

博弈论

谢政 戴丽 李建平 编著

高等教育出版社

非外借

博 弈 论

谢政 戴丽 李建平 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是博弈论的入门教材,涵盖了博弈论中最基本和最重要的概念、理论与方法,对大量的经典案例进行了详细的数学建模与分析,对各种类型的博弈都给出了具体的求解过程。全书共六章,包括概论、完全信息静态博弈、不完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息动态博弈和合作博弈。全书力求用直观的实例引出基本概念,用准确、精练的语言描述基本内容,用浅显的知识和经典的案例揭示深刻内涵,用严谨、简明的推理证明基本原理和方法。

本书可作为应用数学类、经济类、管理类专业本科生或研究生教材,也可供对博弈论感兴趣的其他读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

博弈论/谢政,李建平,戴丽编著. --北京:高等教育出版社,2018.1

ISBN 978-7-04-048815-9

I. ①博… II. ①谢… ②戴… ③李… III. ①博弈论-高等学校-教材 IV. ①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 274780 号

策划编辑 李晓鹏
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 李晓鹏
责任校对 窦丽娜

封面设计 王 鹏
责任印制 耿 轩

版式设计 马 云

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京七色印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13.5
字 数 240 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2018年1月第 1版
印 次 2018年1月第 1次印刷
定 价 27.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 48815-00

博弈论

谢 政

戴 丽

李建平

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1233257>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号 (20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



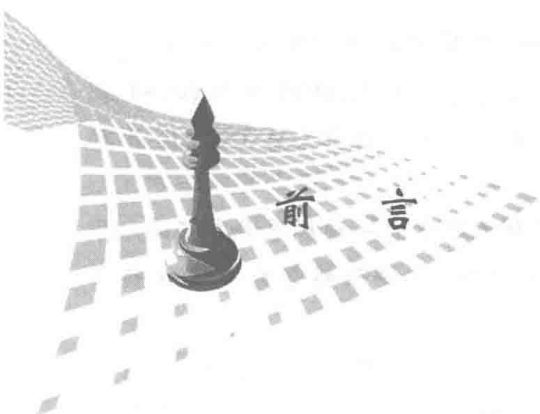
课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用

<http://abook.hep.com.cn/1233257>



前言

博弈也叫对策,是指带有竞争或对抗性质的行为。博弈论(对策论)就是研究竞争或对抗的各方是否存在着最合理的行为方案,以及如何找到这个合理的行为方案的数学理论和方法。

朴素的博弈思想在中国古代源远流长,《孙子兵法》和《三十六计》中有许多博弈案例,田忌赛马便是其中之一。在西方,Cournot(1838)、Edgeworth(1881)和Bertrand(1883)运用数学模型研究了经济学中的博弈;Zermelo(1913)用逆向归纳方法讨论过国际象棋的下法;Borel(1924)用数学语言刻画了博弈问题,提出了策略和混合策略等概念,并试图把它们作为应用数学的分支加以系统研究;von Neumann(1928)首次证明了博弈论基本定理——最大最小定理,至此现代博弈论正式诞生。

Von Neumann 和 Morgenstern(1944)合著的《博弈论和经济行为》一书标志着博弈理论系统初步形成。Nash(1950)提出了非合作博弈的均衡局势的概念,解决了混合均衡的存在性问题,奠定了非合作博弈研究的基石;Selten(1965)提出了子博弈精炼 Nash 均衡的概念,对动态博弈进行了开拓性的研究;Harsanyi(1967)通过将不完全信息静态博弈转换成完全但不完美信息的动态博弈,提出了 Bayes-Nash 均衡的概念,构建了不完全信息博弈的基础;Selten(1975)将不完全信息引入动态博弈,提出了精炼 Bayes 均衡的概念。他们的工作形成了非合作博弈的完整体系。对于合作博弈,继 von Neumann 和 Morgenstern(1944)提出的稳定集的概念之后,Nash(1950)研究了二人合作博弈的谈判解;Gillies(1953)提出了核心的概念;Shapley(1953)深入地研究了核心非空的充要条件,并提出了合作博弈的值的概念,由此证明了合作博弈的解的存在性;Aumann 和 Maschler(1964)提出了谈判集的概念;Davis 和 Maschler(1965)提出了核的概念;Schmeidler

(1969)提出了核仁的概念。

博弈论在深化和完善自身理论体系的同时,对现代经济学的发展产生了重大而又深刻的影响,引起了现代经济学根本性的变革。因此,1994年的 Nobel 经济学奖授予了 Harsanyi, Nash 和 Selten 三位博弈论学者。后来又有 13 位经济博弈论学者六次荣获 Nobel 经济学奖。

博弈论是运筹学的一个分支,它不但已成为经济学的一种标准分析工具,而且在生物学、管理学、国际关系、计算机科学、政治学、军事战略等许多学科中都有着广泛的应用。

作为博弈论的入门教材,本书涵盖了博弈论中最基本和最重要的概念、理论与方法,对大量的经典案例进行了详细的数学建模与分析,对各种类型的博弈给出了具体的求解过程。阅读本书需要微积分、线性代数、概率论和线性规划的基础知识。

第 1 章给出了博弈的特征与分类,准确地定义了三种基本博弈模型,严格地论证了不同博弈模型间的关系,最后回顾了博弈论的发展简史。第 2 章至第 5 章系统地介绍了非合作博弈的主要内容。第 2 章按照从一般到特殊的顺序讨论策略型完全信息静态博弈。给出了 Nash 均衡的定义及其存在性定理,以及一些特殊博弈的 Nash 均衡的求法和应用,讨论了有限博弈的混合 Nash 均衡的定义、存在性和性质,分别介绍了求解双矩阵博弈的 Lemke-Howson 算法和求解矩阵博弈的图解法、线性方程组方法、线性规划方法。第 3 章讨论不完全信息静态博弈,通过 Harsanyi 转换给出了 Bayes 博弈的定义,介绍了 Bayes-Nash 均衡、混合 Bayes-Nash 均衡及存在性,讨论了 Bayes 博弈的应用,以及求均衡的方法,还解释了 Bayes-Nash 均衡与混合策略 Nash 均衡的关系。第 4 章讨论完全信息动态博弈,提出了子博弈精炼 Nash 均衡的概念,利用逆向归纳法的思想给出了完全且完美信息动态博弈的解法以及应用,并且通过将阶段博弈看作一个整体,把重复博弈和两阶段博弈化成完全且完美信息动态博弈求解。第 5 章讨论最为复杂的不完全信息动态博弈,首先通过三个典型的例子说明 Nash 均衡、Bayes-Nash 均衡和子博弈精炼 Nash 均衡都不能作为不完全信息动态博弈的解,然后分析讨论了推断、序贯理性原则以及推断的合理性要求,并由此定义了不完全信息动态博弈的精炼 Bayes 均衡及应用,最后介绍了非常重要的信号博弈及其应用。第 6 章集中讨论合作博弈,首先介绍了特征函数与分配的概念,再分别从分配优越的角度定义了核心和稳定集,从超出值的角度定义了核仁和核,从讨价还价的角度定义了谈判集,从三条公理出发定义了 Shapley 值,然后提出了双矩阵合作博弈的个体合理性条件、群体合理性条件和公平性条件,并由此给出了其谈判解的简洁定义,最后讨论了合作博弈的应用。

本书力求做到:用直观的实例引出基本概念,用准确、精练的语言描述基本内容,用浅显的知识和经典的案例揭示深刻内涵,用严谨、简明的推理证明基本原理和方法,使得读者既能了解各种博弈模型的背景和特征,还能掌握博弈论的基本理论与方法,更能学会用博弈论的知识解决各种实际问题。

本书的第1、2、3、4、6章由谢政编写,第5章由戴丽编写,应用案例由李建平组织编写。研究生王硕、龚智强和谢宗霖分别参与了第3章、第4章和应用案例的编写,在此表示感谢。

编著者

2016年12月



第 1 章 概论	1
1.1 博弈的特征及分类	1
1.1.1 博弈的例子	1
1.1.2 博弈的特征	2
1.1.3 博弈的分类	3
1.2 博弈的基本模型	4
1.2.1 策略型博弈	4
1.2.2 展开型博弈	6
1.2.3 特征函数型博弈	9
1.3 基本模型之间的关系	10
1.3.1 策略型化为展开型	11
1.3.2 展开型化为策略型	12
1.3.3 策略型化为特征函数型	13
1.4 博弈论的产生与发展过程	14
习题 1	16
第 2 章 完全信息静态博弈	18
2.1 Nash 均衡	18
2.1.1 Nash 均衡的定义	18

2.1.2 二人有限博弈的 Nash 均衡	20
2.1.3 应用案例——俾斯麦海之战	22
2.2 无限博弈的 Nash 均衡及其应用	23
2.2.1 无限博弈的 Nash 均衡	23
2.2.2 凹凸博弈的 Nash 均衡	24
2.2.3 无限博弈 Nash 均衡的应用	25
2.3 混合 Nash 均衡	29
2.3.1 混合策略	29
2.3.2 混合 Nash 均衡及其存在性	30
2.3.3 混合 Nash 均衡的性质	30
2.3.4 策略优超	34
2.4 双矩阵博弈	36
2.5 矩阵博弈	42
2.5.1 图解法	43
2.5.2 线性方程组方法	45
2.5.3 线性规划方法	47
习题 2	51

第 3 章 不完全信息静态博弈

3.1 Harsanyi 转换与 Bayes 博弈	55
3.1.1 罪犯两难的拓展	55
3.1.2 Harsanyi 转换	56
3.1.3 Bayes 博弈	57
3.2 Bayes-Nash 均衡	59
3.2.1 Bayes-Nash 均衡的定义	59
3.2.2 Bayes-Nash 均衡的存在性	65
3.2.3 应用案例——古巴导弹危机	65
3.3 混合 Bayes-Nash 均衡	68
3.4 无限 Bayes 博弈的应用	71
3.4.1 不完全信息的 Cournot 双寡头竞争	71
3.4.2 一级密封拍卖	73
3.4.3 双向报价拍卖	75
3.5 Bayes-Nash 均衡与混合 Nash 均衡的关系	77

习题 3	79
第 4 章 完全信息动态博弈	83
4.1 完全信息动态博弈的 Nash 均衡	83
4.2 完全且完美信息动态博弈	85
4.2.1 子博弈精炼 Nash 均衡和逆向归纳法	85
4.2.2 应用案例——张绣降曹	88
4.2.3 完全且完美信息无限动态博弈的应用	90
4.3 重复博弈	93
4.3.1 阶段博弈有唯一 Nash 均衡的有限重复博弈	94
4.3.2 阶段博弈存在多个 Nash 均衡的有限重复博弈	95
4.3.3 阶段博弈有唯一 Nash 均衡的无限重复博弈	97
4.3.4 阶段博弈不存在 Nash 均衡的有限重复博弈	103
4.4 两阶段可观察动态博弈	104
习题 4	107
第 5 章 不完全信息动态博弈	112
5.1 不完全信息动态博弈的例子	112
5.1.1 黔驴技穷	113
5.1.2 市场进入	115
5.1.3 市场进入的拓展	116
5.2 精炼 Bayes 均衡	118
5.2.1 推断	118
5.2.2 序贯理性	121
5.2.3 推断的计算及合理性	122
5.2.4 精炼 Bayes 均衡的定义	123
5.2.5 应用案例——越南抗法战争	127
5.3 信号博弈	129
5.3.1 信号博弈的基本概念	129
5.3.2 信号博弈均衡的分析	130
5.3.3 信号博弈均衡的求法	131
5.4 信号博弈的应用	135

5.4.1 劳务市场	135
5.4.2 二手车交易	138
习题 5	141
 第 6 章 合作博弈	 145
6.1 特征函数与分配	145
6.1.1 特征函数	145
6.1.2 本质博弈与非本质博弈	146
6.1.3 分配的定义	147
6.1.4 分配的优超	148
6.2 核心与稳定集	149
6.2.1 核心的定义及性质	149
6.2.2 几类博弈的核心	150
6.2.3 稳定集	154
6.3 核仁与核	157
6.3.1 核仁	158
6.3.2 核	161
6.4 谈判集	165
6.5 Shapley 值	169
6.6 双矩阵合作博弈的谈判解	175
6.6.1 谈判问题	176
6.6.2 恐吓问题	178
6.7 合作博弈的应用案例	181
6.7.1 费用分摊	181
6.7.2 邳城之惑	183
6.7.3 赤壁鏖兵	185
习题 6	187
 参考文献	 190
 名词索引	 194



第1章 概 论

现实生活中处处存在着竞争和对抗,博弈论就是用数学理论和方法研究带有竞争或对抗性质的现象.博弈论是运筹学的一个重要分支,它已经成为经济学的分析工具之一,并在生物学、管理学、国际关系、计算机科学、政治学和军事学等诸多学科领域都有着极为广泛的应用.

本章从实例出发,提出博弈的特征及分类,给出博弈的三种基本数学模型,并指出它们之间的相互关系,最后还简要地介绍了博弈论的产生与发展过程.

1.1 博弈的特征及分类

博弈的原意是对弈,即下棋.对弈时,棋手们既要有良好的心态和理性的思维,更要仔细揣摩对手的意图,才能在错综复杂的棋局中选择到对自己最为有利的下法.“人生如棋”,作为生存竞争中的棋手,人们要在一张张生活的棋盘上同各式各样的对手博弈.因此从广义上讲,博弈是一种带有竞争或对抗性质的行为.

1.1.1 博弈的例子

例 1.1(田忌赛马) 战国初期,齐国的国王与一名叫田忌的大将赛马.双方

各出三匹马,分别为上(等)马、中(等)马、下(等)马各一匹.比赛时,每次双方各自从自己的三匹马中任选一匹马来比,输者付给胜者一千两黄金,共赛三次.当时,三种不同等级的马相差非常悬殊,而同等级的马,齐王的比田忌的要强.谋士孙臆给田忌出了个主意:每次比赛先弄清楚齐王参赛的是哪种等级的马,然后用下马对齐王的上马,用上马对齐王的中马,用中马对齐王的下马.结果田忌二胜一负,赢得一千两黄金.由此看来,两人采取什么样的行动对胜负是至关重要的. □

例 1.2(手心手背游戏) 三个人做一个游戏,三个人同时伸出手心或手背.如果三人都伸出手心或都伸出手背,则三个人的所得全为 0;如果有两人伸出的同是手心或同是手背,则另一人给这两人每人 1 元.三个人应如何选择行动? □

例 1.3(市场进入) 某种产品的市场需求分为旺盛和疲软两种状态,统计分析表明,需求旺盛的概率为 p ,疲软的概率为 $1-p$.企业 1 是潜在的进入者,它不了解具体的需求状态,只知道需求的概率分布,它可以选择进入或不进入市场.企业 2 是在位者,它知道市场的真实需求状态,在观察到企业 1 的进入行动后,需要在容许或抵制进入中做出选择.当市场需求旺盛时,若企业 1 进入且企业 2 容许,两企业的利润均为 5;若企业 1 进入但企业 2 抵制,需付出一定的成本,两企业的利润分别为 0 和 3;若企业 1 不进入,两企业的利润分别为 0 和 10.当市场需求疲软时,若企业 1 进入且企业 2 容许,会两败俱伤,两企业的利润均为 -1;若企业 1 进入但企业 2 抵制,两企业的利润分别为 0 和 1;若企业 1 不进入,两企业的利润分别为 0 和 3.两企业应选择什么样的行动? □

1.1.2 博弈的特征

上面所描述的三个例子具有以下特征:

(1) 局中人.能理性地决定自己行动的参加者称为局中人,它可以是人、法人或机构、团体.

田忌赛马问题的局中人是齐王和田忌,没有决定权的孙臆不是局中人;手心手背游戏的局中人是三个人;市场进入问题的局中人是企业 1 和企业 2.

(2) 行动.每个局中人都有明确的、可以选择的行动,其行动的全体称为行动集.

田忌赛马问题中的行动是每一次牵哪一种马出赛;手心手背游戏中的行动是出手心还是手背;市场进入问题中的行动是进入或不进入,以及容许或抵制.

(3) 行动次序.必须事先明确各局中人选择行动的先后次序.

田忌赛马问题是齐王和田忌同时行动,手心手背游戏是三人同时行动,市场进入问题是企业 1 先选择行动、企业 2 后选择行动.

(4) 支付. 各局中人从博弈中所获得的利益称为支付,也叫赢得. 用实数表示支付.

田忌赛马问题中的支付是两人各赢得的黄金,手心手背游戏中的支付是三人各赢得的金钱,市场进入问题中的支付是利润.

(5) 信息. 信息是指局中人所掌握的有助于自己选择行动的知识,它包括局中人的集合,每个局中人的行动集、行动次序、支付,以及局中人选择行动时此前各局中人已选择的行动(即进程). 其中最重要的是支付信息和进程信息.

在田忌赛马问题中,齐王和田忌都非常了解双方在每种情况下的支付,即支付信息成为公共知识. 手心手背游戏中三个人也明白彼此的支付信息. 但是在市场进入问题中,当企业1进入、企业2容许时,若市场旺盛,则两个企业的利润均为5;若市场疲软,则两个企业的利润均为-1. 由于不知道市场的需求状态,因此企业1不清楚两个企业的实际利润,即支付信息.

在一些行动有先后次序的博弈中,每个局中人选择行动时都能看到之前各局中人已采取的全部行动,即每个局中人都了解进程信息,例如下象棋就是如此. 下暗翻军棋时,两个局中人只知道对方移动了某些棋子的位置,但不清楚移动的究竟是军官、工兵还是炸弹,即彼此不完全了解进程信息.

一般地,我们将具有上述5个特征的行为称为博弈或对策.

博弈假定每个局中人为了达到各自的目标和利益,能够在充分考虑各局中人之间行动的相互作用及其可能影响的基础上,做出对自己最为有利或最为合理的选择.

1.1.3 博弈的分类

按照不同的原则,博弈有不同的分类.

如果局中人之间互不合作,不允许事先有任何交换、传递信息的行为,不允许订立任何强制性约定,则称为非合作博弈. 而合作博弈是指局中人可以事先商量,互通信息,协调行动,因而导致一些局中人进行合作而结成一个联盟.

如果所有局中人都同时独立选择行动,或者后行动的局中人选择行动时不知道先行动的局中人选择了何种行动,则称为静态博弈,否则称为动态博弈. 田忌赛马问题和手心手背游戏是静态博弈,市场进入问题是动态博弈,棋牌游戏一般也是动态博弈.

如果每个局中人的行动集和支付成为所有局中人的公共知识,则称为完全信息博弈,否则称为不完全信息博弈. 田忌赛马问题和手心手背游戏都是完全信息静态博弈,市场进入问题是不完全信息动态博弈.

对于动态博弈,如果每个局中人在选择行动时都了解这之前博弈进行的全过程,即进程信息成为共同知识,则称为完美信息博弈,否则称为不完美信息博弈.下象棋是完美信息动态博弈,下暗翻军棋是不完美信息动态博弈.

只有一个局中人的博弈称为单人博弈,它研究局中人在给定的条件下如何从其行动集中做出最优的选择,即单人博弈是一个最优化问题,严格说来这不属于博弈论研究的对象.两个局中人的博弈称为二人博弈.两个以上局中人的博弈称为多人博弈. n 个局中人的博弈称为 n 人博弈.田忌赛马问题和市场进入问题是二人博弈,手心手背游戏是多人博弈.

如果一个博弈中每个局中人的行动集以及选择行动的次数都是有限的,则称之为有限博弈,否则称为无限博弈.田忌赛马问题、手心手背游戏和市场进入问题都是有限博弈.

如果一个博弈在任何情况下所有局中人的支付之和均为零,则称之为零和博弈.田忌赛马问题和手心手背游戏都是零和博弈,而市场进入问题则不是.

如果一个博弈在任何情况下所有局中人的支付之和均为同一个常数,则称之为常和博弈.显然,零和博弈是常和博弈.

1.2 博弈的基本模型

博弈论是运用数学模型和逻辑推理,通过求解和分析,探讨局中人在竞争对抗环境下的决策行为.不同的博弈问题有不同的数学模型.博弈的基本数学模型有策略型、展开型和特征函数型等三种.

1.2.1 策略型博弈

策略型博弈包含三个要素:局中人集、策略集、支付函数.

一个博弈中所有局中人的全体称为局中人集. n 个局中人的集合常常记为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

一个博弈中,可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略.每个局中人 i 都有自己的策略集 $S_i, i \in N$,它是局中人 i 的所有策略的全体.

在田忌赛马问题中,如果用(上,中,下)表示以上马、中马、下马依次参赛这样一个次序,则是一个完整的行动方案,即一个策略.齐王和田忌均有六个策略:(上,中,下),(上,下,中),(中,上,下),(中,下,上),(下,中,上),(下,上,

中),依次把齐王的策略记为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, 把田忌的策略记为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$.

在手心手背游戏中,第1人有两个策略:伸出手心或手背,记为 α_1, α_2 ;第2人和第3人也有两个策略:伸出手心或手背,分别记为 β_1, β_2 以及 γ_1, γ_2 . 即

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, S_2 = \{\beta_1, \beta_2\}, S_3 = \{\gamma_1, \gamma_2\}.$$

值得注意的是,这里的策略强调完整性,博弈中某一步所采取的局部行动方案不是一个策略,例如,在田忌赛马问题中,齐王的三匹马的出场次序是一个策略,但每次牵哪匹马出赛只是一个策略的一部分,而不是一个完整的行动方案.

从每个局中人的策略集中各取一个策略所构成的向量称为一个局势或策略组合. 例如,田忌赛马问题中的 (α_1, β_6) 是一个局势,它表示齐王的上马、中马、下马依次对田忌的下马、上马、中马;手心手背游戏中的 $(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2)$ 是一个局势,它表示第1个人出手心,第2个人和第3个人均出手背.

一个局势确定了每个局中人的支付,从而每个局中人的支付都是局势的实值函数,因此支付又称为支付函数. 局中人 i 的支付函数记为 $u_i, i \in N$.

在一个局势 s 下, n 个局中人的支付构成的 n 维实向量 $(u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s))$ 称为支付向量.

对于田忌赛马问题,支付函数可以写成一个矩阵:

$$\begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \\ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} (3, -3) & (1, -1) & (1, -1) & (1, -1) & (1, -1) & (-1, 1) \\ (1, -1) & (3, -3) & (1, -1) & (1, -1) & (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (-1, 1) & (3, -3) & (1, -1) & (1, -1) & (1, -1) \\ (-1, 1) & (1, -1) & (1, -1) & (3, -3) & (1, -1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (1, -1) & (-1, 1) & (1, -1) & (3, -3) & (1, -1) \\ (1, -1) & (1, -1) & (1, -1) & (-1, 1) & (1, -1) & (3, -3) \end{array} \right], \end{array}$$

其中矩阵的 (i, j) 元为在局势 (α_i, β_j) 下齐王和田忌的支付向量 $(i, j=1, 2, \dots, 6)$. 例如,矩阵的 $(1, 6)$ 元 $(-1, 1)$ 表示在局势 (α_1, β_6) 下齐王的支付为 -1 , 田忌的支付为 1 , 即齐王输一千两黄金, 田忌赢一千两黄金.

实际上,二人有限博弈的支付函数都能写成上述矩阵的形式:行对应着局中人1的策略、列对应着局中人2的策略; (i, j) 元表示局中人1取第 i 个策略、局中人2取第 j 个策略时的支付向量. 这个矩阵称为二人有限博弈的支付矩阵.

例 1.4 (罪犯两难, 又称囚徒困境) 甲、乙两人因犯罪而牵涉于某案件中, 但法院只掌握其部分罪证. 如果他们都承认犯罪, 则各判刑 5 年; 如果两人都不承认, 则他们将作为较小的违法案件的被告而各判 1 年; 如果一人承认, 而另一人拒不承认, 则承认者可免于刑事处罚, 而不承认者将判刑 8 年. 问甲、乙应如何

选择才能对自己有利?

解 罪犯两难问题是二人有限博弈. 局中人是罪犯甲和乙, 他们的策略都是承认、不承认, 支付矩阵为

$$\begin{array}{cc}
 & \text{罪犯乙} \\
 & \begin{array}{cc} \text{承认} & \text{不承认} \end{array} \\
 \text{罪犯甲} & \begin{array}{cc} \text{承认} & \text{不承认} \\ \text{不承认} & \end{array} \begin{bmatrix} (-5, -5) & (0, -8) \\ (-8, 0) & (-1, -1) \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

对于手心手背游戏, 局势的全体为 $S_1 \times S_2 \times S_3$, 即共有 8 个局势. 支付向量如表 1.1 所示.

表 1.1 手心手背游戏的支付向量

局势	支付向量
$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$	$(0, 0, 0)$
$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2)$	$(1, 1, -2)$
$(\alpha_1, \beta_2, \gamma_1)$	$(1, -2, 1)$
$(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2)$	$(-2, 1, 1)$
$(\alpha_2, \beta_1, \gamma_1)$	$(-2, 1, 1)$
$(\alpha_2, \beta_1, \gamma_2)$	$(1, -2, 1)$
$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)$	$(1, 1, -2)$
$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$	$(0, 0, 0)$

通过上面的具体例子, 我们对局中人集、策略集和支付函数等基本要素有了一定的了解, 下面来定义策略型博弈.

定义 1.1 称三元组 $\Gamma = (N, \{S_i\}, \{u_i\})$ 为策略型博弈, 其中 N 为局中人集, S_i 和 u_i 分别为局中人 i 的策略集和支付函数, $i \in N$.

1.2.2 展开型博弈

为了直观起见, 可以将例 1.3 中市场进入问题表示为如图 1.1 的树形图. 这个树形图由圆圈和实线段组成, 圆圈称为顶点, 实线段称为边.

首先给出树形图的数学描述.

树形图记为 $G = (X, E)$, 其中顶点集 X 和边集 E 都是非空有限集.

$\forall e \in E$, e 必与两个相异顶点 x_i 和 x_j 相对应, 记作 $e = (x_i, x_j)$, 并称 x_i 为 e 的尾, x_j 为 e 的头; e 称为 x_i 的出边, 也称为 x_j 的入边; 还称 x_i 与 x_j 相邻. 在树形图的图形中, 一个顶点的入边对应的实线段画在该顶点对应的圆圈的上方, 一个顶点的出边对应的实线段画在该顶点对应的圆圈的下方. 在图 1.1 中, 顶点 x_1 是