近代物理实验

主编 张立辉

科学出版社

近代物理实验

主　编　张立辉
副主编　牛晓娟　田　玉

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书选编了近代物理发展过程中起过重大作用的著名实验，以及近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验. 全书共 21 个实验，分上篇和下篇. 上篇由误差分析与数据处理、弗兰克-赫兹实验、黑体辐射、密立根油滴实验、钠原子光谱、塞曼效应、脉冲核磁共振、气体放电中等离子体的研究、光拍频法测光速、声光效应与超声光栅测声速、X 射线实验、激光拉曼光谱 11 个实验组成. 下篇由巨磁电阻效应、LED 光电特性、光电传感器件的光谱特性、太阳能光伏电池实验、液晶电光效应、真空镀膜及膜厚测量、磁控溅射镀膜、化学气相沉积技术制备纳米材料、材料光学性能测试分析、接触角测量实验 10 个实验及两个附录组成，编排与上篇基本相同. 上篇偏重于一些著名实验，下篇偏重于光和材料应用实验，以及开放性物理虚拟仿真实验教学系统介绍和综合创新实验范例说明. 本书重点在于阐述实验的物理思想和方法，注重培养学生实验能力和良好的实验素质，并在实验技能和创新方面获得必要的训练.

本书可作为普通理工科大学物理专业或与物理相关专业“近代物理实验”课的教学用书，也可作为从事实验教学教师和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

近代物理实验/张立辉主编. —北京：科学出版社，2017.9
ISBN 978-7-03-054667-8

Ⅰ. ①近… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①物理学-实验 Ⅳ. ①O41-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 238525 号

责任编辑：窦京涛/责任校对：彭珍珍 杜子昂
责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张：30
字数：710 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“近代物理实验”是为物理类专业高年级学生开设的一门综合性较强的基础实验课程. 该课程以一些著名经典实验和在近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验为教学内容. 它不仅能使学生掌握如何用实验方法观察物理现象、研究物理规律，更能够让学生了解近代实验技术在许多科学研究领域与工程实践中的广泛应用，有助于开阔学生的视野，培养他们理论联系实际，以及刻苦学习的钻研精神.

由于该课程的知识面广、难度大，所需的实验装置比较昂贵，所以一般高校，特别是地方院校开设该课程困难较大. 为此，我们吸取近十年来开设该实验课程的经验，结合当前科技发展和教学改革精神，重新编写了本书，并结合江汉大学网上在线课程，为一般院校(特别是地方应用型院校)提供一本较容易接受的近代物理实验教材.

本书在选题方面希望做到基础与应用并重，既考虑现代应用研究的前沿性，又照顾到传统的训练题材. 因此，在保证基础物理内容的同时，注重加强应用技术，特别是光和材料方面的选题，以培养学生应用物理知识、开展创新思维和解决实际问题的能力. 本书 21 个实验中，不但有在近代物理发展过程中起过重大作用的一些著名实验，也有在近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验. 本书结合学生创新能力培养，吸收了一些综合创新实验范例，并介绍江汉大学开放性物理虚拟仿真实验教学系统.

本书的出版得到了教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会桑建平教授的关注和支持，并提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢.

实验教学工作是一项群体性的工作，此书的编写及实验内容的改进、改革都凝聚着众多同志的心血. 对于本书的编写和出版，江汉大学校、院领导给予了大力支持. 近代物理实验室的全体人员及相关专业的老师做了很多的工作. 在此我们谨向他们致以诚挚的谢意.

根据我们的经验，在课时安排上，每个实验用 4～5 个学时，其中 1 个学时教师检查预习情况，学生熟悉实验设备，并完善预习报告，3～4 个学时做实验，效果较好. 这样更有利于随时发现问题和改正错误、逐步掌握仪器设备的操作和使用方法，尽可能获得准确的测量结果，因此要求学生在上课前做好充分的预习工作.

参加本书编写工作的有近代物理实验室的张立辉、牛晓娟、田玉、谭小平、涂亚芳和徐彬. 实验一、实验二由张立辉执笔，实验三～实验十二、实验十七由牛晓娟执笔，实验十三～实验十六、实验十八～实验二十一由田玉执笔，误差分析与数据处理、附录 A 和附录 B 由张立辉执笔. 本书由张立辉统稿、定稿.

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2017 年 8 月

目　　录

上　　篇

下　　篇

上　篇

误差分析与数据处理

物理实验离不开对各种物理量的测量，测量的结果总是或多或少地偏离真值，而且都毫无例外地包含一定数量的测量误差，没有误差的测量结果是不存在的. 测量误差存在于一切测量中，贯穿于测量的全过程. 无论在实验的设计阶段(确定实验方法、选择测量仪器和测量条件)，还是在实验的操作、控制及实验后对测量数据进行分析处理的过程，均需要运用误差的知识，以最大限度地减少误差，使实验结果更接近于被测量量的真值，做到能正确地表达实验结果，并做出科学的结论.

在近代物理实验中，通常要用到较为综合的实验技术，以及较为复杂的实验设备，其测量值有些比较精确，有些具有明显的统计涨落，其测量过程有些需要严格控制条件，有些只能获取微弱的信息……. 因此，只有提高误差理论水平，才能理解好实验设计，从而有效地进行实验测量和数据处理，对实验结果做出正确评价和分析.

不确定度是测量结果的测度，没有不确定度说明，测量结果将无从比较. 1993 年，国际计量局(BIPM)等 7 个国际组织发表了《测量不确定度表示指南》. 这一权威性文献，对计量和科学实验工作极其重要. 下面我们从误差和不确定度的基本概念开始，着重介绍常用的误差理论分析和数据处理知识，阐述误差分析的概率统计理论基础. 希望帮助读者提高实验误差分析和数据处理能力，学会用不确定度表示实验测量结果.

一、测量误差与不确定度

当我们对某一物理量进行测量时，总会受到测量环境、方法、仪器及测量者等诸多因素的影响，使得测量值偏离真值，即相对于真值存在着测量误差.

$$\text{测量误差} = \text{测量值} - \text{真值}$$

何谓真值？真值就是在特定条件下一个物理量客观存在的量值，与测量所用的理论方法及仪器无关. 当被测量的过程完全确定，且所有测量的不完善性完全排除时，测量值就等于真值. 这就是说，真值是一个理想的概念，只有通过完善的测量才能获得. 然而，严格完善的测量难以做到，故真值很难确定.

在实践中，有些物理量的真值或从相对意义上来说的真值是可以知道的，这有如下几种：

(1) 理论真值：理论公式表达值或理论设计值等.

(2) 计量单位制中的约定真值：国际单位制所定义的 7 个基本单位，根据国际计量大会的共同约定，凡满足上述定义条件而复现出的有关量值.

(3) 标(基)器相对真值：凡高一级标准器的误差是低级或变通测量仪器误差的 $\frac{1}{20}\sim\frac{1}{3}$ 时，可认为前者是后者的相对真值.

在科学实验中，真值是在无系统误差的情况下，观测次数无限多时所求得的平均值. 但实际测量总是有限的，故用有限次测量所求得的平均值作为近似真值，又称最佳估计值、约定值或参考值.

1. 误差(error)

1) 误差的定义：量值与真值之间的差异

(1) 绝对误差(absolute error). 某物理量的测量值与其真值之差称为绝对误差(ε)，简称误差，它是测量值偏离真值大小的反映. 设被测物理量的真值为 x_0，则通过直接测量或间接测量得到的物理量的测量值 x 的绝对误差为

$$\varepsilon = x - x_0 \tag{0-1}$$

(2) 相对误差(relative error). 绝对误差与真值的比值所表示的误差大小称为相对误差. 真值不能确定时用最佳估计值，即多次测量的算术平均值 $\bar{x}$. 相对误差为

$$E = \frac{\varepsilon}{\bar{x}} \times 100\% \tag{0-2}$$

当绝对误差很小，即 $\frac{x}{\varepsilon} \gg 1$ 时，$E = \frac{\varepsilon}{x} \times 100\%$，由此可见，相对误差是评价测量值准确与否的客观标准.

相对误差还有一种简便实用的形式——引用误差. 它在多挡或连续刻度的仪表中应用广泛. 引用误差定义为

$$引用误差 = \frac{绝对误差}{仪表量程} \times 100\%$$

其中，绝对误差为仪表量程范围内可能出现的最大绝对误差.

在热工、电工仪表中，正确度等级一般都是用引用误差来表示的，通常分成 0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5 和 5 七级，这些数值表示该仪表最大引用误差的大小，但并不能认为该仪表在各个刻度上的测量都具有如此大的误差. 如某仪表的正确度等级为 S 级，即表明该仪表的最大引用误差不超过 $S\%$，其满量程的刻度值为 X，实际测量值为 $x(x \leqslant X)$，则

$$\varepsilon \leqslant X \cdot S\%, \quad E \leqslant \frac{X}{x} \cdot S\%$$

故 x 越接近 X，其准确度越高；x 越远离 X，其准确度越低. 因此，用这类仪表测量时，应选合适的量程挡，尽可能使测量点处在 2/3 量程以上.

2) 误差的分类

误差可分为两大类：系统误差、随机误差(或称偶然误差).

(1) 系统误差：是指在相同条件下用相同的方法，多次测量同一物理量，保持恒定或以预知方式变化的测量误差称为系统误差. 它包含两类：一是固定值的系统误差，其值(包

括正负号)恒定；二是随条件变化的系统误差，其值以确定的、已知的规律随某些测量条件变化，而且这种误差不能用重复多次测量的方法来限制或消除，只能从方法、理论、仪器等方面的改进与修正来实现，表现出恒偏大、恒偏小或周期性的特点.

系统误差来源于测量装置(标准器、仪器、附件和电源等的误差)，环境(温度、湿度、气压、振动和电磁辐射等影响)，方法(理论公式的近似限制或测量方法的不完善)，以及实验者自身(如感官不完善、具有某种习惯和偏向等)等方面. 其产生原因往往可知或能掌握，一经查明就应设法消除其影响，对于未能消除的系统误差，若它的符号和大小是确定的，则可以对测量值加以修正；若它的符号和大小都不确定的，可设法减小其影响并估计出误差范围.

(2)随机误差：在一定条件下多次重复测量同一物理量时，每次的观测值仍可能不相同，也就是存在着误差，这种误差的绝对值和符号以随机的方式变化着，这类误差称为随机误差. 这类误差来自于大量的微小的干扰. 其影响程度表现为随机特性，增加测量次数可减小其影响. 如果在相同的宏观条件下，对某一物理量进行多次测量，当测量次数足够多时，便可发现这些测量值呈现出一定的规律性——统计规律性，即它们服从某种概率分布.

随机误差来源于许多不可控因素的影响，如仪器性能的微小波动，观察者感官分辨力的统计涨落，周围环境(如温度、湿度、气压、气流和微振等)的无规起伏，测量对象本身的不确定性等.

随机误差的特点：①随机误差的有界性，在某确定条件下，误差的绝对值不会超过一定的限度；②随机误差的单峰性，绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大，最小误差出现的概率最大；③随机误差的对称性，绝对值相等的正负误差出现的概率相等；④随机误差的抵偿性，在多次重复测量中，由于绝对值相等的正负误差再现的次数相等，所以全部误差的算术平均值随着测量次数的增加趋于零，即随机误差具有抵偿性. 抵偿性是随机误差最本质的统计特性，凡是具有相互抵偿特性的误差，原则上可按随机误差来处理.

3)误差的表示方法

(1)算术平均误差.

在一组测量中，用全部测量值的随机误差值的算术平均值来表示，即

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\overline{x}\right|}{n} \tag{0-3}$$

式中，x_i 为各测量值，$i=1,2,\cdots,n$ 为测量次数；$\overline{x}$ 为该测量组测量的算术平均值.

这种表示方法已经考虑到了观测次数对随机误差的影响，但是各次数观测中相互符合的程度不能予以反映. 因为一组测量中，偏差彼此接近的情况与另一组测量中偏差有大、中、小的情况，两者的算术平均误差很可能相等.

(2)标准误差(又称均方根误差).

它是观测值与真值偏差的平方和与观测次数的比值的平方根，即

$$\sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2} \tag{0-4}$$

在实际测量中，观测次数总是有限的，真值只能用最佳估计值来替代，此时的标准差用实验标准(偏)差——贝塞尔法计算，即

$$s(x)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \tag{0-5}$$

有限次测量的算术平均值亦为随机变量，其实验标准差可用平均值的实验标准差表示，即

$$s(\overline{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \tag{0-6}$$

平均值的实验标准差 $s(\overline{x})$ 比任何一次测量的实验标准差 $s(x)$ 都小，增加测量次数可以减少平均值的实验标准差，提高测量的准确度. 但是，当 $n>10$ 以后，n 再增加时，$s(\overline{x})$ 减小缓慢，因此，在物理实验教学中一般取 n 为 6～10 次.

4)几个重要概念

(1)精密度，简称精度(precision)：表示测量结果中随机误差大小的程度，即在一定条件下，进行多次、重复测量时，所得测量结果彼此之间符合的程度，通常用随机的不确定度来表示(图 0-1(a)).

(2)正确度(correctness)：表示测量结果中系统误差大小的程度，即在规定条件下，测量中所有系统误差的综合(图 0-1(b)).

(3)准确度，又称精确度(accuracy)：是测量结果中系统误差与随机误差的综合，它表示测量结果与其真值的一致程度. 从误差的观点看，准确度反映了测量的各类误差的综合. 如果所有已定系统误差已经修正，那么准确度可用不确定度来表示(图 0-1(c)).

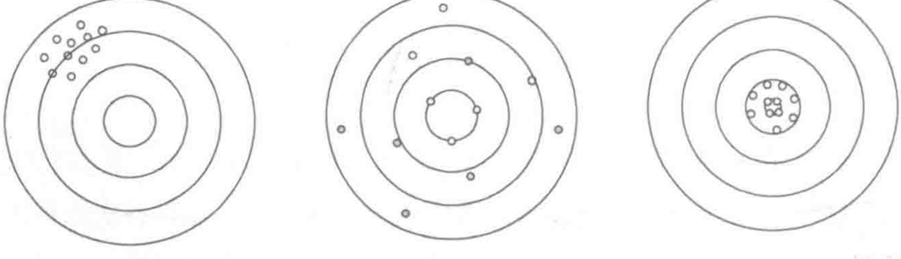

图 0-1　精密度(a)、正确度(b)以及准确度(c)示意图

2. 不确定度(uncertainty)

不确定度是由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度. 它是说明测量结果的一个参数，用于表征合理赋予被测量值的分散性，或者说，它是表征被测量真值所处量值范围的一个评定. 由此可见，不确定度与误差有区别，误差是一个理想的概念，一般不能准确知道，但不确定度反映误差存在的分布范围，即随机误差分量和未定系统误差分量综合的分布范围，可由误差理论求得. 表达方式有系统不确定度、随机不确定度和总不确定度. 不确定度一般包含多个分量，按其数值的评定方法可归并为两类：A 类，由统计分析方法评定的不确定度分量；B 类，由其他方法评定的不确定度分量.

系统不确定度实质上就是系统误差限度，常用未定系统误差可能不超过的界限或半区间宽度来表示. 随机不确定度实质上就是随机误差对应于置信概率 $1-\alpha$（α为显著性水平)时的置信区限 $\pm k\sigma$，当置信因子为 $k=1$时，标准误差 σ 就是随机不确定度，此时置信概率(按正态分布)为 68.27%. 总不确定度是由系统不确定度与随机不确定度按合成方差的方法合成而得到的，它反映了测量结果中未能确定的量值的范围. 不确定度是测量结果的测度，没有不确定度说明，测量结果将无从比较.

总之，不确定度是未定误差的特征描述，而不是具体的误差大小和符号，故不确定度不能用来修正测量结果.

二、随机变量的概率分布

由于随机变量受到不同因素的影响，或者物理现象本身的统计差异，所以随机变量的概率分布形式多种多样，这里讨论几种常用的分布，要注意掌握其概率函数(或概率密度函数)的数字特征量.

1. 几个基本概念

1)随机事件及概率

在一定条件下，现象 A 可能发生，也可能不发生，而且只有这两种可能性. 我们把发生现象 A 的事件称为随机事件 A.

在物理实验中，有许多被测量对象本身具有随机性. 例如，宏观热力学量(温度、密度、压强等)的数值都是统计平均值. 原子和原子核等微观领域的统计涨落现象也非常明显，这就使得实验观测值不可避免地带有随机性.

如果在一定条件下进行了 N 次试验，其中事件 A 发生了 N_A次，则比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率. 当 $N\to\infty$时，频率的极限称为事件 A 的概率，记为 $P_r(A)$，即

$$P_r(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} \tag{0-7}$$

2) 随机变量

如果所研究的各个随机事件可以分别用一个数来表示，则这个数就是随机事件的函数，称为随机变量. 在物理量的测量中，测量结果为某一个特定的数值，是一随机事件，这个数值就是随机变量的取值.

随机变量全部可能取值的集合称为母体或总体. 一次测量得到的是随机变量的一个具体数值，称为随机变量的一个随机数. 如果总共进行了 N 次独立的实验得到随机变量的 N 个随机数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，则称为随机变量的一个随机子样（或称为样本），简称子样. 一个子样中随机数的数目 N 称为子样的容量. 物理量的测量结果总是获得某些随机变量的子样，子样的容量由重复测量的次数决定.

随机变量按其取值情况分为离散型与连续型. 只能取有限个可数的一串数值的随机变量称为离散型随机变量；可能值布满某个区间的随机变量称为连续型随机变量. 在核物理实验和单光子计数实验中，粒子或光子的计数是离散型的随机变量，然而在物理量的测量中，更多见的是连续型的随机变量.

3) 分布函数、概率函数和概率密度函数

无论是离散型还是连续型的随机变量，其可能的全部取值可以排列在实数轴上，即实数轴上的一个子集合. 设有一随机变量 X，x 为排列在实数轴上的任一取值，则函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{0-8}$$

称为 X 的分布函数. 表明分布函数在 x 处的取值，等于 X 取值小于等于 x 这样一个随机事件的概率. 因此，若已知 X 的分布函数，我们就知道了 X 在任一区间 $[x_1, x_2]$ 上的概率，从这个意义上说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

如果将 X 看成是数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值就表示 X 落在区间 $[-\infty, x]$ 上的概率.

分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

(1) $F(x)$ 是一个不减函数；

(2) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

对于离散型随机变量 X，只能取可数的数值 $x = x_1, x_2, x_3, \cdots$，除了用分布函数描述外，还可用概率函数 $P(x)$ 来描述它的分布. 概率函数在某一点 x_i 的取值等于随机变量 X 取值为 x_i 的概率，即

$$P(x_i) = P_r(X = x_i) \tag{0-9}$$

由分布函数和概率函数的定义可得

$$F_x(x) = \sum_{x_i = x} P_i(x_i) \tag{0-10}$$

对于连续型随机变量，可以引入概率密度函数 $p(x) = \mathrm{d}P(x) / \mathrm{d}x$ 来描述概率分布，则

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x \tag{0-11}$$

由归一化条件有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = P(\infty)=1$$

随机变量在区间$[a,b]$内取值的概率$P_r(a \leqslant x \leqslant b)$称为区间$[a,b]$的概率含量. 显然，区间$[a,b]$的概率含量为

$$P_r(a \leqslant x \leqslant b) = P(b)-P(a)=\int_{a}^{b} p(x)\mathrm{d}x \tag{0-12}$$

上述关于分布函数、概率函数和概率密度函数的概念都可推广到多个随机变量的情形. 特别是当X和Y是两个相互独立的随机变量时，由概率论可得，它们的联合概率密度函数等于各自的概率密度函数的乘积，即

$$p(x,y)=p(x)\cdot p(y) \tag{0-13}$$

2. 概率分布的数字特征量

随机变量在不同形式的分布中，常用一些有共同定义的数字特征量来表征它们，而最重要的特征量是随机变量的期望值和方差.

1) 随机变量的期望值

随机变量的期望值定义为

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{0-14}$$

期望值的物理意义是做无穷多次重复测量时，测量结果的平均值. 根据期望值的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\langle x\rangle\right)p(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{0-15}$$

上式表明x分布在期望值的周围，但期望值和概率密度函数取极大值的位置未必重合.

现在，把随机变量期望值的概念加以推广，如随机变量x的函数$f(x)$的期望值定义为

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{0-16}$$

2) 随机变量的方差

随机变量的方差(通常以$V(x)$或$\sigma^2(x)$标记)定义为

$$V(x)=\sigma^2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\langle x\rangle\right)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{0-17}$$

方差描述随机变量围绕期望值分布的离散程度，也即随机变量取值偏离期望值起伏的大小. 方差的正平方根$\sigma(x)$称为随机变量x的标准误差，简称标准差.

根据方差的定义，由式(0-17)不难证明

$$\sigma^2(x)=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2 \tag{0-18}$$

3) 两个随机变量的协方差

两个随机变量的协方差定义为

$$\mathrm{Cov}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\,p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{0-19}$$

协方差描述两随机变量的相关程度. 由定义式必然有$\mathrm{Cov}(x,y)=\mathrm{Cov}(y,x)$. 若两随机变量相互独立，则有$\mathrm{Cov}(x,y)=0$；若$\mathrm{Cov}(x,y)\neq 0$，则有两随机变量一定不相互独立；但若$\mathrm{Cov}(x,y)=0$，两随机变量可能相互独立，也可能相互不独立，通常还要用相关系数$\rho(x,y)$来描述两随机变量的相关程度

$$\rho(x,y)=\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{0-20}$$

根据协方差定义，不难证明

$$\mathrm{Cov}(x,y)=\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle \tag{0-21}$$

3. 几种常用的概率分布

由于随机变量受到不同因素的影响，或者物理现象本身的统计性差异，随机变量的概率分布形式多种多样. 这里讨论几种常用的分布，要注意掌握其概率函数(或概率密度函数)和数字特征量.

1) 二项式分布

若随机事件A发生的概率为P，则不发生的概率为$(1-P)$，现在讨论在N次独立试验中事件A发生k次的概率，显然k是一个离散型随机变量，可能取值为0，1，2，…，N. 对于这样一个随机事件，可导出其概率分布为

$$p(k)=\frac{N!}{k!(N-k)!}P^k(1-P)^{N-k} \tag{0-22}$$

式中，因子$N!/[k!(N-k)!]$代表N次试验中事件A发生k次，而不发生$(N-k)$次的各种可能组合数. 若令$q=1-P$，则这个概率表达式刚好是二项式展开

$$(P+q)^N=\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!(N-k)!}P^kq^{N-k} \tag{0-23}$$

中的项，因此式(0-22)所表示的概率分布称为二项式分布.

二项式分布中有两独立的参数 N 和 P，故往往又把式(0-22)中左边概率函数的记号写作 $p(k;N;P)$．遵从二项式分布的随机变量 k 的期望值和方差分别为

$$\langle k\rangle=\sum_{k=0}^{N}k\frac{N!}{k!(N-k)!}P^{k}(1-P)^{N-k}=NP \tag{0-24}$$

$$\sigma^{2}(k)=\langle k^{2}\rangle-\langle k\rangle^{2}=NP(1-P) \tag{0-25}$$

二项式分布有许多实际应用. 例如，穿过仪器的 N 个粒子被探测到 k 个的概率，或 N 个放射性核经过一段时间后衰变为 k 个的概率等，这些问题的随机变量 k 都服从二项式分布.

2) 泊松分布

对于二项式分布，若 $N\to\infty$，且每次试验中 A 发生的概率 $P\to 0$，但期望值 $\langle k\rangle=NP$ 趋于有限值 m，则在这种极限情况下其分布如何？

由二项式分布函数式

$$p(k)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{N!}{(N-k)!}P^{k}(1-P)^{N-k} \tag{0-26}$$

可知，当 $N\to\infty$ 时，有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-k)!}=N^{k}$$

$$\lim_{N\to\infty}N^{k}P^{k}=m^{k}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-P)^{N-k}=\mathrm{e}^{-m}$$

可得到

$$p(k)=\frac{m^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-m} \tag{0-27}$$

上式表示的概率分布称为泊松分布. 可见泊松分布是二项式分布的极限情况.

注意到 $P\to 0$ 时，$NP\to m$，利用式(0-24)和式(0-25)，可得到遵从泊松分布的随机变量 k 的期望值和方差分别为

$$\langle k\rangle=NP=m \tag{0-28}$$