列 $(b_1,b_2,\cdots)$ 看作是空间 m 的元. 若

$$\sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = c$$

是一个有限的正数,则(22)的右端是在整个 m 上定义的由 m 到 m 的算子 A,因此,只要 $|\lambda| c < 1$,压缩映象原理是适用的. 若 $(b_1,b_2,\cdots)$ 是 l_2 的元且

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = d < +\infty$$

则(22)的右端是在整个 l_2 上定义的从 l_2 到 l_2 的算子 A,且若 $|\lambda| d < 1$,则压缩映象原理是适用的. 我们注意,在所述的这些空间中解的唯一性是成立的,但

可能有不属于这些空间的解[①].

3. 考察积分方程(一维情形)

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{23}$$

其中$[a,b]$是有穷区间,而$K(x,t)$在正方形$Q[a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant t\leqslant b]$上连续.若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则(23)的右端是在整个$C$上定义的$C[a,b]$到$C[a,b]$中的算子,因此对方程(23)可应用压缩映象原理,只要

$$|\lambda|\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b|K(x,t)|\mathrm{d}t<1$$

若在Q上$K(x,t)\in L_2$,在$[a,b]$上$f(x)\in L_2$(在所述情况上区间可以是无穷的),则方程右端是一个在整个$L_2[a,b]$上有定义的从$L_2[a,b]$到$L_2[a,b]$中的算子.如果

$$|\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b|K(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}<1$$

即可对方程(23)应用压缩映象原理.

以上所述对多维积分方程也正确.

4. 考察非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t \tag{24}$$

其中$[a,b]$是有穷区间,当$a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant t\leqslant b$与$|z|<C$时,$K(x,t,z)$是$x,t,z$的连续函数,这里$C$是给定的正数.对于任一在区间$a\leqslant t\leqslant b$上连续且满足条件$|\varphi(t)|\leqslant C$的函数$\varphi(t)$,$K[x,t,\varphi(t)]$对于上述正方形$Q$内的$(x,t)$是连续的.设当$(x,t)\in Q$与$|z|\leqslant C$时$|K(x,t,z)|\leqslant d$.若$|\lambda|d(b-a)\leqslant C$,则(24)的右端是$C[a,b]$上的一个算子$A\varphi$,其定义域$D(A)$也是球$\rho(0,\varphi)\leqslant C$,这里的0是在$[a,b]$上等于零的连续函数,且$R(A)$也属于这个球.注意不等式$\rho(0,\varphi)\leqslant C$也可写作$|\varphi(x)|\leqslant C$.此外,我们假定核$K(x,t,z)$关于变数$z$满足李普希兹条件,即当$(x,t)\in Q$,而$|z_1|,|z_2|\leqslant C$时

$$|K(x,t,z_1)-K(x,t,z_2)|\leqslant N|z_1-z_2|$$

这时

$$\rho(A\varphi,A\psi)\leqslant|\lambda|N(b-a)\rho(\varphi,\psi)$$

因此,在满足

$$|\lambda|d(b-a)\leqslant C\text{ 与 }|\lambda|N(b-a)<1$$

---

① 例如见那汤松的《实变函数论》第十八章 §4 中的一个例子.——译者注

的条件下,方程(24)在上述球中可应用压缩映象原理. 这个方程在所述球中有唯一的解,它可以由这个球中任取一个初始近似值 $\varphi_1(x)$,然后用逐次逼近法得出. 这个方法给出的逐次近似解在区间$[a,b]$上一致收敛于解.

5. 设 D 是一个在三维空间中被李雅普诺夫曲面 S 所包围的域. 讨论下面的椭圆型方程的边值问题

$$\Delta u-\lambda f(x,y,z,u)=0 \quad (\text{在 } D \text{ 内}) \tag{25}$$

$$u|_S=0 \tag{26}$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子. 我们假定,在空间(x,y,z,u)内由 $|u|\leqslant C$ 及(x,y,z)在闭域 D 上变动而得的四维闭域上,$f(x,y,z,u)$连续,在这个闭域内部有关于它的各个变数的连续导数,并且这些导数直至边界都是连续的. 其次,假定当$(x,y,z)\in D$ 与 $|u|\leqslant C$ 时 $|f(x,y,z,u)|\leqslant d$,并且在所述条件($|u_1|$,$|u_2|\leqslant C$)下

$$|f(x,y,z,u_1)-f(x,y,z,u_2)|\leqslant N|u_1-u_2|$$

设 $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 是关于域 D 在边界条件(26)之下的拉普拉斯算子的格林函数[Ⅳ;220]. 我们从 D 中取两个点 $P(x,y,z)$ 与 $Q(\xi,\eta,\zeta)$. 求问题(25)与(26)的解等效于求积分方程

$$u(P)=\lambda\int_D G(P;Q)f[Q;u(Q)]\mathrm{d}\tau_Q \tag{27}$$

在 $\overline{D}$ 上的连续函数 $u(Q)$ 组成的空间 $C(D)$ 中的解[Ⅳ;224]. 我们知道,在 D 上 $G(P;Q)\geqslant 0$[Ⅳ;221],并且存在有穷的

$$\max_{P\in\overline{D}}\int_D G(P;Q)\mathrm{d}\tau_Q=G_0$$

若 $|\lambda|G_0 d\leqslant C$,则(27)的右端是 $C(\overline{D})$ 上的算子,因此 $D(A)$ 是 $C(\overline{D})$ 中的球 $\rho(0,u)\leqslant C$(即在 $\overline{D}$ 上 $|u(P)|\leqslant C$),而 $R(A)$ 含于这个球中. 若 $|\lambda|NG_0<1$,则对方程(27)可应用压缩映象原理. 这样一来,当条件

$$|\lambda|G_0 d\leqslant C \text{ 与 } |\lambda|NG_0<1$$

满足时,问题(25)与(26)在球 $|u(P)|\leqslant C$ 中有唯一的解. 这个解可以对(27)用逐次逼近法得到,只要从所述球中任取一元作为初始近似解,而所得逐次近似解在 $\overline{D}$ 上一致收敛于问题的解.

89. 列紧性

以前我们就对一个特殊情形[Ⅳ;36]引入过列紧性的概念,现在我们对一般的度量空间 X 引入这个概念. X 中的集合 U 叫作在空间 X 中列紧的或简称列紧的,是指 U 中元的任一序列 x_n 含有收敛的子序列. 若 U 又是闭集合,则称 U 是自列紧的.

不难看出,U 的有界性是其列紧性的必要条件. 事实上,若 U 无界,则在 U