第一章 Chapter 1

质点运动学

引言

通过高中阶段的学习我们能够解决匀变速直线运动、平抛和斜抛等简单的问题，假如一个质点做变速曲线运动，如何得到其位移、速度和加速度之间的关系表达式呢？这个问题仅仅用高中的知识没有办法解决，当我们学习高等数学以后，利用数学知识再结合物理知识就可以解决。

学习导航

1. 质点运动状态的描述，掌握基本概念如质点、位置矢量、速度、加速度；
2. 质点运动的矢量性、瞬时性与相对性；
3. 解决运动学基本问题的方法。

单元一 物理模型 参考系

一、参考系

在自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是不存在的。在观测一个物体的位置及位置的变化时，总要选取其他物体作为参考标准，选取的标准物不同，对物体运动情况的描述也就不同，这就是运动描述的相对性。

★ 视频 质点及物理现象

为描述物体的运动而选的标准物称为参考系。不同的参考系对同一物体运动情况描述不同。因此，在描述物体的运动情况时，必须指明是对什么参考系而言。参考系的选择是任意的，在讨论地面上物体的运动时，通常选择地球作为参考系 。

二、质点

任何物体都具有大小和形状。但是在某些情况下，物体的形状大小对讨论它的运动无关紧要，例如地球，当研究地球绕太阳转动时，由于地球直径（约为 1.28×10^{7} m）比地球与太阳的距离（约为 1.50×10^{11} m）小得多，地球上各点的运动相对于太阳来讲可视为相同，此时可以忽略地球的形状和大小；但当研究地球绕自身轴转动时则不能忽略。因此，当物体运动的路径比物体本身尺寸大得多的时候，就可以近似地把此物体看成只有质量而没有大小和形状的几何点，这种抽象化的点就称为质点。由地球的例子可以看出，把物体当作质点是有条件的（即地球与太阳的距离比地球直径大得多），不满足条件的则不能当作质点（研究地球自转时）。

三、刚体

在任何力的作用下，体积和形状都不发生改变的物体称为刚体。和质点模型一样，刚体也是固态物体的理想模型。

单元二 质点运动的描述

一、位置矢量和位移

1. 位置矢量

位置矢量是定量描述质点某一时刻所在空间位置的物理量。如图1-1所示，设质点在某一时刻位于P点，从坐标系的原点O引向P点的有向线段OP称为该时刻质点的位置矢量，简称位矢，以$\boldsymbol{r}$表示。它在x、y、z轴上的投影（或位置坐标）分别为 x 、y 、z。于是，位矢$\boldsymbol{r}$的表达式为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别为x，y，z轴上的单位矢量（大小为1，方向沿各轴正向的矢量）。显然，位置矢量的大小

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

其方向由它的三个方向余弦来确定。位矢的单位为米（m）。

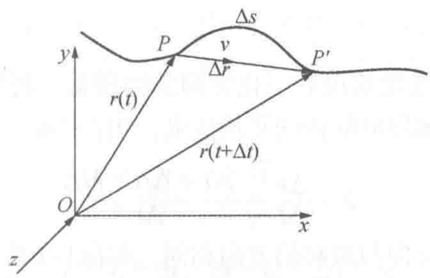

图 1-1 位移和路程

运动学方程：质点在运动过程中，每一时刻均有一对应的位置矢量（或一组对应的位置坐标 x 、y 、z ）。换言之，质点的位矢是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-2a}$$

其投影式为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-2b}$$

这样

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2c}$$

按机械运动的定义，函数式（1-2a）描述了这个运动的过程，故称为质点的运动方程。知道运动方程，就能确定任一时刻质点的位置，进而确定质点的运动。运动学的主要任务在于，根据问题的具体条件，建立并求解质点的运动方程。

如果由式（1-2b）中消去参变量 t ，则得质点运动的轨迹方程。如果质点限制在平面内，则可在此平面上建立xOy坐标系，于是（1-2b）式中的$z(t)=0$，从中消去时间t，得

$$y=y(x) \tag{1-3}$$

此即质点在 xOy平面内运动的轨迹方程。

2. 位移

位移是表示质点位置变化的物理量。如图1-1所示，设时刻t质点经过P处，位矢为$\boldsymbol{r}$；时刻$t+\Delta t$，质点经过P'处，位矢为$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$。在时间$\Delta t$内，质点位置的变化可用它的位移表示。由图1-1知

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-4}$$

位移是矢量，其大小为有向线段$\Delta\boldsymbol{r}$的长度，其方向由始点指向末点。

知识链接

位移不同于路程。位移表示的是质点始末位置的变化情况，而路程反映质点在这两个位置之间所经历的实际行程，用ΔS表示。位移是矢量，既有大小，又有方向，路程是标量，只有大小，没有方向。位移的大小也不同于路程，如图1-1所示，位移的大小对应于图中P、P'两点间的直线段长，而路程对应于P、P'两点间的弧线长，只有当$\Delta t\to 0$时，方可认为二者大小相同。即使在直线运动中，位移和路程也是两个截然不同的物理量。

二、速度

速度是表示质点位置变化快慢和变化方向的物理量。将质点的位移与完成位移所需时间的比值称为质点在该段时间内的平均速度，用$\bar{\boldsymbol{v}}$表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{1-5}$$

平均速度是矢量，其方向与位移的方向相同，如图1-1 所示。

质点所经历的路程与完成这段路程所需时间之比，称为质点在该段时间内的平均速率，以$\bar{v}$表示

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-6}$$

平均速率为标量。在一般的情况下，平均速度的大小并不等于平均速率。

平均速度只能反映一段时间内质点位置的平均变化情况，而不能反映质点在某一时刻（或某一位置）的瞬时变化情况。当$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限值才能精确地反映质点在某一时刻（或某一位置）的运动快慢及方向。这一极限值称为质点在该时刻的瞬时速度，或简称速度，以$\bar{\boldsymbol{v}}$表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

速度是矢量，其方向与$\Delta \boldsymbol{r}$的极限方向一致，即为运动轨迹上该点的切线方向。从式（1–7）可以看出，速度是位置矢量对时间的一阶导数。速度的单位是米/秒（m/s）。

知识链接

瞬时速度的大小和瞬时速率有什么关系？

反映质点运动瞬时快慢的物理量称为瞬时速率（简称速率），它是$\Delta t \to 0$时平均速率的极限值，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t \to 0} v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

由于$\Delta t \to 0$时$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，故质点在某一时刻的速度大小与该时刻的瞬时速率相等。

三、加速度

加速度是描述质点速度随时间变化快慢的物理量。

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t \to 0}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-9}$$

由式（1–9）可以看出，质点的加速度等于速度对时间的一阶导数，或等于位置矢量对时间的二阶导数 。换句话说，可以通过将速度或位矢对时间求导来计算加速度。加速度的单位是米每二次方秒（$\mathrm{m/s^2}$）。

【例1–1】已知一质点的运动方程为$\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$，式中$\boldsymbol{r}$的单位是m，$t$的单位是s。试求：（1）$t=2$ s时质点的位置矢量；（2）质点在$t=1$ s至$t=3$ s时间内的位移；（3）$t=1$ s时质点速度的大小和方向；（4）$t=2$ s时质点加速度的大小和方向。

【解】（1）把$t=2$ s代入运动方程可得

$$r_2 = t^2 \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} = 2^2 \boldsymbol{i} + 2 \times 2\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

（2）根据$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$，把时间$t = 1$ s和$t = 3$ s分别代入运动方程，可得两时刻质点的位置矢量分别为

$$r_1 = 1^2 \boldsymbol{i} + 2 \times 1\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

$$r_3 = 3^2 \boldsymbol{i} + 2 \times 3\boldsymbol{j} = 9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$$

质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = r_3 - r_1 = 9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

（3）根据运动方程，可得速度表达式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = 2t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

代入时间值，得$t = 1$ s时质点的速度为

$$v_3 = 2 \times 1\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

速度的大小为

$$v_3 = (\sqrt{2^2 + 2^2})\ \mathrm{m/s} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$$

方向与x轴正向夹角

$$\alpha = \arccos\frac{v_{3x}}{v_3} = \arccos\frac{2}{2\sqrt{2}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

（4）根据$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$，可得质点加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2(t^2)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2(2t)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i}$$

单元三　质点运动学的两类基本问题

质点运动学所要解决的问题一般分为两类：一类是已知质点的运动学方程，求质点在任意时刻的速度和加速度，在数学处理上需用导数运算，称为微分问题；另一类是已知质点的加速度及初始条件（即$t = 0$时的位矢及速度），求任意时刻的速度和位置矢量（或运动学方程），在数学上需用积分运算，称为积分问题。第一类问题前面已讨论过，下面以匀变速直线运动为例讨论第二类问题。

设质点做匀变速直线运动，在$t = 0$时，其位置坐标和速度分别为x_0和v_0，要确定任一时刻质点的运动状态，也就是要求得其坐标x和速度v随时间t的函数表达式。先将瞬时加速度的数学式改写然后积分得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{d}v = a\mathrm{d}t \xrightarrow{积分} \int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^v a\mathrm{d}t$$

$$即 v - v_0 = at 或 v = at + v_0 \tag{1-10}$$

上式就是确定质点在匀加速直线运动中速度的时间函数式。

根据瞬时速度的数学式，把式（1–7）改写并积分得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \xrightarrow{积分} \int_{x_0}^x \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$\text{即} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \text{或} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1-11}$$

上式就是匀加速直线运动中确定质点位置的时间函数式，也就是质点的运动方程。

此外，如果把瞬时加速度改写成

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \to v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$$

对两边取积分就得

$$v^2 \to v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{1-12}$$

上式就是质点做匀加速直线运动时，质点坐标和速度v之间的关系式。

以上讨论以x方向运动为例，同理可求得y、z方向的各分量关系，这里不再赘述。下面讨论两个特例。

一、直线运动实例

1. 自由落体运动

视频

平抛运动

物体自由下落，是近似于匀加速直线运动的一个实例。在自由下落过程中，若无空气阻力，则无论物体的大小、形状、质量等如何，在距地面上同一高度处，它们均有相同的加速度，若降落距离不太大，在降落过程中，加速度可当作常量，空气阻力、加速度随高度的变化忽略不计，这种理想的运动称为自由落体运动。

自由落体运动中加速度g是常数，因此为匀变速直线运动，以上讨论的公式均适用。因自由落体在开始时，$v_0 = 0$，且所选坐标轴的正方向向下，将这些条件代入匀变速直线运动公式后有

$$v = gt, y = \frac{1}{2}gt^2, v^2 = 2gt$$

2. 竖直上抛运动

与自由落体运动相反，竖直上抛运动有向上的初速度，取向上为坐标轴正方向，且运动过程中加速度为重力加速度，方向始终向下，取负值。则由匀变速直线运动公式得

$$v \neq 0, a = -g, y_0 = 0$$

$$v = v_0 - gt, y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, v^2 = v_0^2 - 2gy$$

二、平面曲线运动实例

1. 运动叠加原理

从同高度的平抛运动与自由落体运动同时落地的实验事实可知：平抛运动中水平运动不影响竖直方向的运动，即平抛运动是竖直方向的自由落体运动和水平方向的匀速运动的叠加。 根据类似的无数客观事实，可得到这样一个结论：一个运动可以看成几个各自独立进行的运动的叠加。这个结论称为运动的叠加原理。

2. 抛体运动

选如图1-2所示坐标系，

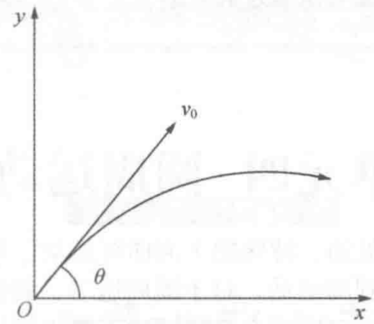

图 1-2 抛体运动

则 $(a_x = 0,\ a_y = -g)$

水平方向为匀速，竖直方向匀变速。

$$t = 0\text{时},\ \begin{cases} x_0 = 0, v_{x0} = v_0\cos\theta \\ y_0 = 0, v_{x0} = v_0\sin\theta \end{cases}$$

根据匀变速直线运动公式得

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ x = v_0 t\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \\ y = v_0 t\sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1-13}$$

以上四式描述了抛体在任意时刻的速度和位置，称为抛体运动方程式。

由x和y的表达式消去时间t可得轨迹方程

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

它是一个抛物线方程。

由抛体的运动方程和轨迹方程可知，抛体的轨迹和在任一时刻的运动状态取决于v_0和θ。在v_0一定的情况下，$\theta = \pi/2$，对应于上抛运动；$0 < \theta < \pi/2$，对应于斜上抛运动；$\theta = 0$，对应于平抛运动。

据抛体运动方程（或轨迹方程）可得出体现抛体运动特征的三个重要物理量：射高H，射程R（落地点与抛出点在同一水平面上的水平距离）和飞行时间T分别为

$$\begin{cases} \text{射高}\,H = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \\ \text{射程}\,R = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \\ \text{飞行时间}\,T = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g} \end{cases}$$

显然以相同的速率而以不同的抛射角θ抛出时，其射程一般不同。当以$\theta = 45°$抛出时，抛体取得最大射程$R = \dfrac{v_0^2}{g}$。

课堂讨论

质点运动学的两类基本问题各有什么特点？

单元四 圆周运动

圆周运动是一种比较常见的、特殊的平面曲线运动，当物体绕固定轴转动时，其上的每个点所做的运动都是圆周运动。对于圆周运动，我们同样把它分解为相互垂直的两个方向的直线运动，通过研究两个分运动进而得出圆周运动的规律。与前面研究抛体运动所不同的是，对于圆周运动，我们沿圆周轨迹的切向和法向进行分解。本单元主要介绍圆周运动的速度、加速度特点，以及圆周运动的角量描述方案。

一、圆周运动的速度

由本章第二单元的内容可知，质点做曲线运动时，速度的方向总是沿着轨迹的切线并指向前进方向，因而质点做圆周运动时，速度方向始终为该处圆弧的切线方向。故，圆周运动的速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t \tag{1-14}$$

式中，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$表示速度的大小，即速率；$\boldsymbol{e}_t$表示圆弧切向的单位矢量。

由于圆弧切向方向处处不同，所以，圆周运动的速度方向是时时变化的，因而速度也是时时变化的。如图1-3所示。如果圆周运动的速度大小随时间变化，则称为变速率圆周运动，我们通常称之为变速圆周运动；如果圆周运动的速度大小不随时间变化，则称为匀速率圆周运动，我们通常称之为匀速圆周运动。可见，即使是匀速圆周运动，其速度也不是恒定的。

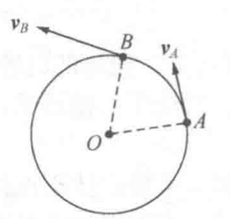

图 1-3 圆周运动的速度

★ 视频

圆周运动的速度

二、圆周运动的加速度

如图1-4（a）所示，t时刻质点位于A点，速度为$\boldsymbol{v}_A$，$t+\Delta t$时刻质点运动到B点，速度为$\boldsymbol{v}_B$。在$t \sim t+\Delta t$时间内，质点速度的变化为$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$。

在图1-4（b）中，在由矢量$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_A$和$\Delta \boldsymbol{v}$构成的矢量△CDE中，取$\overline{CF} = \overline{CD}$，则$A$、$B$两点的速度差$\Delta \boldsymbol{v}$可以写成

$$\Delta \boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{v}_n + \Delta \boldsymbol{v}_t$$

式中，$|\Delta v_t| = \overline{EF}$，它反映了$A$、$B$两点速度大小的变化；$|\Delta v_n| = \overline{DF}$，它反映了

A、B两点速度方向的变化。

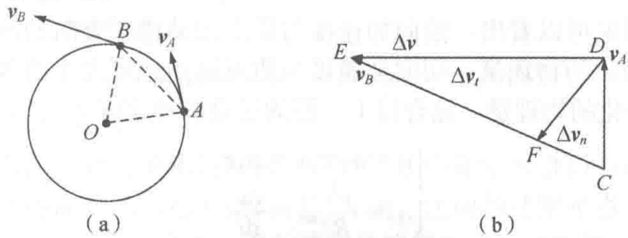

图 1-4 圆周运动的加速度

根据加速度的定义，有

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t \tag{1-15}$$

1. 法向加速度

在式（1-15）中，$a_n = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t}$。当$\Delta t\to 0$时，$B$点无限地接近$A$点，$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_A$的方向无限靠近，此时，$\Delta \boldsymbol{v}_n$的极限方向将垂直于$\boldsymbol{v}_A$，即$\Delta \boldsymbol{v}_n$的极限方向沿圆周半径指向圆心。沿圆周半径指向圆心的方向称为轨迹的法向，因而，加速度的这个分量称为法向加速度（中学时称其为向心加速度）。法向的单位矢量用$\boldsymbol{e}_n$表示，因而法向加速度可以写为

$$\boldsymbol{a}_n = a_n\boldsymbol{e}_n$$

式中，a_n称为法向加速度的大小。下面我们利用相似三角形知识，讨论法向加速度大小的表达式。

在图1-4中，由于对应边相互垂直，有$\triangle AOB \backsim \triangle DCF$，因而有

$$\frac{\overline{AB}}{|\Delta v_n|} = \frac{R}{v_A}$$

即$|\Delta v_n| = \frac{v_A}{R}\overline{AB}$，则$A$点法向加速度的大小为

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta v_n|}{\Delta t} = \frac{v_A}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{v_A^2}{R}$$

由于A点是任取的，所以，对于圆周轨迹上的任意一点，法向加速度的大小为

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

2. 切向加速度

在式（1-15）中，$a_t = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_t}{\Delta t}$。当$\Delta t\to 0$时，$B$点无限地接近$A$点，$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_A$的方向无限靠近，此时，$\Delta \boldsymbol{v}_t$的极限方向将与$\boldsymbol{v}_A$方向一致，即$\Delta \boldsymbol{v}_t$的极限方向沿圆周的切向，因而，加速度的这个分量称为切向加速度，即

$$\boldsymbol{a}_t = a_t\boldsymbol{e}_t$$

式中，a_t称为切向加速度的大小，其值

$$a_t = |\boldsymbol{a}_t| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta v_t|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

3. 圆周运动的加速度

通过上面的讨论可以看出：法向加速度与质点运动速度方向的改变相关，它是描述质点速度方向变化的物理量；切向加速度与质点运动速度大小的改变相关，它是描述质点速度大小变化的物理量。综合以上，圆周运动的加速度为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = a_n\boldsymbol{e}_n + a_t\boldsymbol{e}_t \\ a_n = \dfrac{v^2}{R}, a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-16}$$

如图1-5所示，加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

加速度的方向用加速度与半径的夹角正切值表示，即

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n}$$

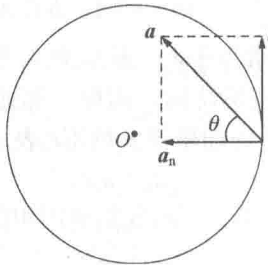

图 1-5 加速度的大小和方向

小提示

质点做匀速圆周运动时，由于速度的大小不变，仅速度的方向改变，因而加速度只有法向加速度分量，而没有切向加速度分量；质点做变速圆周运动时，由于速度的大小和方向都变化，因而加速度既有切向分量，又有法向分量。

【例1-2】 一质点在平面内做半径$R = 0.1$ m的圆周运动，已知质点所经历的路程随时间变化的关系为$S = 2 + 3t - 4t^2$，式中S以m为单位，t以s为单位。试求：（1）$t = 2$ s时质点的速度；（2）$t = 2$ s时质点的加速度。

【解】（1）根据路程随时间的变化关系，可得质点运动的速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 3 - 8t$$

把$t = 2$ s代入上式，可得$v_2 = (3-8\times 2)\text{m/s} = -13$ m/s

故$t = 2$ s时质点的速度为$\boldsymbol{v}_2 = -13\boldsymbol{e}_t$ m/s

（2）根据速率表达式，可得法向加速度和切向加速度大小分别为

$$a_{2n} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{(-13)^2}{0.1} = 1\,690\ \text{m/s}^2$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(3-8t)^2}{\mathrm{d}t} = -8\ \text{m/s}^2$$

切向加速度的大小恒定，所以$a_{2t}=-8\ \mathrm{m/s^2}$

$t=2$ s时，质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=a_{2n}\boldsymbol{e}_n+a_{2t}\boldsymbol{e}_{2t}=(1\,690\boldsymbol{e}_n-8\boldsymbol{e}_t)\ \mathrm{m/s^2}$$

4. 一般曲线运动加速度

质点做一般曲线运动时，加速度同样可以沿切向和法向进行分解。切向加速度沿着质点所在位置轨迹曲线的切线并指向前进方向，法向加速度垂直于切向加速度，指向质点所在位置轨迹对应圆的圆心，总加速度始终指向曲线的凹侧，如图1-6所示。

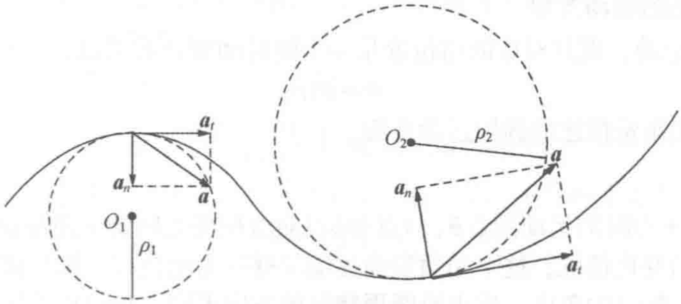

图 1-6 一般曲线运动

一般曲线运动中，曲线各处对应的圆周的圆心和半径都不相同，我们称这些圆的圆心为该处的曲率中心，对应圆周的半径称为曲率半径，用ρ表示，如图1–6所示。质点在各处切向加速度和法向加速度的大小分别为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{1–17}$$

小提示

一般曲线运动中，质点既有切向加速度，又有法向加速度，因而质点运动速度的大小和方向均发生变化；如果质点只有切向加速度，而没有法向加速度，则质点只有速度大小的变化，而没有速度方向的变化，那么，质点所作的是直线运动；如果质点只有法向加速度而没有切向加速度，则质点只有速度方向的变化，而没有速度大小的变化，那么，质点所作的是匀速率的曲线运动；如果质点的法向加速度始终指向一个固定的点，那么，质点所作的是圆周运动。

三、圆周运动的角量描述

圆周运动除了可以用位移、速度、加速度这些线量描述之外，还通常用角位置、角位移、角速度、角加速度等角量来描述。

1. 角位置

如图1-7所示，质点在平面内绕O点作半径为R的圆周运动。t时刻质点位于A点，则A点的位置可以用该点对应的位矢$\overrightarrow{OA}$与Ox轴正向的夹角θ来描述，这个用来描述质点位置的角量称为角位置。

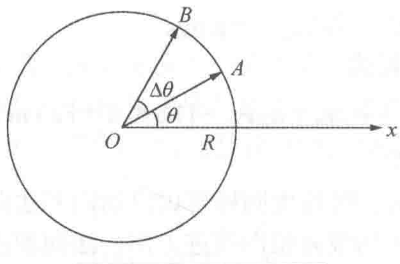

图 1-7 角位置和角位移

2. 角量描述的运动方程

如果质点运动，则其对应的角位置是一个随时间变化的函数，可写为

$$\theta = \theta(t) \tag{1-18}$$

此式称为用角量描述的圆周运动方程。

3. 角位移

若质点在$t + \Delta t$时刻运动到点B，A点和B点对应位矢之间的夹角$\Delta\theta$则反映了Δt时间内质点位置的变化情况，这个用角量描述的位移称为角位移。角位移也可以说成是该段时间内质点转过的角度。质点沿圆周绕行的方向不同，角位移的转向不同，一般地，我们规定质点沿逆时针绕行时角位移为正，即$\Delta\theta > 0$；质点沿顺时针方向绕行时角位移为负，即$\Delta\theta < 0$。

在国际单位制中，角位置和角位移的单位都是弧度（rad）。

4. 角速度

角位移$\Delta\theta$与产生这段角位移所经历时间Δt的比值称为这段时间内质点的平均角速度，用$\overline{\omega}$表示，即

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1-19}$$

平均角速度只能粗略地描述质点转动的快慢，若想精确地知道质点在某一时刻的转动快慢，则需要把所讨论的时间段尽可能取小一点。当$\Delta t \to 0$时，平均角速度的极限值称为质点在t时刻的瞬时角速度（简称为角速度），用ω表示，即

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-20}$$

在国际单位制中，平均角速度和角速度的单位都是弧度每秒（rad/s），常用的单位还有转每分钟（r/min）、转每小时（r/h）。

5. 角加速度

与定义角速度类似，我们定义角加速度为

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1-21}$$

角加速度的单位是弧度每二次方秒（$\mathrm{rad/s^2}$）。

圆周运动中，角速度和角加速度的方向也用其值的正负反映。若角加速度与角速度符号相同，则为加速圆周运动；若角加速度与角速度符号相反，则为减速圆周运动；若角加速度$\beta = 0$，角速度不变，则为匀速圆周运动，此时，角位移$\Delta\theta = \omega t$；若角

加速度恒定不变，则为匀变速圆周运动。与匀变速直线运动相对照，很容易得出匀加速圆周运动的一组关系

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\beta t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2(\theta-\theta_0)\end{cases}\tag{1-22}$$

【例1-3】一飞轮以转速$n = 900$ r/min转动，受到制动后均匀地减速，经$t = 50$ s后静止。试求：（1）飞轮的角加速度β；（2）从制动开始到静止，飞轮转过的转数；（3）$t = 25$ s时，飞轮的角速度。

【解】（1）由题意可知

$$\omega_0=\left(\frac{2\pi\times 900}{60}\right)\text{rad/s}^2=30\pi\ \text{rad/s}^2$$

（2）根据匀变速圆周运动的角速度公式$\omega=\omega_0+\beta t$，得角加速度为

$$\beta_0=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\left(\frac{0-30\pi}{50}\right)\text{rad/s}^2=-0.6\pi\ \text{rad/s}^2$$

根据角位置公式$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$，得这段时间内飞轮的角位移为

$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2=(30\pi\times 50-\frac{1}{2}\times 0.6\pi\times 50^2)\ \text{rad/s}=750\pi\ \text{rad/s}$$

飞轮转数为

$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{750\pi}{2\pi}=375\ \text{转}$$

（3）根据$\omega=\omega_0+\beta t$，得$t=25$ s时角速度为

$$\omega=\omega_0+\beta t=(30\pi-0.6\pi\times 25)\ \text{rad/s}=15\pi\ \text{rad/s}$$

6. 角量和线量的关系

在圆周运动中，线量和角量都是描述同一对象的，因而两者之间必然有着联系。如图1-8所示，设圆周半径为R，则Δt时间内质点经过的弧长ΔS与角位移之间存在如下关系

$$\Delta S=R\Delta\theta$$

质点运动的速率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=R\omega$$

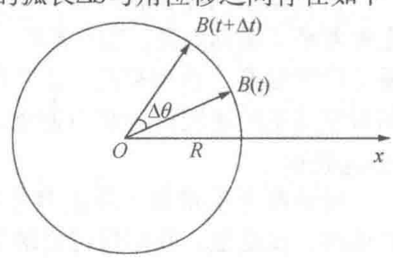

图 1-8 角量和线量关系

进而，有

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(R\omega)^2}{\mathrm{d}t}=R\omega^2$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\beta$$

整理以上结论，得圆周运动的角量和线量关系为

$$\Delta S=R\Delta\theta,\ v=R\omega,\ a_n=R\omega^2,\ a_t=R\beta\tag{1-23}$$

【例1-4】一质点沿半径为$R = 0.1$ m的圆作圆周运动，运动方程为$\theta = 2-4t^3$，式中，θ以rad计，t以s计。试求：（1）$t = 2$ s时，质点的切向加速度和法向加速度的大小；（2）θ为多大时，切向加速度和法向加速度的大小相等。

【解】（1）根据$\theta = 2-4t^3$，可得

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -12t^2 \text{，} \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -24t$$

把$t = 2$ s代入，得

$$\omega_2 = (-12 \times 2^2)\mathrm{m/s} = -48\ \mathrm{m/s}，\beta_2 = (24 \times 2\ )\mathrm{m/s^2} = -48\ \mathrm{m/s^2}$$

根据角量和线量关系，有

$$a_{2n} = R\omega_2^2 = \left[0.1 \times (-48)^2\right]\mathrm{m/s^2} = 200.4\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_{2t} = R\omega^2 = \left[0.1 \times (-48)^2\right]\mathrm{m/s^2} = -4.8\ \mathrm{m/s^2}$$

（2）若$|a_n| = |a_t|$，应有$|R\omega^2| = |R\beta|$

把$\omega = -12t^2$，$\beta = -24t$代入，并整理得

$$144t^4 = 24t$$

解方程得$t^3 = \dfrac{1}{6}$，代入运动方程，得此时

$$\theta = 2 - 4t^3 = \left(2 - 4 \times \frac{1}{6}\right)\mathrm{rad} = 1.33\ \mathrm{rad}$$

单元五 相对运动

在本章的第一单元中我们曾经介绍：物体的运动是绝对的，但对于运动的描述却是相对的，在不同的参考系中描述同一个运动，所得结论往往是不同的。本单元主要介绍在不同的参考系中描述同一个运动时，所得的位置矢量、位移、速度和加速度之间的变换关系。

相对运动问题常常涉及两个参考系。一个是相对于观测者静止的参考系，称为静止参考系（简称静系，也称K系）；一个是相对于观测者运动的参考系，称为运动参考系（简称动系，也称K'系）。物体相对于静系的速度称为绝对速度，用$\boldsymbol{v}_{AK}$表示；物体相对于动系的速度称为相对速度，用$\boldsymbol{v}_{AK'}$表示；动系相对于静系的速度称为牵连速度，用$\boldsymbol{v}_{K'K}$表示。

运动参考系相对于静止参考系的运动可以是平动，也可以是转动，或者是更复杂的运动。在这里，我们仅讨论最简单的情况：动系（K'系）相对于静系（K系）做匀速直线运动。如图1-9所示，在K系和K'系中分别建立直角坐标系$Oxyz$和$O'x'y'z'$，使两参考系的x轴重合，其他两个坐标轴平行。

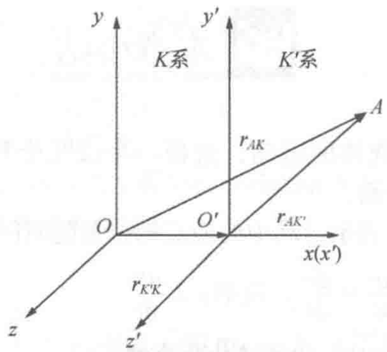

图 1-9 相对运动

设空间有一运动质点，t时刻质点位于P点，该点在K'系中对应的位矢为$\boldsymbol{r}_{AK}$，在K系对应的位矢为$\boldsymbol{r}_{AK'}$，由图1-9可知，两参考系中位矢之间的关系为

$$\boldsymbol{r}_{AK} = \boldsymbol{r}_{AK'} + \boldsymbol{r}_{K'K} \qquad (1\text{–}24)$$

式（1–24）称为位矢变换式。式中，$\boldsymbol{r}_{K'K}$ 为K'系原点O'在K系中对应的位矢。

上式两侧对时间求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AK}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AK'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{K'K}}{\mathrm{d}t}$$

式中，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AK}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{AK}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AK'}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{AK'}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{K'K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{K'K}$，则上式可写为

$$\boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}_{AK'} + \boldsymbol{v}_{K'K} \qquad (1\text{–}25)$$

式（1–25）称为速度变换式。速度变换式对时间再求导，可得加速度变换式

$$\boldsymbol{a}_{AK} = \boldsymbol{a}_{AK'} + \boldsymbol{a}_{K'K} \qquad (1\text{–}26)$$

式中，$\boldsymbol{a}_{K'K}$为K'系相对于K系的加速度。若K'系相对于K系做匀速直线运动，则$\boldsymbol{a}_{K'K} = 0$，此时$\boldsymbol{a}_{AK} = \boldsymbol{a}_{AK'}$。

由以上分析可知，在相对运动问题中，K系和K'系中及两系之间描述运动的对应物理量之间都是满足矢量合成的三角形法则的。

【例1–5】某人以4 m/s的速度向东行进时，感觉风从正北吹来。如果此人将行进速度增加一倍，则感觉风从东北方向吹来。试求：风相对于地面速度的大小和方向。

【解】以地面为静止的K系，人为K'系，则人行进的速度为K'系相对于K系的速度$v_{K'K}$，人感觉风的速度为$v_{AK'}$。

对于两种情况，根据$v_{AK} = v_{AK'} + v_{K'K}$，作矢量三角形如图1-10所示。根据矢量三角形的几何关系，可得风相对于地面的速度大小为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AK}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{AK} = \sqrt{2}\,(\boldsymbol{v}'_{K'K} - \boldsymbol{v}_{K'K}) = (\sqrt{2} \times 4)\ \mathrm{m/s} = 5.66\ \mathrm{m/s}$$

风向为$\theta = 45°$

风速的方向为东偏南45°。

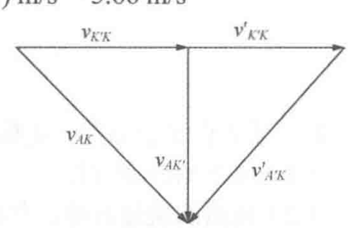

图 1-10 例1-5图

本章小结

1. 参考系：描述一个物体的运动，选择一个或几个相对静止的物体为比较的基准，这些物体群，称为参考系。

2. 运动（函数）方程：表示运动中的质点的位置随时间变化的函数。

3. 瞬时速度：$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，速率$v=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$

4. 瞬时加速度（当$\Delta t\to 0$时，曲线转化为直线）：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

5. 自然坐标系中质点运动加速度：。

切向加速度——$\boldsymbol{a}_t=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$；法向加速度——$\boldsymbol{a}_n=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$，故$\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$

6. 曲线运动与圆周运动类比（表1–1）：

表 1-1 曲线运动与圆周运动类比表

项目	曲线运动	圆周运动
平均速度	$v=\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$	$\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$（平均角速度）
瞬时速度	$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$	$\boldsymbol{\beta}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
匀变速（曲线特例）直线运动	$v=v_0+at$ $S=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0^2=2aS$	$\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta=\theta_0+\omega t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$

7. 圆周运动的加速度：$a=a_n+a_t$，$a_t=R\beta$，$a_n=v^2/R=\omega^2R$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+(R\beta)^2}$$

教学检测

1. 一质点做平面运动，坐标随时间变化的关系为$x=2t+6$，$y=2t^2+3t-5$。试求：

（1）质点的运动方程；

（2）质点的轨迹方程，并描绘轨迹的形状。

2. 一质点的运动方程为$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(t^3-6)\boldsymbol{j}$。试求：

（1）$t=3$ s时，质点的位置矢量；

（2）0～3 s质点的位移及平均速度；

（3）$t=3$ s时，质点的速度和加速度。

3. 一质点在平面内运动，其运动方程为$\boldsymbol{r}=6\sin5\pi t\boldsymbol{i}+2\cos5\pi t\boldsymbol{j}$。试求：

（1）轨迹方程，并描绘轨迹的形状；

（2）质点的速度表达式；

（3）质点的加速度表达式。

4. 一个人从原点出发，用30 s向南走了40 m，之后又用30 s向东走了40 m。试求：

（1）在这段时间内此人的位移和路程；

（2）平均速度和平均速率。

5. 一足球运动员在正对球门前30 m处以25 m/s的初速率罚任意球，已知球门高为3.44 m。若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门，问他应在与地面成什么角度的范围内踢出足球？（足球可视为质点）

6. 一升降机以速度$v_0=2$ m/s由地面匀速上升。当它运动至12 m高处时有一螺钉从升降机天花板上脱落，升降机天花板距底板2.50 m。试求：

（1）螺钉落到地板所需时间；

（2）下落过程中螺钉相对于地面的位移。

7. 一质点在Oxy平面内做一象限的双曲线运动，轨迹方程为$xy=8$，且沿Ox轴的运动方程为$x=6t^2$。x、y以m计，t以s计。试求：

（1）质点的运动方程；

（2）$t=1$ s时，质点的速度。

8. 一滑雪运动员离开水平雪道飞入空中的速率为$v_0=110$ km/h。斜坡的倾角为$\alpha=45°$，不计空气阻力。试求：

（1）运动员的着陆点B到脱离滑道点A之间的距离；

（2）运动员在空中飞行的时间。

9. 为迎接香港回归，1997年6月1日柯受良驾车飞越黄河。如图1-11所示，黄河壶口宽$L=57$ m，柯受良从东端起跃的速度为$v_0=150$ km/h，设起跃速度沿水平方向。试求：若要使车在黄河西岸安全着陆，则在黄河的东岸的起跃台至少要高出西岸多少。

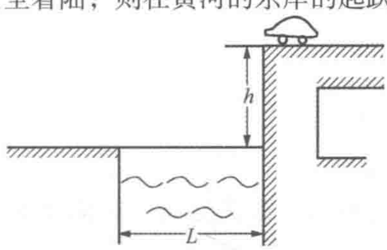

图 1-11　教学检测题9图

10. 已知质点运动方程为

$$\begin{cases} x=R\sin\omega t \\ y=R(1+\cos\omega t) \end{cases}$$

式中R，ω为常量，试回答质点做什么运动，并求其速度和加速度。