弘博文化国家教师资格考试研究中心

国家教师资格考试用书

高中数学

学科知识与教学能力

主编/傅海伦

重点突出·靶向指导

命题预测·直达要点

全真模拟·备考无忧

最新版

山东教育出版社

弘博文化国家教师资格考试研究中心

最新版

国家教师资格考试用书

高中数学学科知识与教学能力

主编／傅海伦

山东教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学学科知识与教学能力 / 傅海伦主编. —济南：山东教育出版社，2015

国家教师资格考试用书

ISBN 978-7-5328-8730-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①傅… Ⅲ. ①中学数学课—教学法—高中—中学教师—资格考试—自学参考资料 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第025729号

国家教师资格考试用书

高中数学学科知识与教学能力

傅海伦　主编

主　管：山东出版传媒股份有限公司
出版者：山东教育出版社
（济南市纬一路321号　邮编：250001）
电　话：（0531）82092664　传真：（0531）82092625
网　址：www.sjs.com.cn
发行者：山东教育出版社
印　刷：山东德州新华印务有限责任公司
版　次：2015年4月第1版第1次印刷
规　格：880mm×1230mm　16开
印　张：21.75印张
字　数：490千字
书　号：ISBN 978-7-5328-8730-9
定　价：52.00元

（如印装质量有问题，请与印刷厂联系调换）
印厂电话：0534-2671218

前言

数学学科知识与教学能力（高级中学）主要考查考生的数学学科知识以及能否灵活运用数学课程与教学理论知识解决教学实践中遇到的各种问题，包括教材分析、教学设计、教学技能、课堂管理、教学评价、案例分析等方面.实践性、综合性和开放性是这门考试的基本特点.因此，如何为广大考生编写一本既具有切实有用的理论指导作用，又包含大量的真题训练，同时还为考生提供详尽的考场实战操作示范与解析说明的参考书，是一项颇具挑战性的课题.“一册在手，考试无忧”，这正是我们编写这本书的出发点.总体来看，这本书有三个突出特点.

一、本书内容设计科学，考试重点突出，严格按照教师资格考试大纲组织编写

本书严格按照教师资格考试大纲组织编写，教材内容的科学性主要体现在三个方面：一是注重对教师资格考试标准和考试大纲的解读，按照考试大纲规定的知识点分模块编写，并适当拓展，以保证知识系统的完整性、连贯性和科学性.二是本书对各知识点的阐述规范、简明，要点突出，并有精典案例或例题说明.在能力方面，本书依据考试大纲的要求，重点突出数学解题能力的提高、数学思维方法的训练、解题规律的总结以及数学教学能力的提升，突出“以能力立意”的考试要求.三是本书编写立意高，观点新，接“地气”.本书既吸收了重要而基本的数学课程与教学论的新成果、新观点，又紧密结合当前基础教育课程改革背景下的中学数学的教学实际，反映了数学教师的专业化发展规律，体现了作为数学教师的综合素质要求.

二、发挥模拟题实战演练的示范作用，通过精选的案例解析，丰富考生的应试经验

数学不搞“题海战术”，但是适度的、积极的、有目标的“应试”训练是必需的.因为考试本身也是一种技能，也需要一定程度和强度的训练和养成.如果平时没有经过一定强度的训练，在考场上就很难做到游刃有余.从考生反馈的信息看，《数学学科知识与教学能力》（高级中学）这门考试容量大、综合性强、时间紧.大部分考生反映一些考试的题目偏难，有的题目无从下手.特别是对于

大学本科中的数学知识，不少考生没有思路；而对于案例分析题或教学设计题，不少考生感到不知如何作答.因此，针对这些问题，我们精选了大学数学考纲中规定的考查基础知识和能力的典型问题作为例题进行剖析，同时，精心安排一些专题进行针对性地训练.体现在本书的内容上，除了在每一考查的模块内容和章节内容中穿插“考题再现”外，在每一章之后都另设有“实战演练”，精心编写了一些高仿真模拟题供考生练习，并附有详细的“思路解析”、“参考答案与提示”，以指导考生从具体题目的解答中掌握解题策略、规范和技巧.为编写这些题目、撰写案例分析和参考答案，我们付出了大量的艰辛的劳动，但只要能对考生有所助益，这些付出还是值得的.

三、本书实用性强，方便考生使用

本书从内容的组织到栏目的设计都从考生的实际需要出发，便于考生提纲挈领地掌握相关知识点，从而提升应考能力.针对本科目的考试目的、要求和特点，我们认为掌握扎实的数学基础知识、数学课程与数学教学理论是取得好成绩的基础和前提.而当下的一些数学教育理论往往是枯燥的、单调的，甚至是陈旧的；不少内容和观点脱离了数学学科的特点，而仅仅停留在打一般教育学理论的“外围战”上.再加上如果考生不注意应试方法,仅仅靠死记硬背、机械记忆来学习这些理论，考试时就很难得到高分.因此，我们编写本书时，特别关注了传统数学教育理论知识的更新，数学教学知识、数学教学技能、数学教学设计等内容都集中体现了数学学科的特点和数学教学的规律，力求做到既全面完整，又重点突出，理论观点表达尽量言简意赅、简明扼要，以便于考生准确地理解和掌握；案例分析则充分详实，条分缕析.我们的目标是尽可能地让抽象的理论观点和概念都联系着生动的具体的教学实践经验和典型案例.而对于数学学科知识的设计，从大学本科数学知识到高中阶段数学知识，几个固定的栏目也突出了实用性:“目标与要求”依据数学课程标准和考试大纲，准确，合理；“知识梳理”简明扼要，重点突出;“典型例题解析”，示范典型，启发性强；“规律与方法指导”总结到位,针对性强;“检测题及答案提示”用以检查考生的复习效果,便于应用与反馈.这样的体例设计以题型解析为靶向，能够较好地满足考生应考的实际需求.

从现实的角度看，再好的考试用书都只是考生备考的一种工具.工具好用不好用，一方面取决于工具自身是否设计合理、功能齐备;另一方面则取决于考生自身操控与驾驭工具的能力与素质.最后，希望广大考生在充分了解本书结构、体系及功能的基础上，能够根据自己的实际情况各取所需，各展其长，在考试中取得好成绩，并学会挖掘和利用好本书中所蕴含的丰富资源.

傅海伦

模块一
数学学科知识

◯ 考纲要求

1. 考试目标

数学学科知识的掌握和运用.掌握大学本科数学专业基础课程的知识和高中数学知识.具有在高中数学教学实践中综合而有效地运用这些知识的能力.

2. 考试内容与要求

数学学科知识包括大学本科数学专业基础课程和高中课程中的数学知识.

大学本科数学专业基础课程的知识是指:数学分析、高等代数、解析几何、概率论与数理统计等大学课程中与中学数学密切相关的内容,包括数列极限、函数极限、连续函数、一元函数微积分、向量及其运算、矩阵与变换等内容及概率与数理统计的基础知识.

其内容要求是:准确掌握基本概念,熟练进行运算,并能够利用这些知识去解决中学数学中的问题.

高中数学知识是指《普通高中数学课程标准(实验)》中所规定的必修课全部内容,选修课中的系列1、2的内容以及选修3—1(数学史选讲)、选修4—1(几何证明选讲)、选修4—2(矩阵与变换)、选修4—4(坐标系与参数方程)、选修4—5(不等式选讲).

其内容要求是:理解高中数学中的重要概念,掌握高中数学中的重要公式、定理、法则等知识,掌握中学数学中常见的思想方法,具有空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用能力.

◯ 备考方略

1. 考试方式

数学学科知识的考试主要有单项选择题、简答题和解答题三种方式.单项选择题重在考查考生对大学本科数学专业基础课程和高中数学知识中的重要数学概念的理解,数学定理、公式(法则)的运用和基本数学思想方法的掌握,数学的基本运算和推理能力.简答题主要依据《普通高中数学课程标准(实验)》,考查高中数学必修课程以及规定的选修课中内容的设计特点、各部分内容之间的关系、知识结构与体系及其在数学教学中的呈现.解答题主要考查大学本科数学专业基础课程和高中数学知识

的应用，考查中学数学中常见的思想方法，考查考生的抽象概括、推理论证、空间想象、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用能力.

2. 考试重点

依据《普通高中数学课程标准(实验)》和《考试大纲》，全面考查考生对数学学科的基础知识、基本技能、基本数学思想和基本的数学活动经验的掌握程度、对数学学习过程的感悟和对数学学习方法的掌握程度.考试内容不拘泥于教材，活于教材，注重教材内容知识的拓展，给考生提供一定的自由空间.既重视对考生大学本科阶段和普通高中阶段大纲规定的重要数学知识与技能的考查，也重视对考生在数学思考能力和解决问题能力等方面的考查.考试重点是体现考基础、考能力、考衔接、考知识的拓展，在着重考查考生的基本运算能力、思维能力和空间观念的同时，注重考查考生运用数学知识分析问题、解决问题的能力和数学综合思维能力.

3. 方法指导

本模块的考试将全面考查考生的数学学科知识结构、所具备的数学专业知识素养和能力.因此，复习备考应依据《考试大纲》的相关要求，注重梳理大学本科高等数学知识和《普通高中数学课程标准(实验)》中的高中数学五个模块必修课程、《考试大纲》规定的部分选修课程内容结构体系，掌握其中重要而基本的数学知识点、相关章节内容的主干知识的交汇点.在此基础上，结合《考试大纲》的要求进行专题内容的解题训练，注重归纳和总结数学思想方法，掌握常规常法，注意强化归纳、概括、分析、综合等思维方法，并注重数形结合、分类讨论、猜想、转化等数学思想方法，有针对性地训练思维品质，提高自己的数学分析、空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用数学知识解决问题的能力.

第一章　大学本科数学专业基础知识

§1.1　极限与连续

一、目标及要求

1. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

2. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

3. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

4. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型.

5. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

二、知识梳理

1. 极限的定义

数列极限的定义　对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$x \to \infty$ 时函数极限的定义　对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

$x \to x_0$ 时函数极限的定义　对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

单侧极限　对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta (0 < x - x_0 < \delta)$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限，记作 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A\left(f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A\right)$.

2. 无穷小与无穷大

无穷小的定义　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\right)$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小.

无穷大的定义　对于 $\forall M > 0, \exists X > 0 (\delta > 0)$，当 $|x| > X (0 < |x - x_0| < \delta)$ 时，总有

$$|f(x)| > M$$

成立，则称 $f(x)$ 当 $x \to \infty (x \to x_0)$ 时为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty\right)$.

无穷小的比较　设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$，

(1) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\beta(x) = o(\alpha(x))$；

(2) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

(3) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C (C \neq 0)$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小；

(4) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记为 $\beta(x) \sim \alpha(x)$；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{x^k} = C (C \neq 0, k > 0)$，则称 $\beta(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小.

无穷小的性质　设 α, β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小，u 是有界量，C 是常数，$n \in \mathbf{N}$，则

(1) $\alpha \pm \beta, C\alpha, \alpha\beta, \alpha^n, \alpha \pm \cdots \pm \beta, \alpha \cdot \cdots \cdot \beta$ 都是这一变化过程中的无穷小；

(2) $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$；

(3) $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $\Rightarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$(等价无穷小代换定理)；

(4) $u\alpha$ 是这一变化过程中的无穷小.

3. 极限的运算及性质

极限的四则运算 设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 存在,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)\times g(x)]=\lim f(x)\times\lim g(x)$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

特别地,$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$,$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

4. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

5. 极限的有关定理

定理 1 单调有界数列必有极限.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

定理 3 函数的极限如果存在,则极限值是唯一确定的常数.

定理 4 (局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$A>0(A<0)$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0(f(x)<0)$.

定理 5 (夹逼准则) 若在 x_0 的某一邻域内,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 6 (极限与无穷小的关系) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

6. 连续

定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

间断点 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续,则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点 左、右极限都存在的间断点.

(1) 左、右极限都存在且相等,称为可去间断点;

(2) 左、右极限都存在但不相等,称为跳跃间断点.

第二类间断点 左、右极限至少有一个不存在的间断点.

初等函数的连续性 初等函数在其定义区间内均连续.

7. 闭区间上连续函数的性质

定理 7 (最大值、最小值定理) 闭区间上连续的函数在该区间上必取得最大值和最小值.

定理 8 (零点定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 9 (介值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,若 c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数,则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=c$.

三、典型例题解析

【例 1】 (2014 上半年) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：令 $y_n=\sqrt[n]{n}-1$，易知 $y_n>0$，下证$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

由二项式定理，$n=(1+y_n)^n=1+y_n+\dfrac{n(n-1)}{2}{y_n}^2+\cdots+{y_n}^n>1+\dfrac{n(n-1)}{2}{y_n}^2$，

所以 $|y_n|<\sqrt{(n-1)\dfrac{2}{n(n-1)}}=\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

对 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$，则当 $n>N$ 时，$|y_n|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

评析：本题是利用定义证明数列极限，在放缩时巧妙地运用了二项式定理. 如果只是求这个极限的话可以用洛必达法则来求.

【例 2】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^2-16}$；

解：$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{8}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$；

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-1)-x}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=(1+0)(2-0)=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+1}{2x^4+5x^2-6}$；

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+1}{2x^4+5x^2-6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}}=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；

解：因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=0$，所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2(x+2)}{(x-2)^2}=\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

评析：本题考查利用极限的四则运算法则来求极限，但当分母的极限为0时，商的极限的运算法则不成立，需要先进行约分、有理化等恒等变换.

【例 3】 设 $f(x)=|x|$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，左右极限存在且相等，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

评析：对分段函数分界点处的极限可通过左右极限来求，只有左右极限都存在且相等时该点的极限才存在.

【例 4】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^3}{\sin^3 x}$；

解：$\because x\to 0$ 时，$\tan x^3\sim x^3$，$\sin^3 x\sim x^3$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^3}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\mathrm{e}^2$.

评析：本题考查利用等价无穷小的代换和重要极限来求极限的方法.

【例 5】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；

解：$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

评析：本题考查利用函数的连续性来求极限的方法.

【例 6】 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证：设 $M=\max\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\}$，$m=\min\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\}$，

则 $nm\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant nM$，即 $m\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}\leqslant M$，

由连续函数的介值定理知，必存在 $\xi\in[x_1,x_n]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

评析：本题是介值定理的应用，应用介值定理时一定要保证函数的连续性.

四、规律与方法指导

题型 1 求数列或函数的极限

常用求极限的方法有：

(1) 用极限定义证明极限存在；

(2) 求 n 项和或积的极限，先化简再求极限；

(3) 分段函数在分界点处的极限一般利用左右极限来求；

(4) 用极限存在的两个准则求极限；

(5) 用两个重要极限求极限；

(6) 运用极限的运算法则求极限；

(7) 用等价无穷小代换求极限.

题型 2 无穷小的比较及应用

无穷小的比较及相关问题主要利用无穷小的比较的定义及等价无穷小代换来确定待定参数.

题型 3 函数连续性与间断点的判断

这类问题通常由连续的定义或函数在一点是否左右连续出发进行讨论. 常见题型有：

(1) 求函数的间断点并判断其类型；

(2) 函数连续性的讨论；

(3) 利用介值定理证明存在一点满足函数方程式.

五、检测题及答案提示

(一) 选择题

1. 已知 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$，则以下结论正确的是(　　).

A. 函数在 $x = 1$ 处有定义且 $f(1) = 2$　　B. 函数在 $x = 1$ 的某空心邻域内有定义

C. 函数在 $x = 1$ 的右侧某邻域内有定义　　D. 函数在 $x = 1$ 的左侧某邻域内有定义

2. 已知函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，则函数在 $x = 0$ 处(　　).

A. 极限存在　　B. 极限不存在

C. 左、右极限存在且相等　　D. 左、右极限不存在

3. 函数 $f(x) = x\sin x$(　　).

A. 当 $x \to \infty$ 时为无穷大　　B. 在$(-\infty, +\infty)$上有界

C. 在$(-\infty, +\infty)$上无界　　D. 当 $x \to \infty$ 时极限存在

4. 数列 $\{x_n\}$ 有界是它收敛的(　　).

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a - \cos x}{x\sin x} = \dfrac{1}{2}$，则 a 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -1

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 mx}{3x^2} =$(　　).

A. 0　　B. ∞　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $\dfrac{m^2}{3}$

7. 当 $x \to 0^+$ 时，下列变量中为无穷小量的是(　　).

A. $\sqrt{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}}$　　B. $\ln(x-1)$　　C. $\frac{1}{\ln x}$　　D. $(1+x)^{\frac{1}{x}}-1$

8. 下列各式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$

9. 设 $x \to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

A. 5　　B. 4　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

10. (2015 上半年) 与命题“$y=f(x)$ 在 x_0 连续”不等价的命题是(　　).

A. 对任意数列 $\{x_n\}$，$x_n \to x_0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=x_0$

B. $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得 $\forall\ |x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

C. 存在数列 $\{x_n\}$，$x_n \to x_0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

D. 对任意数列 $\{x_n\}$，$x_n \to x_0$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，有 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$

(二) 解答题

11. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3)(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+\cdots+20^n}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

12. 设 $x_1=1$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}\ (n=2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

13. 指出 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ e, & x=0\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

14. 证明方程 $x=2\sin x+1$ 至少有一个小于 3 的正根.

答案提示

(一) 1. C.(提示：考查单侧极限的定义)

2. B.(提示：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$)

3. C.(提示：无界函数不一定是无穷大)

4. B.(提示：数列收敛一定有界，但有界不一定收敛)

5. B.(提示：$x\to 0$ 时，$1-\cos \sim \frac{1}{2}x^2$)

6. D.(提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 mx}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(mx)^2}{3x^2}=\frac{m^2}{3}$)

7. C.　8. D.

9. A.(提示：因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$，当 $x\to 0$ 时，$e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right)$，所以 $n=5$)

10. C.(提示:$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$)

(二) 11. 解:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{\ln e}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(x^2)^2}{2}}{x^2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) 因为分母的次数大于分子的次数,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=0$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+\cdots+20^n}=20\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{20}\right)^n+\left(\dfrac{4}{20}\right)^n+\cdots+1^n}=20$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{-n\frac{2nx+x^2}{2n^2}}=e^{-x}$.

12. 解:先用数学归纳法证明 $x_n<3$ 且单调递增,故极限存在. 再设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{2a+3}$,解得 $a=3$.

13. 解:因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e^{-1}\neq f(0)$,所以 $x=0$ 为可去间断点.

14. 证:令 $f(x)=x-2\sin x-1$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f(0)=-1<0$,$f(3)=2-2\sin 3>0$,由介值定理,至少存在一 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f(\xi)=0$,即方程 $x=2\sin x+1$ 至少有一个小于 3 的正根.

§1.2 一元函数微分学

一、目标及要求

1. 理解导数的概念及其几何意义,了解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的有理运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.

3. 理解微分的概念,了解微分概念中所包含的局部线性化思想,了解微分的有理运算法则和一阶微分形式不变性.

4. 了解高阶导数的概念,掌握初等函数一阶、二阶导数的求法.

5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶导数以及二阶导数,会解一些简单实际问题中的相关变化率问题.

6. 理解罗尔(Rolle) 定理和拉格朗日(Lagrange) 中值定理,了解柯西(Cauchy) 中值定理,会用洛必达(L'Hospital) 法则求不定式的极限.

7. 了解泰勒(Taylor) 定理以及用多项式逼近函数的思想.

8. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求极值的方法，会求解较简单的最大值与最小值的应用问题.

9. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描绘一些简单函数的图形(包括水平和铅直渐近线).

二、知识梳理

1. 导数与微分的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，使 x 在 x_0 处取得一增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$，函数 y 相应地得到增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数在点 x_0 处可导，该极限值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0),\quad y'\big|_{x=x_0},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} \text{或} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},$$

即
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

单侧导数 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为：

左导数
$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

或
$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

右导数
$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

或
$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

如果 $y=f(x)$ 在(a,b)内每一点均可导，则称该函数在(a,b)内可导；若 $y=f(x)$ 在(a,b)内可导，且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别具有右导数 $f'_+(a)$ 和左导数 $f'_-(b)$，则称 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上可导.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在该区间内，如果函数增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处是可微的，$A\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量的增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x.$$

当 x 为自变量时 $\mathrm{d}x=\Delta x$，同时可证 $f'(x_0)=A$，所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

2. 连续、可导、可微的关系

(1) $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$；

(2) 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续；反之，若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处未必可导；

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导.

3. 基本初等函数的导数公式与微分公式

$y=C$(常数)	$y'=0$	$\mathrm{d}y=0$
$y=x^{\alpha}$(α 为常数)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{d}y=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$	$y'=a^{x}\ln a$	$\mathrm{d}y=a^{x}\ln a\mathrm{d}x$
特例	$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$
$y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
特例	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$\mathrm{d}y=-\sin x\mathrm{d}x$
$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}=\sec^{2}x$	$\mathrm{d}y=\sec^{2}x\mathrm{d}x$
$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}=-\csc^{2}x$	$\mathrm{d}y=-\csc^{2}x\mathrm{d}x$
$y=\sec x$	$y'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}y=\sec x\tan x\mathrm{d}x$
$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}y=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$
$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$
$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$
$y=\arctan x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$
$y=\operatorname{arccot}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$

4. 函数和、差、积、商的求导、微分法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 均可导，则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$；　　$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$；

$(uv)'=uv'+vu'$；　　$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$；

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^{2}}(v\neq0)$；　　$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^{2}}(v\neq0)$.

5. 反函数的求导法则

设 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导，$f'(x)\neq0$，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

6. 复合函数的求导、微分法则

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$y'_{x}=f'(u)\varphi'(x)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

这种求复合函数导数的方法称之为链式法则，该法则可推广到多个函数复合的情形中去.

微分形式的不变性

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

7. 隐函数的求导法

方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，得到关于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,f(x))=0,$$

然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

8. 由参数方程所确定的函数的求导法

设 $x(t)$，$y(t)$ 均二阶可导，且 $x'(t)\neq 0$，由参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

又 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{1}{x'(t)},$$

所以 $y=y(x)$ 的二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}.$$

9. 高阶导数

当 $f(x)$ 为 n 阶可导函数时，有 $f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=[f^{(n-1)}(x)]'$ $(n=2,3,\cdots)$.

10. 中值定理

罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 满足：(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；(2) 在开区间(a,b)内可导；(3) $f(a)=f(b)$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足：(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；(2) 在开区间(a,b)内可导，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad 或\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

成立.

推论　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

柯西中值定理　如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；(2) 在开区间(a,b)内可导；(3) 对任意 $x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

泰勒中值定理　如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则对任意 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$