·河南省高等院校公共数学统编教材·

高等数学

（理工类）下册

冯淑霞 王 波 主编

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

河南省高等院校公共数学统编教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

理工类·下册

主　编　冯淑霞　王　波

副主编　王中华　王　琪　尹彦彬

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类.下册/冯淑霞,王波主编. —郑州:河南大学出版社,2016.11
ISBN 978-7-5649-2624-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①冯… ②王… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 294569 号

责任编辑 张雪彩
责任校对 王 贝
装帧设计 郭 灿

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371-86059701(营销部) 网址:www.hupress.com
排 版 河南金河印务有限公司
印 刷 开封智圣印务有限公司
版 次 2017 年 1 月第 1 版
印 次 2017 年 1 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 13.5
字 数 320 千字
定 价 32.00 元

前　　言

高等数学,作为高等院校相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程,不仅是其后续专业课的先行课程,而且作为一种思维模式,在培养学生的理性思维、计算能力、创新意识等方面具有不可替代的作用.

以“信息时代”为标志的 21 世纪,本质上是数学时代,信息技术本质上是数字技术,使用数学的程度已经成为衡量国家科学进步的主要标志. 而伴随着科技进步和高等教育的发展,特别是高等教育大众化阶段的到来,高等数学的教学内容、方式和手段也在不断发生着变化. 著名数学家和数学教育家项武义先生说,教数学,要教学生“运用之妙,存乎一心”,以不变应万变,不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”, 要教给学生“大巧”,这个板块就是启发联想,夯实数学基本功,使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界,为学生继续深造奠定坚实的数学基础.

为响应高等数学教学的需要,根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求,我们组织多年从事高等数学教学的一线教师编写了本书,作为本科院校理工类专业的高等数学教材,为社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才.

本书分上、下两册,下册内容包括多元函数的微分及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、微分方程. 在编写过程中,本书吸取了国内外相关教材的优点,以参编人员丰富的教学经验为基础,注重知识的系统性、思想性与通用性,力求全面准确又通俗易懂. 例题和习题的选择兼顾不同的难度水平,展示常用的解题技巧,帮助学生理解知识点,以适应不同层次学生的需求;在知识点、新概念的引入上,尽可能给出丰富形象的例子,帮助学生理解抽象概念,例如,函数的极限、连续,定积分等;对公式、运算法则等都给出了比较完整的推导,淡化严格证明部分,便于读者接受和应用.

全书由冯淑霞、王波担任主编,王中华、王琪、尹彦彬担任副主编. 教材具体编写情况如下:张丰盘和汤平编写第 8 章,范利萍编写第 9 章,汪叶编写第 10 章,杨利军和车秀敏编写第 11 章,刘志广编写第 12 章.

鉴于编者水平有限,书中不足之处难免,恳请读者批评指正.

编　者

2016 年 11 月

目　录

第 8 章　多元函数的微分及其应用

§8.1　多元函数极限和连续

上册中我们已经学习了一元函数的微积分，一元函数仅由一个自变量和因变量的变化关系来刻画问题，但在许多实际问题中需要多个自变量和因变量来反映规律. 例如物理学中点的运动轨迹，需要三个空间变量 x,y,z 和时间变量 t 以及函数值（如位置、速度、动量等）. 生物学中，种群动态的变化需要生物因素如与之有相互作用的物种密度，以及非生物因素如湿度、矿物质含量等. 经济学中成本与效益之间的关系更是受到诸多因素的影响. 这种多自变量和多因变量的变化关系，反映到数学上就是多元函数.

从本节开始我们探讨多元函数的微积分，主要包括多元函数的极限理论、连续性、可微性、可偏导性、偏导函数的求法及相应的一些应用. 由于多元函数的定义域所在空间的复杂性和抽象性，我们更关注二元函数的情况，更多个自变量的函数有与二元函数相似的理论和结论. 二元函数与一元函数的相应性质既有紧密联系又有很大差别，希望读者"温故而知新"，在学习中注意对照分析它们的异同.

一、$\mathbf{R}^n$ 上的距离与极限

定义 8.1　$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离定义为

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

定义 8.2　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，则点集

$$U(a,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的以 δ 为半径的圆形邻域，a 称为这个邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

若 $\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则点集

$$U(a,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x_1-a_1|<\delta_1,|x_2-a_2|<\delta_2,\cdots,|x_n-a_n|<\delta_n\}$$

称为点 a 的以 2δ 为边长的矩形邻域，a 称为这个邻域的中心，2δ 称为邻域的边长.

定义 8.3　设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列. 若存在定点 $a\in\mathbf{R}^n$，有

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-a|=0,$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a，称 a 为点列 $\{x_k\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$. 而若一点列不收敛，则称

该点列发散.

在一维的情况下,常用的点集有开区间与闭区间.那么在多维的空间中点集也可以分类.首先给出多维空间中点与点集的关系.

设 S 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上的点集,它在 $\mathbf{R}^n$ 上的补集 $\mathbf{R}^n \backslash S$ 记为 S^c.对于任意 $x \in \mathbf{R}^n$,从其邻域与 S 的关系来划分,有三种情况:

(1)存在 x 的一个 δ 邻域 $U(x,\delta)$ 完全落在 S 中,这时称 x 是 S 的内点. S 的内点的全体称为 S 的内部,记为 S°.

(2)存在 x 的一个 δ 邻域 $U(x,\delta)$ 完全不落在 S 中,这时称 x 是 S 的外点.

(3)如果 x 的任意 δ 邻域既包含 S 中的点,又包含不属于 S 的点,那么就称 x 是 S 的边界点. S 的边界点的全体称为 S 的边界,记为 ∂S.

注意:内点必属于 S,外点必不属于 S,但是边界点可能属于 S,也可能不属于 S.

另外根据 x 周围有多少点集 S 中的点,又可将其分为孤立点和聚点.

若存在 x 的一个邻域,其中只有点 x 属于 S,则称 x 是 S 的孤立点.

若 x 的任意空心邻域中都包含有 S 中的点,则称 x 为 S 的聚点. S 的全体聚点常常记作 S'.

显然,S 的孤立点必是 S 的边界点, S 的内点必是 S 的聚点; S 的边界点是 S 的孤立点,或是 S 的聚点.因此 S 的聚点可能属于 S,也可能不属于 S.例如在 $\mathbf{R}$ 中,0 是点集 $\left\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,\cdots\right\}$的聚点,但它不属于这个点集.

定义 8.4 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集.若 S 中的每一个点都是它的内点,则称 S 为**开集**;若 S 包含它所有的聚点,则称 S 为**闭集**.

定义 8.5 若点集 S 中的任意两个点都可以用 S 中的连续曲线连起来,则称 S 为**连通集**.连通的开集称作**区域**,区域加上其边界称作**闭区域**.

例 1 证明点集 $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 是开集.

证 设 (x_0,y_0) 为 S 中任一点,则有 $x_0+y_0<4$.取

$$\delta=\frac{1}{2}\min\left\{\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 2-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right\},$$

易知 $U((x_0,y_0),\delta) \subset S$,则 (x_0,y_0) 是 S 的内点.由 (x_0,y_0) 的任意性可得 S 为开集.

注意:$\mathbf{R}^n$ 上的点集 S 为闭集的充要条件是 S^c 为开集.

有兴趣的读者可试着证明.

二、多元函数

1. 多元函数的概念

在日常生活及科学技术中,经常遇到因变量的变化与几个自变量有关系.例如,一定量的理想气体的压强 P 与体积 V 和温度 T 的关系:

$$P=\frac{RT}{V}(R \text{ 是普适气体常量}).$$

它表示了因变量(压强 P)随两个自变量(体积 V 和温度 T)的变化而变化的某种规律,像这样的函数称为二元函数. 推而广之,如果因变量随 n 个自变量的变化而变化,就称为多元函数.

定义 8.6　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集,称映射 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 为定义在 D 上的 n 元函数,记为 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. D 为 f 的定义域,$f(D)$ 为 f 的值域.

特别地,当 $n=2$ 时,称 $z=f(x_1,x_2)$ 为二元函数. 本章主要针对二元函数进行研究.

例如,$z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 是二元函数,其定义域 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$.

2. 多元函数的极限

我们先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 8.7　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, A 是一常数. 如果对于任意给定的正数 ε,总存在 $\delta>0$,使得 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限叫作二重极限.

例 2　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$,证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证　由于

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-0|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$,即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}((0,0),\delta)$ 时,总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

成立,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

对一元函数而言,只要 x_0 的左、右极限存在且相等,函数在 x_0 处的极限就存在,而多元函数没有这么简单. 就二重极限而言,根据定义,要求 $P(x,y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 都趋于 A. 这说明:一方面,如果 $P(x,y)$ 以某一种特殊方式,例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$,那么即使 $f(x,y)$ 无限接近于某一确定值,我们也不能断定函数的极限存在;另一方面,如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋于不同的值,那么就可断定函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限一定不存在.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在.

显然,当 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=0;$$

同理,当 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0;$$

但它沿直线 $y=mx(m\neq 0)$ 趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

这说明对于不同的 m 值,函数 $f(x,y)$ 有不同的极限. 因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在.

当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=mx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{(m^2x^2-x)^2}{(m^4x^2+1)x^2}=1;$$

当 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=1.$$

这说明当 $P(x,y)$ 沿任何直线趋于点 $(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 极限都存在并且相等.

但是当 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$,因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的二重极限不存在.

以上关于二元函数的极限可以推广到 n 元函数.

多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

3. 多元函数的连续性

定义 8.8 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点. 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 上的每一点处都连续,那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,或者称函数 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

二元函数的连续性概念可推广到 n 元函数.

例 3 证明函数 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

证 设 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,则有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&=\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\\ &=2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right|\\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right|\leqslant\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

于是，对于 $\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这说明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续. 又由 (x_0,y_0) 在 $\mathbf{R}^2$ 上的任意性，可得 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

前面我们已经指出：一元函数关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用. 根据多元函数的极限运算法则，可以证明：多元连续函数的和、差、积仍为连续函数，连续函数的商在分母不为零处仍连续，多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如，$\sin(x^2+y^2)$，$\ln(1+\cos x)$，$\dfrac{1-e^y}{x^2+1}$ 等都是多元函数.

与一元函数有类似的结论，多元初等函数在其定义区域内是连续的.

例 4　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解　$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是初等函数，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$. $(1,2)$ 是 D 的内点，故 $f(x,y)$ 在 $(1,2)$ 处连续. 于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=f(1,2)=0.4$.

例 5　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=0.5.$

注意：$f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 是初等函数，$(0,0)$ 点不在 $f(x,y)$ 的定义域内，不能直接代入求极限，但 $(0,0)$ 是函数 $\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 定义域中的点，可以根据它的连续性求出极限值.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，多元连续函数在有界闭区域上具有以下性质.

性质 8.1（有界性和最大值最小值定理）　设 f 是定义在有界闭区域 D 上的多元连续函数，则 f 在 D 上有界，且能取到最大值和最小值.

性质 8.1 是说，若 f 在有界闭区域 D 上连续，则必存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，都有 $|f(P)|\leqslant M$，且存在两点 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},\quad f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

性质 8.2（介值定理）　有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何数值.

习题 8-1

1. 已知函数 $f(x,y)=x^{\sin y}$,求 $f(x+y,\arcsin y)$.
2. 已知函数 $f(x,xy,xyz)=x^2+y^2-z^2$,求 $f(x,x^2,x^3)$ 和 $f(xyz,yz,z)$.
3. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(2) $z=\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$;

(3) $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$;

(4) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$.

4. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{4+xy}-2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,1)}\dfrac{\ln x+y^2\cos(xy)}{e^y\sin(x^2+y^2)}$.

5. 函数 $z=\dfrac{x^2+y^2}{\sin xy}$ 在何处是间断的?
6. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

§8.2 偏导数与全微分

一、偏导数

在一元函数中,导数反映函数的变化率. 对于多元函数,同样希望得到函数的变化率,可多元函数的自变量不止一个,因变量与自变量的关系比较复杂. 但可以从简单的情况入手,只考虑其中一个自变量,而将其他自变量固定下来看作常量,这样就可将多元函数看作一元函数来考虑.

定义 8.9 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为开集, $z=f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0,y_0)\in D$ 为

一定点. 若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0).$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数可定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_y(x_0,y_0).$$

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数 $f_x(x,y)$ 就是一个关于 x,y 的二元函数,它称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x\quad 或\quad f_x(x,y).$$

类似地可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y\quad 或\quad f_y(x,y).$$

若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x,y 均可偏导,则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导.

偏导数的概念可推广到二元以上的函数. 例如,三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处关于 x 的偏导数定义为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}.$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义如下:

设 $M_0(x_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上一点. 过点 M_0 作平面 $y=y_0$,截此曲面得一曲线,此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$,则导数 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$ 即 $f_x(x_0,y_0)$ 就是这条曲线在点 M_0 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率,如图 8-1 所示.

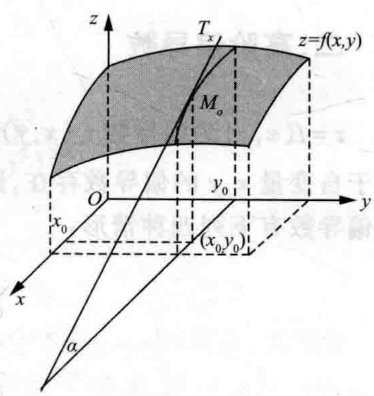

图 8-1

从偏导数的定义可以看出,对某个变量求偏导数,只要在求导时将其他变量看成常数就可以了.

例 1　设 $f(x,y)=x^4+2x^2y+y^4$,求 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$.

解　将 y 看成常数,对 x 求导,得函数 $f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数

$$f_x(x,y)=4x^3+4xy;$$

同理函数 $f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数为

$$f_y(x,y)=4y^3+2x^2.$$

于是将 $(1,0)$ 分别代入两式得

$$f_x(1,0)=4,\quad f_y(1,0)=2.$$

例 2 设函数 $z=x^y(x>0,x\neq1)$,证明该函数满足

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

证 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,$$

故有

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=2x^y=2z.$$

我们知道,对一元函数而言"可导必连续".但是对于多元函数来说,该性质并不成立.因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于点 P_0 时,函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$,不能保证点 P 沿任何方式趋于点 P_0 时,函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$.例如,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

但是从上节我们知道该函数在点 $(0,0)$ 处并不连续.

二、高阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 仍然是关于自变量 x,y 的函数.若这两个函数关于自变量 x,y 的偏导数存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.二元函数的二阶偏导数有下列四种情形:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、第三个导数为混合偏导数. 类似地可定义三阶、四阶……n 阶偏导数. 三阶偏导数共有八种情形. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 3　求函数 $z=e^{x+2y}$ 的所有二阶偏导数和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

解　由于一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y},$$

于是有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^{x+2y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2e^{x+2y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2e^{x+2y}$$

和

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2e^{x+2y})=2e^{x+2y}.$$

从以上例子可以看到两个混合偏导数相等，即 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这不是偶然的. 事实上，如下定理给出了混合偏导数相等的一个充分条件.

定理 8.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，那么 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

定理证明从略. 此定理表明混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关.

例 4　验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证　因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

三、方向导数

二元函数偏导数反映的是函数沿 x 轴或 y 轴方向的变化率，而在实际问题中还可以考虑函数沿平面上任意一方向的变化率.

设 l 是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为起点的一条射线，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 表示 l 的一个

方向,其中 α 为 l 与 x 轴正向的夹角,β 为 l 与 y 轴正向的夹角($\sin\alpha=\cos\beta$). 那么射线 l 可写成参数方程:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases} (t\geqslant 0).$$

设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义,$P(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 为 l 上的另一点,且 $P\in U(P_0)$,若极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在,则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿方向 l 的方向导数,记为 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

由方向导数的定义可知,$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 表示函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的变化率.

由于 x 轴和 y 轴正向的方向分别为 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$ 和 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$,因此从定义可以得到函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x(或 y)可偏导的充要条件为 $f(x,y)$ 沿 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $-\boldsymbol{e}_1$(或 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $-\boldsymbol{e}_2$)的方向导数都存在且互为相反数,并有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0,y_0)\quad\left(\text{或}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0,y_0)\right).$$

请读者自行证明.

例 5 求二元函数 $f(x,y)=\sqrt{|x^2-y^2|}$ 在原点的方向导数.

解 对任一方向 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,

$$\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)}{t}=\frac{|t|}{t}|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}.$$

当 $\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ 时,上式为零,此时

$$\frac{\partial f}{\partial e_l}\Big|_{(0,0)}=0;$$

当 $\cos^2\alpha\neq\sin^2\alpha$ 且 $t\to 0^+$ 时,上式的极限为 $|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}$,即此时

$$\frac{\partial f}{\partial e_l}\Big|_{(0,0)}=|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}.$$

同样可算出

$$\frac{\partial f}{\partial(-e_l)}\Big|_{(0,0)}=|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}.$$

特别地,函数 $f(x,y)$ 沿方向 $\boldsymbol{e}_l=(1,0)$ 和 $-\boldsymbol{e}_l=(-1,0)$ 及 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ 的方向导数均为 1,因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在.

对于 $f(x,y,z)$,它在空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$