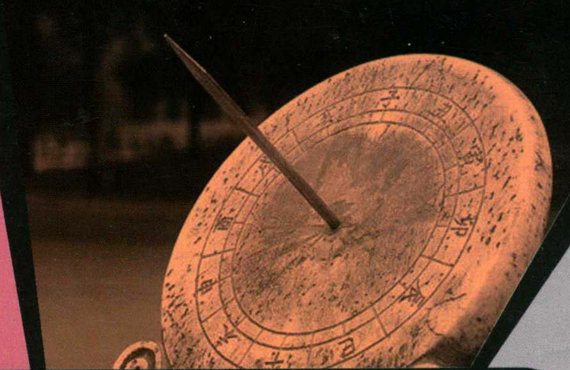
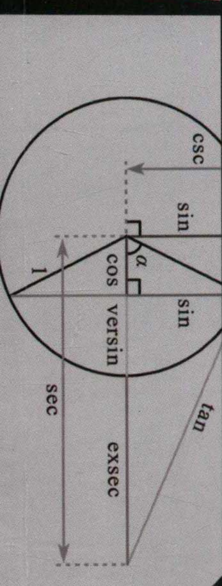



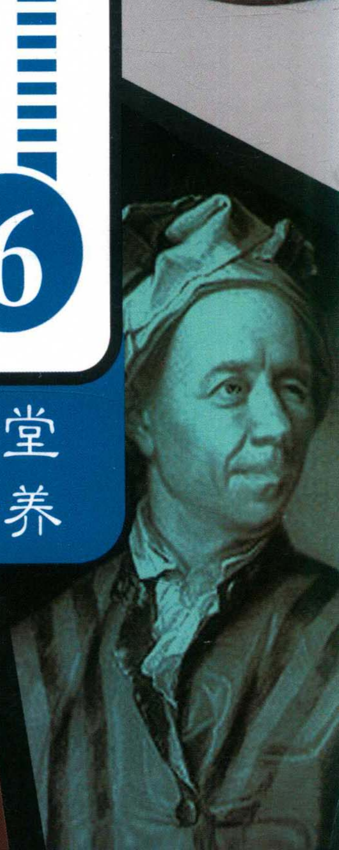



学科阅读推广工程

# 数学来了 6

颜峰 主编

以阅读体味数学课堂
用阅读提升学科素养

山东城市出版传媒集团·济南出版社

数学来了
6

# 数学来了 6

学科阅读推广工程

颜峰 主编

副 主 编：杨 军 安志军 陈 杰
分册主编：陈 杰
编 者：梁艳丽 王丽丽 魏秀华
周 静 姜永东 宋丽丽
刘润军

山东城市出版传媒集团·济南出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学来了.6／颜峰主编. —济南：济南出版社，2018.1

ISBN 978-7-5488-2957-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①颜… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第004602号

---

出版人　崔　刚
项目策划　周家亮
责任编辑　张雪丽　李　晨
封面设计　胡大伟
出版发行　济南出版社
地　　址　山东省济南市二环南路1号(250002)
发行热线　0531-86922073(省内)　0531-67817923(省外)
印　　刷　肥城新华印刷有限公司
版　　次　2018年1月第1版
印　　次　2018年4月第1次印刷
成品尺寸　170 mm×240 mm　16开
印　　张　7
字　　数　100千字
定　　价　28.00元

# 打开数学世界的一扇窗

数学是科学的语言，是一切科学和技术的基础，它渗透于人类生活的各个领域，是人类思考和解决问题的工具，影响着人类对世界及自身的看法。

数学有自己的灵魂，绝不只是简单的数学概念、数学定义、数学公式和数学计算。它赋予它所发现的真理以生命，它唤起心神、澄清智慧。它让我们形成“数学方式”的理性思维，从数学的角度看问题，培养起理性思维的习惯和严密求证的精神，提高逻辑推理的能力和准确表达的意识，以及多角度思考与解决问题的素养。我们从数学中汲取的逻辑思维与理性精神，会深深铭刻在我们的头脑中，使我们在思考问题时全面而深刻，在做事时清晰而逻辑。

通过阅读构建起数学思维与数学素养，是我们编写《数学来了》这一套学科读物的目标。以阅读体味数学课堂，用阅读提升学科素养，这与当前盛行的学科阅读概念不谋而合。因此，我们立足课程，以教材为起点，结合教学进度适当扩充阅读文本，旨在拉近课堂与课外的距离，拉近阅读与学习的距离，使学生开阔知识视野、完善认知结构、提升思维能力，形成对课程的深度学习。书中的每一篇阅读文本，都是数学教学内容的精华和延伸，以打开一扇窗，提供一个全新视角，引领你去揣摩千姿百态的因式分解，赞叹数学对称之美，感触古今中外数学的算法神韵，领会数学知识与社会生活的联系……从而进入丰富多彩的数学殿堂。

我们相信，通过阅读，你们会发现，数学并不是枯燥定义的累积，也不是

烦琐公式的堆砌。我们更加相信，你们会对数学产生前所未有的兴趣和热情，从而改变学习数学的态度，提高学习数学的效率。正如诺瓦列斯所说：“纯数学是魔术家真正的魔杖。”希望你们人人都能用这根称手的数学魔杖，在知识的海洋里尽情挥洒！

# 目录

# 一　反比例函数与面积能擦出火花吗

我们都知道，反比例函数是中学数学中非常重要的基础函数，在数学学科中有着举足轻重的地位，图形面积问题也是初中数学教学的一个重点。那么，当反比例函数和图形面积问题“碰撞”后，能否擦出火花呢？

## 数学探秘

### 反比例函数与面积问题

大家都认识反比例系数 $k$，那么你是否了解它的几何意义呢？

过双曲线上任意一点作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线，所得矩形的面积 $S$ 为定值 $|k|$。这就是系数 $k$ 的几何意义。接下来，让我们一起看一下反比例函数中与三角形面积有关的图形问题。

(1)如图 1-1 所示，Rt△$ABO$ 的面积 $S=\frac{|k|}{2}$。

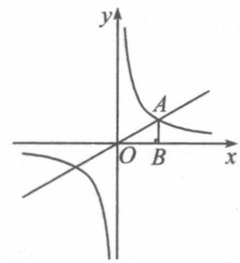



图 1-1

(2)如图 1-2 所示，Rt△$ABC$ 的面积 $S=2|k|$。

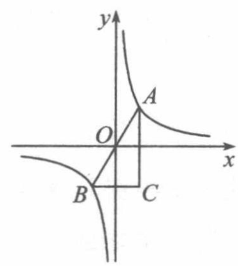



图 1-2

(3)如图 1-3 所示，△$ABM$ 的面积 $S=|k|$。

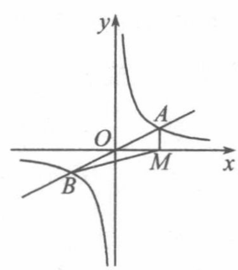



图 1-3

对于这类问题，重点是掌握 $k$ 在图形中的几何意义以及一部分基本图形及其变式图，其中，应特别注意 $k$

与图形面积的关系。

接下来，让我们回忆一下初中数学中几种常见的求面积的方法。

方法一：割补法

割补法是求解平面不规则图形面积问题最常用的方法之一，它包含三个方面的内容：一是分割原有图形成规则图形；二是粘补原有图形为规则图形；三是分割粘补兼而有之。在分割、粘补的过程中，一定要注意割下来的图形和补上去的图形的形状、大小完全一致。

方法二：辅助线法

辅助线法是根据具体情况在图形中添一条或若干条辅助线，使不规则图形转化为若干个基本规则图形，然后再采用相加法或相减法解决。

方法三：旋转法

在求一些图形的面积时，有时需要把图形绕着某点旋转，使静止时分散的条件相对集中，实现化一般图形为特殊图形的过程，从而轻松求解。

方法四：等分法

等分法就是将整个图形平均分成若干份，再看所求图形占多少份，从而求得该图形的面积。

反比例函数与面积问题相“碰撞”，不仅表现在根据反比例函数表达式求出相关图形的面积上，还表现为根据图形的面积确定反比例函数中 $k$ 的值。

【例】如图 1-4 所示，直线 $OA$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象在第一象限内交于 $A$ 点，$AB\perp x$ 轴于点 $B$，$\triangle OAB$ 的面积为 2，则 $k=$ ________。

**分析：** 根据 $k$ 的几何意义和图形面积，可以求得 $k$ 的值。

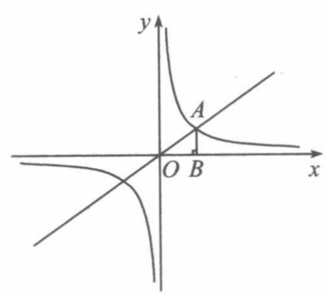



图 1-4

**解答：** 由图象知 $k>0$。

因为 $S=\frac{|k|}{2}$ 及 $S_{\triangle OAB}=2$，

所以 $\frac{k}{2}=2$，解得 $k=4$。

当你遇到由反比例函数图象中某点向坐标轴引垂线，构造出三角形或者矩形求面积的问题时，应该考虑 $k$ 的几何意义，但是需要注意 $k$ 的正负。

## 数学应用

### 规律题中的面积问题

【例 1】如图 1-5 所示，在 $x$ 轴的正半轴上依次间隔相等的距离取点 $A_1,A_2,A_3,A_4,\cdots,A_n$，分别过这些点作$x$ 轴的垂线，与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象相交于点 $P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots,P_n$。分别作 $P_2B_1\perp A_1P_1$，$P_3B_2\perp A_2P_2$，$P_4B_3\perp A_3P_3$，$\cdots$，$P_nB_{n-1}\perp A_{n-1}P_{n-1}$，垂足依次为 $B_1,B_2,B_3,B_4,\cdots,B_{n-1}$，连接 $P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,\cdots,P_{n-1}P_n$，得到一组直角三角形，即 $\mathrm{Rt}\triangle P_1B_1P_2$，$\mathrm{Rt}\triangle P_2B_2P_3$，$\mathrm{Rt}\triangle P_3B_3P_4$，$\cdots$，$\mathrm{Rt}\triangle P_{n-1}B_{n-1}P_n$，则 $\mathrm{Rt}\triangle P_{n-1}B_{n-1}P_n$ 的面积为____________。

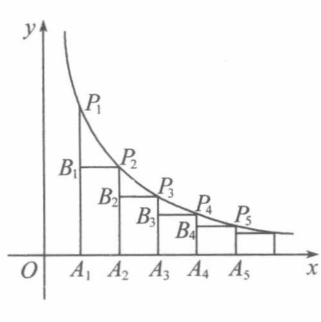



图 1-5

**分析**：观察所有的三角形，你会发现它们都有相等的底，高的长度是反比例函数图象上相邻两点的纵坐标的差，所以只要把三角形的底和高用字母表示出来，就可以找出规律。

**解答**：设 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-2}A_{n-1}=a$。

当 $x=a$ 时，$y=\frac{1}{a}$，

所以点 $P_1$ 的坐标为$(a,\frac{1}{a})$。

当 $x=2a$ 时，$y=\frac{1}{2a}$，

所以点 $P_2$ 的坐标为$(2a,\frac{1}{2a})$。

……

故 $S_{\mathrm{Rt}\triangle P_1B_1P_2}=\frac{1}{2}a(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a})$，

$S_{\mathrm{Rt}\triangle P_2B_2P_3}=\frac{1}{2}a(\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a})$，

$S_{\mathrm{Rt}\triangle P_3B_3P_4}=\frac{1}{2}a(\frac{1}{3a}-\frac{1}{4a})$，

……

$$S_{\mathrm{Rt}\triangle P_{n-1}B_{n-1}P_n}=\frac{1}{2}a\left[\frac{1}{(n-1)a}-\frac{1}{na}\right]=\frac{1}{2n(n-1)}。$$

故答案为$\frac{1}{2n(n-1)}$。

当遇到规律题的时候，不要慌张，越复杂的题干往往越简单，你只要写出前几个式子，慢慢地就会发现这道题的规律。当你遇到与反比例函数有关的面积问题时，尽量将面积用字母表示，问题就会迎刃而解。

## 割补法求面积

【例 2】如图 1-6 所示，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 与反比例函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 的图象交于 $A(m,6)$，$B(3,n)$ 两点。

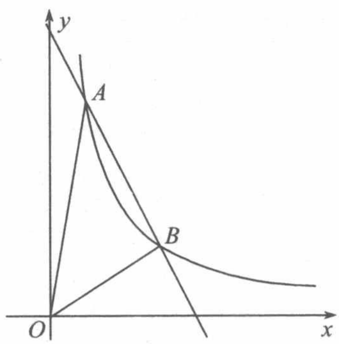



图 1-6

(1)求一次函数的解析式；

(2)根据图象直接写出使 $kx+b-\frac{6}{x}<0$ 的 $x$ 的取值范围；

(3)求△$AOB$ 的面积。

**分析**：(1)在一次函数解析式中，$k$ 和 $b$ 待定，两个未知数需要两个方程，两个方程需要两个点。借助反比例函数，可以轻松求出 $A$，$B$ 两点的坐标。

(2)在此问中，我们可以借助数形结合的思想解题。

(3)之前我们已经介绍了求面积的常用方法，此问就可以利用割补的方法来解决。

**解答**：(1)分别把点 $A(m,6)$，$B(3,n)$ 代入 $y=\frac{6}{x}(x>0)$，

得 $6m=6$，$3n=6$，

解得 $m=1$，$n=2$。

所以点 $A$ 的坐标为 $(1,6)$，点 $B$ 的坐标为 $(3,2)$。

分别把点 $A(1,6)$，$B(3,2)$ 代入 $y=kx+b(k\neq0)$，

得二元一次方程组 $\begin{cases}k+b=6,\\3k+b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=8,\end{cases}$

所以一次函数的解析式为 $y=-2x+8$。

(2)当 $0<x<1$ 或 $x>3$ 时，$kx+b-\frac{6}{x}<0$。

(3)本问有两种方法。

方法一：如图 1-7 所示，当 $x=0$ 时，$y=-2x+8=8$，

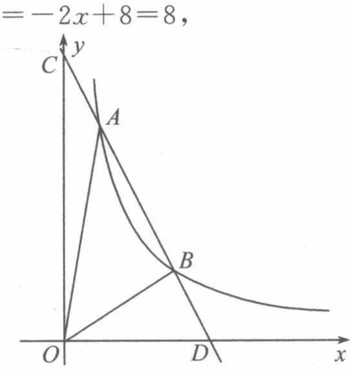



图 1-7

则点 $C$ 的坐标为(0,8)；

当 $y=0$ 时，$-2x+8=0$，

解得 $x=4$，

则点 $D$ 的坐标为(4,0)。

所以 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COD}-S_{\triangle COA}-S_{\triangle BOD}$

$=\frac{1}{2}\times4\times8-\frac{1}{2}\times1\times8-\frac{1}{2}\times4\times2$

$=8$。

方法二：如图 1-8 所示，分别过点 $B$，$A$ 向 $x$ 轴、$y$ 轴作 $BE\perp x$ 轴，$AC\perp y$ 轴，$AC$ 与 $BE$ 交于点 $D$。

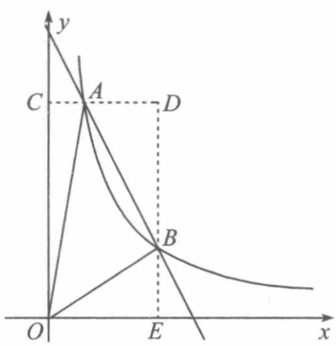



图 1-8

所以 $S_{\triangle AOB}=S_{\text{矩形}COED}-S_{\triangle COA}-S_{\triangle BOE}-S_{\triangle ABD}=3\times6-\frac{1}{2}\times1\times6-\frac{1}{2}\times3\times2-\frac{1}{2}\times4\times2=8$。

我们要掌握这两种求面积的方法并灵活运用，才能在解决类似的问题时随机应变。

当直线的解析式未知时，利用方法二求解更为方便。

## 数学文化

### 阿基米德与杠杆原理

公元前 3 世纪，古希腊科学家阿基米德在《论平面图形的平衡》一书中最早提出了杠杆原理。他首先把杠杆实际应用中的一些经验知识当作“不证自明的公理”，然后从这些公理出发，运用几何学，通过严密的逻辑论证，得出了杠杆原理。

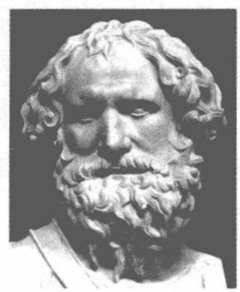


图 1-9　阿基米德

这些公理是：在无重量的杆的两端离支点相等的距离处挂上相等的重量，它们将平衡。在无重量的杆的两端离支点相等的距离处挂上不相等的重量，重的一端将下倾。在无重量的杆的两端离支点不相等距离处挂上相等的重量，距离远的一端将下倾。一个重物的作用可以用几个均匀分布的重物的作用来代替，只要重心的位置保持不变；相反，几个均匀分布的重

物可以用一个悬挂在它们的重心处的重物来代替。相似图形的重心以相似的方式分布……

正是从这些公理出发，在“重心”理论的基础上，阿基米德发现了杠杆原理，即“二重物平衡时，它们离支点的距离与重量成反比”。阿基米德对杠杆的研究不仅仅停留在理论方面，而且据此原理还进行了一系列的发明创造。

据说，他曾经借助杠杆和滑轮组，使停放在沙滩上的桅船顺利下水；在保卫叙拉古免受罗马海军袭击的战斗中，阿基米德利用杠杆原理制造了远、近距离的投石机，利用它射出各种飞弹和巨石攻击敌人，曾把罗马人阻于叙拉古城外达 3 年之久。

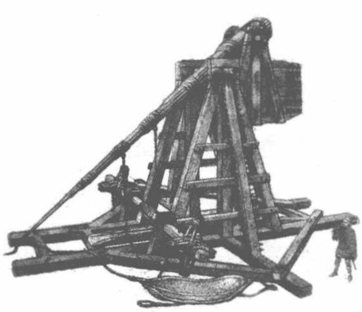


图 1-10　希腊投石机复原图

阿基米德发现的杠杆原理又称为“杠杆平衡条件”，要使杠杆平衡，作用在杠杆上的两个力的大小跟它们的力臂成反比，即“动力×动力臂＝阻力×阻力臂”，用代数式可表示为：$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$。其中，$F_1$ 表示动力，$l_2$ 表示动力臂，$F_2$ 表示阻力，$l_2$ 表示阻力臂。

从上式可看出，欲使杠杆达到平衡，动力臂是阻力臂的几倍，动力就是阻力的几分之一。

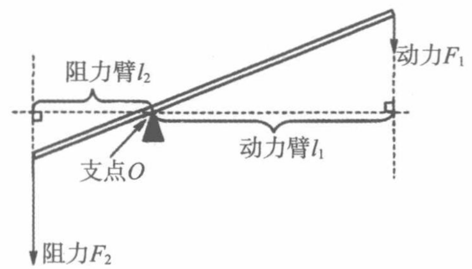



图 1-11

在使用杠杆时，为了省力，就应该用动力臂比阻力臂长的杠杆；如欲省距离，就应该用动力臂比阻力臂短的杠杆。因此，使用杠杆可以省力，也可以省距离。但是，要想省力，就必须多移动距离；要想少移动距离，就必须多费些力；要想又省力而又少移动距离，是不可能实现的。

根据上述公式，我们还可以得到公式 $F_1=\frac{F_2 l_2}{l_1}$，也可以表示成 $F_1=\frac{F_2}{\frac{l_1}{l_2}}$。由于地球的质量是一定的，也就是说阻力是一定的，所以根据反比例

函数的定义，$F_1$ 与 $\frac{l_1}{l_2}$ 成反比例，也就是说动力与动力臂、阻力臂的比值成反比例。如果杠杆的动力臂足够长，阻力臂足够短，用一定大小的力就可以举起任意重的物体。

阿基米德有这样一句流传千古的名言："给我一个支点，我可以撬动地球!"这句话不仅是催人奋进的警句，更是有着严格的科学根据的。

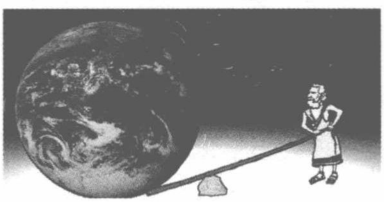


图 1-12

那么，阿基米德真能撬动地球吗?

首先，我们来计算杠杆的长度。在地球上称量质量与地球相等的物体，该物体受到的重力约为 $6\times10^{25}$ N。假如一个人能直接举起 600 N 的重物，那么根据杠杆的平衡条件，他要举起地球，就得把他的手放在这样长的一根杠杆上：杠杆的动力臂应当等于它的阻力臂的 $1\times10^{23}$ 倍。茫茫宇宙之中，哪有这么长的杠杆?

其次，假如世界上真的存在这样长的杠杆，并且找到了合适的支点，阿基米德就能举起地球吗？假如阿基米德真能将地球举起 1 mm，他的手握杠杆的一端在宇宙空间里就需移动一个大圆弧，这个弧的长度大约是 $1\times10^{20}$ m。也就是说，他按着杠杆的手要移动让人不可想象的距离。我们再来计算他用多少时间才能完成这个弧度。如果阿基米德举起的速度是 1 m/s，那么根据 $t=\frac{s}{v}=1\times10^{20}$ s，大约为 3 万亿年。

阿基米德即使是用一辈子的时间按着杠杆，也不能把地球举起像极细头发丝那样短的一段距离。

图 1-13

虽然阿基米德撬动起球只存在于理论中，但是在实际生活中，我们却实实在在地应用着杠杆原理，例如开门、骑车、曲臂运动等。

下面，让我们看一个杠杆平衡与反比例函数的生活实例。

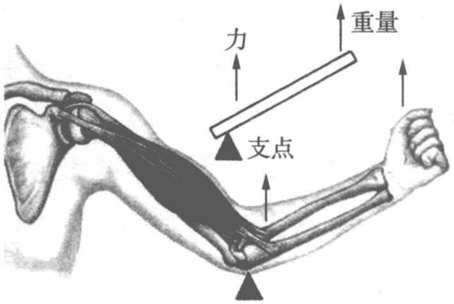


图 1-14 曲臂运动

【例】小伟想用撬棍撬动一块大石头，已知阻力和阻力臂不变，分别是 1 200 N 和 0.5 m。

(1)动力 $F$ 和动力臂 $l$ 有怎样的函数关系？

(2)当动力臂为 1.5 m 时，撬动石头至少要多大的力？

(3)若想使动力 $F$ 不超过第(2)题中所用力的一半，则动力臂至少要加长多少？


图 1-15

**解答：**(1)由杠杆原理有 $Fl=1\,200\times0.5$，即 $F=\frac{600}{l}$。

(2)当 $l=1.5$ m 时，

$F=600\div1.5=400$(N)。

(3)由(2)及题意，

当 $F=\frac{1}{2}\times400=200$(N)时，

$l=600\div200=3$(m)。

所以要加长 $3-1.5=1.5$(m)。

通过此题，你能不能利用反比例函数的知识解释一下，在使用撬棍时，为什么动力臂越长越省力呢？

## 数学好玩

### “骗人”的秤

秤，本是测定物体重量的器具，然而在实际生活中，有些不良商贩会利用秤的杠杆原理来欺骗消费者。

不良商贩用杆秤卖货的欺骗手段较多，归结起来不外乎两种，一是称量时暗动手脚，在绳纽左边或右边的秤杆上按压；一是使用做过手脚的杆秤。其实，前者往往难以欺骗精明的顾客，但后一种方法具有极大的欺骗性，对于普通顾客而言很难识别。

在这里，我们简要介绍一下前一种欺骗手法。

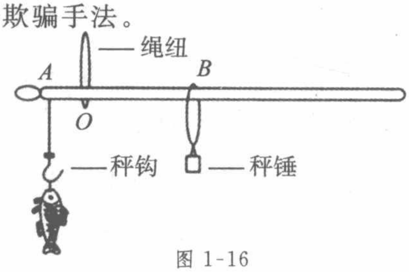


图 1-16

手抬秤杆：在称量时，有些商贩的手在滑动秤锤细绳的过程中，有意滑向刻度值大于货物的实际质量的位置，并顺手用力向上扬起秤杆，迅速抽手，秤尾由于惯性上翘，商贩会在秤尾还未下倾时，立即报出物重并放下货物。

手压秤头：有些商贩在称重时，将提秤的手指散开，用其中一根手指向下施力压住秤头，增加了物体的视重。

掌握杠杆原理，可以轻松识破这些障眼法，更好地保护我们的权益。

【参考文献】

1. 沈新家《用杠杆原理剖析杆秤卖货的欺骗手段》，《中学物理教学参考》2003 年第 7 期。

2. 汤逸平《物理学中的反比例函数》，《数理化学习（初中版）》2007 年第 7 期。

3. 刘玉杰《例谈生活中的杠杆原理》，《科学大众：科学教育》2008 年第 3 期。

4. 白福花《求不规则图形面积的几种方法》，《内蒙古教育》2012 年第 6 期。

5. 夏乾冬《给一个支点，阿基米德真能撬起地球吗?》，《初中生世界》2015 年第 30 期。

6. 刘建凤《应用反比例函数知识解决生活问题》，《初中生世界：八年级》2016 年第 8 期。

# 二　谈谈相似那点事儿

从历史上看，相似三角形很早就已经为人们所认识。公元前20世纪前后，在古巴比伦泥板文献中已经出现相似三角形的应用问题；公元前6世纪，古希腊萨莫斯岛上的工程师欧帕里诺斯在设计隧道挖掘工程时就可能运用了相似三角形的性质；公元1世纪，古希腊数学家海伦在有关著作中曾利用相似三角形的性质来解决相关测量问题；我国古代数学著作《九章算术》中的远距离测量技术也正是建立在相似三角形的性质之上。

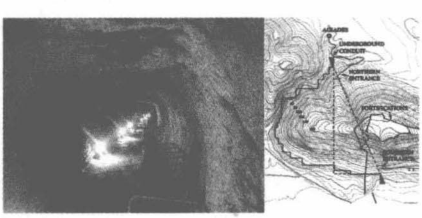


图 2-1　欧帕里诺斯隧道

“图形的相似”是初中数学的内容之一，相似三角形的判定、性质和应用是其中重要的内容。

## 数学探秘

### 相似三角形

三角分别相等，三边成比例的两个三角形叫作相似三角形。

相似三角形是几何中重要的模型之一，是全等三角形的推广。下面，让我们一起回顾一下相似三角形的相关知识。

一、相似三角形的判定

**定理** 1：两角对应相等的两个三角形相似。

**定理** 2：两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似。

**定理** 3：三边成比例的两个三角形相似。

通过观察这三条定理，我们不难发现，其中涉及的量有两种：边和角。按照这个分类，第一条定理只涉及角，第三条定理只涉及边，第二条定理边和角都有。

我们假设：当我们欲证明两个三角形相似，而条件中找到了相等的角时，可能用到的判定方法会是定理1