考研数学命题人土豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析习题全解

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐荣　教授

北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童武　教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析习题全解

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐 荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童 武 教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

目　　录

第一部分　高等数学习题全解 …………………………………………………… (1)
第一章　函数、极限、连续 …………………………………………………… (1)
第二章　一元函数微分学 …………………………………………………… (4)
第三章　一元函数积分学 …………………………………………………… (11)
第四章　向量代数与空间解析几何 …………………………………………… (17)
第五章　多元函数微分学 …………………………………………………… (19)
第六章　重积分 …………………………………………………………… (25)
第七章　曲线、曲面积分 …………………………………………………… (30)
第八章　无穷级数 ………………………………………………………… (37)
第九章　常微分方程 ……………………………………………………… (45)
第二部分　线性代数习题全解 …………………………………………………… (52)
第一章　行列式 …………………………………………………………… (52)
第二章　矩　阵 …………………………………………………………… (54)
第三章　向　量 …………………………………………………………… (58)
第四章　线性方程组 ……………………………………………………… (61)
第五章　特征值与特征向量 ………………………………………………… (63)
第六章　二次型 …………………………………………………………… (65)
第三部分　概率论与数理统计习题全解 ………………………………………… (67)
第一章　随机事件与概率 …………………………………………………… (67)
第二章　随机变量及其分布 ………………………………………………… (70)
第三章　多维随机变量及其分布 …………………………………………… (74)
第四章　随机变量的数字特征 ……………………………………………… (78)
第五章　大数定律和中心极限定理 ………………………………………… (81)
第六章　数理统计的基本概念 ……………………………………………… (82)
第七章　参数估计 ………………………………………………………… (86)

第一部分　高等数学习题全解

第一章　函数、极限、连续

1.【考点提示】 复合函数的定义

【解题分析】 因 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 则 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$, 解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$, 得 $1-x\geqslant 1$, 即 $x\leqslant 0$.

【命题人点拨】 若 $\varphi(x)=f[g(x)]$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 则若已知 $f(x)$, 求 $g(x)$, 相当于求反函数 $g(x)=f^{-1}[\varphi(x)]$; 若已知 $g(x)$, 求 $f(x)$, 则可作变量代换 $u=g(x)\Rightarrow x=g^{-1}(u)$, 于是 $f(u)=\varphi[g^{-1}(u)]$, 即 $f(x)=\varphi[g^{-1}(x)]$.

2.【考点提示】 复合函数的定义

【解题分析】 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 知 $|f(x)|\leqslant 1$. 故有 $f[f(x)]=1$.

故应填 1.

【命题人点拨】 已知简单函数 $f(x)$, $g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$, 通常采用代入法逐次复合即可, 应特别注意 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

3.【考点提示】 极限

【解题分析】 由于 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$, 故有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在, 但不为 ∞.

【命题人点拨】 $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan\dfrac{1}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0}a^{\frac{1}{x-x_0}}$ 等的极限存在, 可通过讨论其左、右极限得知.

4.【考点提示】 指数函数求极限

【解题分析一】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\dfrac{2a}{x-a}\right)\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$.

故应填 e^{2a}.

【解题分析二】 原函数化为指数函数求极限,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{2a}.$$

【命题人点拨】 本题考查了重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的灵活运用.

5.【考点提示】 求极限

【解题分析一】 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}$

$$=e^{\pi\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

【解题分析二】 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$

【命题人点拨】 求指数函数极限的方法主要有利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$和转为自然对数的指数函数形式求解.

6.【考点提示】 等价无穷小，洛必达法则

【解题分析一】

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-\sin x-1)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1.$$

【解题分析二】 采用洛必达法则

$$原式=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}(e^x+\sin x)=1.$$

【解题分析三】 采用等价无穷小量替换

因为当 $x\to0$ 时，$1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}=1.$$

【命题人点拨】 等价无穷小和洛必达法则是快速求极限的两大法宝.

7.【考点提示】 求极限

【解题分析一】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}(\sin2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$=\lim_{t\to0}\left\{[1+(\sin2t+\cos t-1)]^{\frac{1}{\sin2t+\cos t-1}}\right\}^{\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=e^2.$$

【解题分析二】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}=e^2.$$

8.【考点提示】 分式函数、无穷小量的等价代换、洛必达法则

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

故应填$\dfrac{1}{6}$.

【命题人点拨】 一般来说,求极限的式子中若含有 $\tan x$,$\cot x$,$\csc x$ 或 $\sec x$ 等函数时,可先将其化为 $\sin x$,$\cos x$ 等函数的表达式,便于求解极限.

9.【考点提示】 第二类重要极限

【解题分析一】 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

故应填 e^6.

【解题分析二】 通过自然对数的指数函数形式求解.

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}6\frac{\ln(1+3x)}{3x}}=e^6.$$

10.【考点提示】 第二类重要极限

【解题分析】 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$,

则有 $e^{3a}=8$,解得 $a=\ln2$.

11.【考点提示】 等价无穷小,洛必达法则

【解题分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{2\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{2\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\cos x}{\frac{2}{1+x}}+\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

【命题人点拨】 当 $x\to0$ 时,若待求极限的表达式中含有 $\sin\dfrac{1}{x}$,$\cos\dfrac{1}{x}$ 等时,洛必达法则往往失效,此时改用无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量来求解是最佳选择.

12.【考点提示】 无穷小量的比较

【解题分析】 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$,而

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot2ax}{-\sin x}$$

$$=-\frac{2a}{3}\lim_{x\to0}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\frac{x}{\sin x}=-\frac{2a}{3},$$

即有 $-\dfrac{2a}{3}=1$,故 $a=-\dfrac{3}{2}$.

13.【考点提示】 无穷小量的比较

【解题分析一】 由题设知

$$F'(x)=\left[x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2f(t)\,dt\right]'$$

$$=2x\int_0^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt,$$

又 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1}{(k-1)x^{k-3}}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=2f'(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{(k-1)x^{k-3}}\neq0.$$

故应有 $k=3$. 故正确选项为(C).

【解题分析二】 采用带皮亚诺余项的泰勒公式.

记 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，由 $\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$，得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f'(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

从而 $F'(x)=f'(0)x^2+o(x^3)\backsim f'(0)x^3$，故知 $k=3$，应选(C).

【解题分析三】 易观察到所要得到的 k 值对任何满足 $f(0)=0$，$f'(0)\neq0$ 的 $f(x)$ 都成立，即对于 $f(x)=x$ 也成立，因而有

$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^4=\frac{1}{4}x^4$，从而 $F'(x)=x^3$，$k=3$.

【命题人点拨】 对于选择题和填空题类型来说，【解题分析三】更为简捷.

14.【考点提示】 洛必达法则、无穷小量的等价代换

【解题分析一】 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{a\sec^2x+b\sin x}{\frac{-2c}{1-2x}+2xd\mathrm{e}^{-x^2}}=-\frac{a}{2c}=2,$$

则 $a=-4c$，故正确选项为(D).

【解题分析二】 利用等价无穷小作等价代换，因 $1-\cos x$ 与 $1-\mathrm{e}^{-x^2}$ 均为 x 的高阶无穷小量，于是有 $a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax$，$c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})\sim-2cx$.

因而 $\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{-2cx}=-\frac{a}{2c}=2$，即有 $a=-4c$，选(D).

第二章　一元函数微分学

1.【考点提示】 导数定义的运用

【解题分析】

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\frac{1}{2}f'(3)=-1.$$

【命题人点拨】 在 $f'(x_0)$ 存在的情况下，则有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+bh)-f(x_0-ah)}{h}=(b+a)f'(x_0).$$

2.【考点提示】 导数定义

【解题分析】 由于

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$

可见 $F'(0)$ 存在$\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)\Leftrightarrow f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. 故正确选项为(A).

【命题人点拨】 含有绝对值的函数,一般应当作分段函数看待,其在分段点处的连续性、极限和导数应按定义讨论分段点两侧的情况. 分段点处的导数一般用结论:$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$.

3.【考点提示】 函数的极限和导数

【解题分析】 由 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=te^{2t}$ 得

$$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(1+2t)e^{2t}.$$

4.【考点提示】 三阶导数的计算

【解题分析】 由 $f'(x)=[f(x)]^2$,有

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2f(x)[f(x)]^2=2!\ [f(x)]^3,$$
$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2f'(x)=3!\ [f(x)]^4,$$

用数学归纳法,有

$$f^{(n)}(x)=n!\ [f(x)]^{n+1}.$$

故得到正确答案为(A).

【命题人点拨】 本题也可先求 $y=f(x)$ 的表达式,通过求解微分方程 $f'(x)=[f(x)]^2$ 得到 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$,进而有

$$f^{(n)}(x)=n!(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}}=n![f(x)]^{n+1}.$$

5.【考点提示】 导数的计算

【解题分析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

故应填$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

6.【考点提示】 导数的计算

【解题分析】 对方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 两边同时求导，得

$$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0,$$

解得

$$y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}.$$

所以应填$\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

7.【考点提示】 导数的计算

【解题分析】 由题意设 $f_1(x)=3x^3, f_2(x)=x^2|x|$，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，$f_1(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数均存在，只需考察 $f_2(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数存在的情况.

$$f_2(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0,\\ -x^3, & x<0,\end{cases}$$

$$f_2'(x)=\begin{cases}3x^3, & x>0,\\ -3x^3, & x<0,\end{cases}\qquad f_2'(0)=0,$$

对 $f_2'(x)$ 再求导得

$$f_2''(x)=\begin{cases}6x, & x>0,\\ -6x, & x<0,\end{cases}\qquad f_2''(0)=0,$$

即

$$f_2''(x)=6|x|.$$

易知 $f_2'''(0)$ 不存在，故 $n=2$. 应选(C).

【命题人点拨】 分段函数或含有绝对值的函数在分段点处的导数一般应根据左、右导数的定义来求解.

8.【考点提示】 切线方程

【解题分析一】 欲求切线方程，只要知道切线的斜率及其所经过的一个点，由题设，切线过点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$，在直角坐标下，该点坐标为 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$，就可以通过参数方程求导来得到斜率. 已知极坐标下曲线方程 $\rho=e^{\theta}$，则

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta,\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\frac{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}.$$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 代入上式，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,e^{\frac{\pi}{2}})}=-1$，所以切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0),\quad 即\quad x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

【解题分析二】 对数螺线方程 $\rho=e^{\theta}$ 可化为隐函数方程.

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x},$$

利用隐函数求导法，点 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$ 处的导数为 $y'(0)=-1$，故所求切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-1\cdot(x-0),$$

即有

$$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

【命题人点拨】 考生应熟练掌握直角坐标方程和极坐标方程之间的转换.

9.【考点提示】 微分的定义

【解题分析】 由于 $dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$,得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\frac{1}{2}$. 因此,当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是与 Δx 同阶的无穷小. 故应选(B).

10.【考点提示】 函数的极值

【解题分析】 函数两边求导得 $y'=2^x+x\cdot 2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)$,则 $x=-\frac{1}{\ln 2}$. 又 $y''=2^x\ln 2(1+x\ln 2)+2^x\ln 2$,则 $y''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=2^{-\frac{1}{\ln 2}}\cdot\ln 2>0$,即当 $x=-\frac{1}{\ln 2}$时,函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

11.【考点提示】 导数的定义

【解题分析一】 可利用排除法. 因为 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)=0$,故可排除选项(A)和(D). 由极限的保号性知,在 $x=a$ 的某个空心邻域内有 $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,故有 $f(x)<f(a)$,从而 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值,故选(B).

【解题分析二】 举特例,即取 $f(x)=-x^2,a=0$,则可知正确答案为(B).

12.【考点提示】 函数的极值

【解题分析】 依题意有 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$,又 $f'(x_0)=0$,则 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$,故 $f(x)$ 在驻点 x_0 处取得极大值,应选(A).

【命题人点拨】 本题虽有微分方程,但无需求解,只需利用导函数的信息即可分析函数的性质.

13.【考点提示】 导数符号与函数单调性

【解题分析】 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2\cdot 0=0,$$

即有 $f'(0)=0$. 因此可排除(A),(B)选项.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,根据极限的保号性,存在 $x=0$ 的某邻域,在此邻域内有 $\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$,即 $f(x)>0=f(0)$,由极值的定义知,在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值. 应选(D).

14.【考点提示】 函数曲线的极限与拐点

【解题分析一】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$,根据极限的性质知,存在 $x=0$ 的某去心邻域,在此去心邻域内有 $\frac{f''(x)}{|x|}>0$,即 $f''(x)>0$. 又根据泰勒公式,得

$$f(x)=f(0)+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geqslant f(0).$$

故$f(0)$是$f(x)$的极小值．故正确选项为(B).

【解题分析二】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$可推出，在$x=0$的某空心邻域内$f''(x)>0$. 于是$f'(x)$单调增加，又$f'(0)=0$，可知$f'(x)$在$x=0$的左、右两侧由负变正，从而知$x=0$是$f(x)$的极小值点(见图1-2-1).

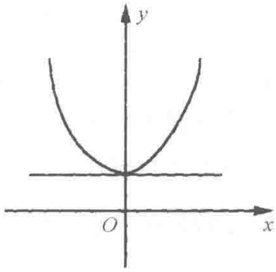

图 1-2-1

【命题人点拨】 一般而言，当题设函数二阶或二阶以上可导时，可考虑采用泰勒公式进行分析讨论.

15.【考点提示】 曲线的渐近线

【解题分析】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以$y=1$为水平渐近线，但无垂直渐近线，故选(A).

【命题人点拨】 若函数曲线无水平渐近线，则应考虑是否有斜渐近线.

16.【考点提示】 函数曲线的渐近线

【解题分析】 由于

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1,$$

故$y=1$为其水平渐近线.

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty,$$

于是$x=0$为其垂直渐近线.

故曲线$y=\dfrac{x+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$既有水平渐近线又有垂直渐近线，因此正确选项为(D).

17.【考点提示】 介值定理

【解题分析】 由题设，令$F(x)=f(x)-x$，由于$0<f(x)<1$，故$F(0)=f(0)>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，由连续函数的介值定理知，在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$.

设$0<x_1<x_2<1$且$f(x_1)=x_1$，$f(x_2)=x_2$，即有$F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理知，至少存在一点$x_0\in(x_1,x_2)$，使得$F'(x_0)=0$，即有$f'(x_0)=1$，与题设相矛盾. 故命题得证.

18.【考点提示】 介值定理和函数单调性的运用

【解题分析】 依题意，$S_1=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$，$S_2=\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$. 由$S_1=3S_2$可构造辅助函数：$F(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$.

显然，在区间$[a,b]$上$F(x)$连续，由$f'(x)>0$知，$f(a)<f(x)<f(b)$，$x\in(a,b)$.

从而 $F(a)=-3\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0$， $F(b)=\int_a^b[f(b)-f(a)]\mathrm{d}t>0$，

由连续函数的介值定理知,至少 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$,即

$$\int_a^\xi[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t=3\int_\xi^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t.$$

又 $F'(x)=f'(x)[x-a+3(b-x)]>0$,知 $F(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加,故在 (a,b) 内有且只有一个 ξ,使得 $S_1=3S_2$.

19.【考点提示】 介值定理和函数单调性的运用

【解题分析】 因为 $\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$,故原方程可化为

$$\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-2\sqrt{2}.$$

令 $F(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}-2\sqrt{2}-\ln x$,则 $F'(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{x}$,令 $F'(x)=0$,有 $x=\mathrm{e}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 严格单调减小;当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时,$F'(x)>0$,$F(x)$ 严格单调增加,因而,$F(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内分别至多存在一个零点.

又 $F(\mathrm{e})=-2\sqrt{2}<0$,$F(\mathrm{e}^{-3})=\mathrm{e}^{-4}+3-2\sqrt{2}>0$,$F(\mathrm{e}^4)=\mathrm{e}^3-4-2\sqrt{2}>0$,由零点定理知,$F(x)$ 在区间 $(\mathrm{e}^{-3},\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^4)$ 内分别至少有一个零点. 故综上知命题得证.

20.【考点提示】 确定函数方程 $f(x)=0$ 的根

【解题分析】 由题设在 $[0,+\infty)$ 上,有 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x\geqslant kx$,其中 $0<\xi<x$,则取 $x_1>-\frac{f(0)}{k}>0$,有 $f(x_1)>k\left[-\frac{f(0)}{k}\right]+f(0)=0$;又由题设 $f(0)<0$,因此根据零值定理(或根的存在性定理)知,必存在 $x_0\in(0,x_1)$,使 $f(x_0)=0$.

由于 $f'(x)\geqslant k>0$,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内仅有一个零点.

21.【考点提示】 积分中值定理

【解题分析】 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上连续,由积分中值定理知,至少存在一点 $\xi\in\left[\frac{2}{3},1\right]$,使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\left(1-\frac{2}{3}\right)f(\xi),$$

即

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(\xi).$$

于是

$$f(\xi)=f(0).$$

可见 $f(x)$ 在区间 $[0,\xi]$ 上满足罗尔定理的条件,由罗尔定理知,至少存在一点 $c\in(0,\xi)$,使得

$$f'(c)=0,\quad c\in(0,\xi)\subset(0,1).$$

22.【考点提示】 罗尔定理

【解题分析】 (1)用反证法:若存在 $c\in(a,b)$,使 $g(c)=0$,则对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别应用罗尔定理知,存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$,使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$.

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$,使 $g''(\xi_3)=0$,这

与题设 $g''(x)\neq 0$ 矛盾，故在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2)令 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 根据罗尔定理知，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即有 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$，故得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

23.【考点提示】 微分中值定理，拉格朗日中值定理

【解题分析一】 由于 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，故至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$. 若 $f(c)>f(a)$，则在 $[a,c]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件.

故至少存一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{c-a}[f(c)-f(a)]>0.$$

若 $f(c)<f(a)=f(b)$，则在 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理即可.

【解题分析二】 假设对任意 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\leqslant 0$，从而 $f(x)$ 单调减少，即有 $f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)$. 又 $f(a)=f(b)$，故有 $f(x)=f(a)=f(b)$ 为常数，与题设矛盾.

故有 $f'(\xi)>0$.

24.【考点提示】 不等式证明题

【解题分析一】 令 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2)$，于是

$$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0\quad(0<\theta<1).$$

可见，$F(x)$ 单调减小，又 $x_1>0$，故 $F(x_1)<F(0)$，即

$$f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)<0,$$

也即

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

【解题分析二】 由题设不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$，则根据微分中值定理知，

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),\quad 0<\xi_1<x_1,$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),\quad x_2<\xi_2<x_1+x_2.$$

又 $f''(x)<0$，因而 $f'(x)$ 单调减小；又 $\xi_1<\xi_2$，则 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，因而

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0).$$

又 $f(0)=0$，则有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

因为题设中，x_1 和 x_2 可交换，即位置互换，形式不变，故当 $x_1>x_2$ 时上式亦成立.

25.【考点提示】 不等式证明题

【解题分析一】 令 $f(x)=x\ln a-a\ln x(x\geqslant a>\mathrm{e})$，由于

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>1-\frac{a}{x}\geqslant 0\quad(x\geqslant a>\mathrm{e}),$$

因此 $f(x)$ 在 $(x\geqslant a)$ 时单调增加，因此当 $b>a$ 时，有

$$f(b)>f(a),$$

即

$$b\ln a>a\ln b,$$

故有

$$a^b>b^a.$$

【解题分析二】 令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>\mathrm{e})$，则有

$$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \quad (x>\mathrm{e}).$$

故 $g(x)$ 严格单调减小. 当 $b>a>\mathrm{e}$ 时,有

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}, \quad 即\ a^b>b^a.$$

【命题人点拨】 若直接设 a 或 b 为未知变量 x,然后再对 x 求导,则计算过程复杂,可以考虑通过变形后再设未知变量.

26.【考点提示】 泰勒公式

【解题分析】 对 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处用泰勒公式展开,得

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

其中 $\xi=c+\theta(x-c)$, $0<\theta<1$.

令 $x=0$,则有

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, \quad 0<\xi_1<c<1.$$

令 $x=1$,则有

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, \quad 0<c<\xi_2<1.$$

上述两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2],$$

则

$$\begin{aligned}|f'(c)|&=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|\\&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].\end{aligned}$$

又当 $c\in(0,1)$ 时,有

$$(1-c)^2+c^2\leqslant 1,$$

因此

$$|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}.$$

第三章 一元函数积分学

1.【考点提示】 定积分的求解

【解题分析】 令 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=A$,则 $f(x)=x+2A$,于是有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2A)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2Ax\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{2}+2A=A.$$

可解得 $A=-\dfrac{1}{2}$，即有 $f(x)=x-1$.

【命题人点拨】 应牢记定积分为常数，类似的问题可运用上述方法求解.

2.【考点提示】 奇、偶函数在对称区间上的定积分

【解题分析】 根据奇、偶函数在对称区间上定积分的性质，知

$$M=0,\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0,\quad P=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0,$$

故有 $P<M<N$，故正确选项为(D).

【命题人点拨】 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

3.【考点提示】 函数导数符号与定积分的几何意义

【解题分析一】 由题设，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减小，且下凸，如图 1－3－1 所示. 由定积分的几何意义，已知 S_1 且表示曲线 $f(x)$ 下方的面积，S_2 为 $cdba$ 的面积，S_3 为 $edba$ 的面积，显然有 $S_2<S_1<S_3$，故选(B).

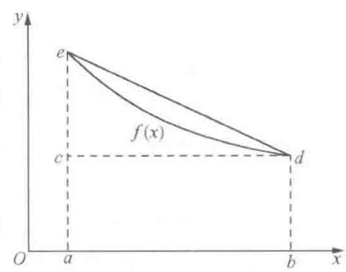

图 1－3－1

【解题分析二】 依题意知，曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减小且是凹曲线弧，从而有 $f(x)>f(b)$，

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad a<x<b,$$

故 $\quad S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>f(b)(b-a)=S_2,$

$$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)=S_3,$$

即综上有 $S_2<S_1<S_3$，故选(B).

4.【考点提示】 不定积分的计算

【解题分析】 由题设令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，则 $x=\ln(1+u^2)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$，于是有

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^2}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=2\int\ln(1+u^2)\mathrm{d}u=2u\ln(1+u^2)-\int\frac{4u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C\\&=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

【命题人点拨】 对于含有根式的被积函数，可考虑令根式为一新的变量.

5.【考点提示】 三角有理式不定积分的计算

【解题分析一】 由题设可让分子、分母同乘以某一三角函数.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$$

$$\xlongequal{\cos x = u} -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2} = -\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{3+u}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{8}\left(\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln|1-\cos x|-\ln|1+\cos x|+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C\ .$$

【解题分析二】 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$x=2\arctan t$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

从而有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

【解题分析三】 利用半角公式，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

6.【考点提示】 定积分计算

【解题分析】 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right)$

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2-x)}$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{2-x}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2\ .$$

【命题人点拨】 采用分部积分公式 $\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$ 时，一般将对数函数、反三角函数作为 u，指数函数和三角函数可作为 v.

7.【考点提示】 分段求积分

【解题分析】 令 $x-2=t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 因为 $1\leqslant x\leqslant 3$，所以 $-1\leqslant t\leqslant 1$，

$$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\bigg|_{-1}^0-\mathrm{e}^{-t}\bigg|_0^1=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

【命题人点拨】 当被积函数为复合函数时，一般应考虑先作变量替换，即将复合函

数 $f[\varphi(x)]$ 中的 $\varphi(x)$ 用 u 替代.

8.【考点提示】 变上限积分

【解题分析】 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x\xlongequal{tx=u}t\int_0^s f(u)\frac{1}{t}\mathrm{d}u=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$,由此可知 I 的值依赖 s,而不依赖于 t. 正确答案为(D).

【命题人点拨】 当问题中被积函数为复合函数时,应考虑先作变量替换.

9.【考点提示】 变限函数、洛必达法则

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=1$,

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}=0$, $\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x)=b-1=0$,于是有 $b=1$.

又 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}$,从而 $a=4$.

10.【考点提示】 变限函数求导

【解题分析】 对等式 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$ 两边同时求导,得

$$f(x^3-1)\cdot(3x^2)=1,\quad 即有 f(x^3-1)=\frac{1}{3x^2}.$$

令 $x=2$,则有 $f(7)=\frac{1}{12}$.

11.【考点提示】 变限积分求导公式和复合函数的求导方法

【解题分析】 $F'(x)=\left[\int_x^{e^{-x}}f(t)\mathrm{d}t\right]'_x=f(e^{-x})\cdot(e^{-x})'-f(x)\cdot x'$
$$=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$$

故选(A).

【命题人点拨】 变限积分的求导公式一般是:

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

12.【考点提示】 确定函数的单调区间

【解题分析】 由 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$,解得 $0<x<\frac{1}{4}$,因此 $F(x)$ 的单调区间为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

【命题人点拨】 单调性的判定除了采用定义外,运用一阶导函数的符号来判别最为常用.

13.【考点提示】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$

【解题分析】 利用洛必达法则,有