计算方法丛书 · 典藏版——4

线性规划计算方法

赵凤治 编著

科学出版社

计算方法丛书·典藏版　4

线性规划计算方法

赵凤治　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

线性规划是一个应用广泛的数学分支．本书介绍几种常用的线性规划计算方法．如：单纯形法、初等矩阵法、迭代法等；讨论几种特殊类型的线性规划问题的解法，如：生产组织与管理问题、运输问题、分配问题等．

本书可供有关专业的教师、研究生，大学高年级学生以及科研、工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性规划计算方法/赵凤治编著．—北京：科学出版社，2015.11

（计算方法丛书）

ISBN 978-7-03-046408-8

Ⅰ．①线… Ⅱ．①赵… Ⅲ．①线性规划－计算方法 Ⅳ．①O221.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第275755号

责任编辑：向安全 张鸿林／责任校对：鲁 素

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1981年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2016年 1月印 刷 印张：10 1/8

字数：265 000

定价：69.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

线性规划是数学规划中理论完整、方法成熟、应用广泛的一个分支．它可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济规划、经营管理等许多方面提出的大量问题．为适应在电子计算机上求解这些问题的要求，本书有选择地介绍一些线性规划问题的常用解法．

本书共分四章：第一章是本书的重点，介绍单纯形法．包括对偶单纯形法、原来-对偶单纯形法、分解原则等．为了对计算中或应用中产生的问题进行分析，也进行了必不可少的理论方面的讨论．第二章介绍初等矩阵法和迭代法．他们与单纯形法有联系，但又各有特色．这里对初等矩阵法介绍得较为详细，因为用它求解一些实际问题，特别是大规模稀疏线性规划问题较为方便；迭代法讲得较少，对其有兴趣的读者可参阅文献[13,14]．第三章以特殊类型线性规划作为讨论对象，讨论了运输问题、分配问题、生产组织与管理问题的解法．最后一章叙述了用线性规划的解法求解分段线性规划、非线性规划、整数线性规划问题的计算方案．

介绍每一个算法一般分四步，首先做一些理论上的讨论，以便使读者把握住方法的实质；第二是计算公式，便于在机器上实现时套用；第三是给出示意性框图，供读者了解算法的逻辑结构；最后提供手算例题，帮助读者掌握算法．书中还附有少量习题和参考文献．

限于作者水平，缺点和错误在所难免，请读者批评指正．

作　者

目　　录

第一章 单纯形法

在线性规划的解法中，单纯形法是一个最著名的方法. 它在理论上是完善的、严格的；在实践上是方便的、有效的.

这一章介绍单纯形法的几种实现形式和与之有关的理论，还介绍大规模线性规划问题的分解算法.

§1. 线性规划的对偶理论

线性规划的对偶理论是线性规划理论的一个重要部分. 利用它来分析线性规划解的存在性、稳定性以及其它特性是很方便的. 在建立计算方法时，对偶理论的研究也有指导意义.

数学规划对偶理论的建立，首先就是在线性规划的范围内进行的. 数学规划工作者希望能在非线性规划中，也建立起类似于线性规划对偶理论的理论. 所以线性规划对偶理论自 1947 年提出以后在不到三十年的时间内，数学规划的对偶理论就有了很大的发展. 在这些发展中，人们都试图能保存线性规划对偶理论的一些很好的性质. 因此可以说，对线性规划对偶理论的深刻理解，不单是研究线性规划所必需的，并且对于研究数学规划的对偶理论也是必要的.

1.1. 线性不等式组的有关对偶理论

在研究线性规划的对偶理论之前，我们先讨论一些线性不等式组方面的知识.

定义 1.1. 我们称

(P): $\boldsymbol{v} \geqslant \mathbf{0}$, $A^T\boldsymbol{u} + C^T\boldsymbol{v} \geqslant \mathbf{0}$, $B^T\boldsymbol{u} + D^T\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$;

与

(D): $-A\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, $-C\boldsymbol{x}-D\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}\geqslant 0$

为一对相互对偶的线性不等式组. 也可以说成,(P)是"原有"的线性不等式组,(D)是(P)的"对偶"线性不等式组.

很明显,依定义,若把(D)看成"原有"的线性不等式组,则其对偶线性不等式组刚好是(P). 这种对偶关系,我们说它具有"对合"性质,即(P)的对偶的对偶刚好是问题(P)本身. 这种对合性质也是数学规划对偶理论所追求的一个重要特性.

对于这一对相互对偶的线性不等式组有下述重要性质.

定理 1.1. 一对对偶线性不等式组.

(P): $\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}$ 自由, $A^T\boldsymbol{u}+C^T\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$, $B^T\boldsymbol{u}+D^T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$;

(D): $-A\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, $-C\boldsymbol{x}-D\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{y}$ 自由,

具有解 $\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{v}^*$ 和 $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$, 满足

$$\boldsymbol{v}^*-C\boldsymbol{x}^*-D\boldsymbol{y}^*>\boldsymbol{0},$$
$$A^T\boldsymbol{u}^*+C^T\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{x}^*>\boldsymbol{0}.$$

这里在两个向量之间用符号">"表示,">"左面的向量与">"右面的向量,各个分量之间都成立严格不等式. 如 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T>\boldsymbol{0}$, 是指满足不等式

$$w_j>0 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

在上面两组不等式组中各个量的意义如下:

A: $m\times n$ 矩阵;

B: $m\times r$ 矩阵;

C: $p\times n$ 矩阵;

D: $p\times r$ 矩阵;

$\boldsymbol{x}$: n 维向量,一般指列向量.

$\boldsymbol{y}$: r 维向量;

$\boldsymbol{u}$: m 维向量;

$\boldsymbol{v}$: p 维向量.

其中符号"T"记于矩阵或向量的右上角,表示矩阵或向量的转置.

为了证明定理 1.1,我们先要证明引理 1.1 及引理 1.2.

引理 1.1. 线性不等式组

$$A^T u \geqslant 0,$$

和

$$Ax = 0,\ x \geqslant 0$$

有解 u^*, x^* 满足

$$A^T u^* + x^* > 0.$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵，u 为 m 维向量，x 为 n 维向量.

容易看出，引理 1.2 是定理 1.1 中取 $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ 的特殊情形. 所以它们也是一对相互对偶的线性不等式组.

证　我们先证明设引理 1.1 有解 $u^{(j)}$, $x^{(j)}$ 使 $A^T_{\cdot j} u^{(j)} + x^{(j)}_j > 0$ 的情形. 其中 $A_{\cdot j}$ 为矩阵 A 的第 j 列，$A^T_{\cdot j}$ 为一行向量. $u^{(j)}$, $x^{(j)}$ 为与 $A_{\cdot j}$ 有关的两个向量. $x^{(j)}_j$ 为纯量，是向量 $x^{(j)}$ 的第 j 个分量. 因为 A 的各个列向量 $x^{(j)}$ 的各个分量和标号 j 无关，也就是说，我们完全可以用分量交换的方式把它们换到任意指定的位置. 所以为证明 $A^T_{\cdot j} u^{(j)} + x^{(j)}_j > 0$，只要证明 $A^T_{\cdot 1} u^{(1)} + x^{(1)}_1 > 0$ 就够了. 即对

$$A^T u \geqslant 0 \tag{1.1}$$

和

$$Ax = 0,\ x \geqslant 0 \tag{1.2}$$

有解 $u^{(1)}$, $x^{(1)}$, 且满足

$$A^T_{\cdot 1} u^{(1)} + x^{(1)}_1 > 0. \tag{1.3}$$

用归纳法证明：

当 A 只有一列时，记为 $A_{\cdot 1}$. 若 $A_{\cdot 1} = 0$, 取 $x^{(1)}_1 = \alpha > 0$, 不管 $u^{(1)}$ 取任何向量，只要各分量的值取定，于是上述(1.1), (1.2), (1.3)都可满足.

若 $A_{\cdot 1} \neq 0$, 取 $u^{(1)} = A_{\cdot 1}$, $x^{(1)}_1 = 0$, 于是代入(1.1), (1.2), (1.3)都满足. 因此对于 A 只有一列时命题成立.

设当 A 有 k 列时命题成立，证明 A 有 $k+1$ 列时命题也成立. 记

$$A^{\Delta} = (A_{\cdot 1}, \cdots, A_{\cdot k}, A_{\cdot k+1}) = (\tilde{A}, A_{\cdot k+1}).$$

由归纳法的假设，有 u, x 使得

$$\widetilde{A}^T\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \widetilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{u} + x_1 > 0.$$

下面分两种情形来构造 $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 及 $\boldsymbol{x}^{(1)}$.

i) 当 $A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u} \geqslant 0$ 时，取 $\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x}^{(1)} = (\boldsymbol{x}^T, 0)^T$, 只要直接代入公式进行验证就可以知道，如此构造的 $\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 满足

$$(A^{\triangle})^T\boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T\boldsymbol{u} \\ \widetilde{A}^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \geqslant \boldsymbol{0},$$

$$A^{\triangle}\boldsymbol{x}^{(1)} = (\widetilde{A},\ A_{\cdot k+1})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \widetilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant \boldsymbol{0},$$

$$(A^{\triangle}_{\cdot 1})^T\boldsymbol{u}^{(1)} + x_1^{(1)} = A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{u} + x_1 > 0.$$

ii) 当 $A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u} < 0$ 时，引进矩阵

$$\begin{aligned} B &= (B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_k) \\ &= (A_{\cdot 1} + \lambda_1 A_{\cdot k+1},\ A_{\cdot 2} + \lambda_2 A_{\cdot k+1},\ \cdots,\ A_{\cdot k} + \lambda_k A_{\cdot k+1}). \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_j = \frac{-A^T_{\cdot j}\boldsymbol{u}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

对于 B 有

$$\begin{aligned} B^T\boldsymbol{u} = (&(A^T_{\cdot 1} + \lambda_1 A^T_{\cdot k+1})\boldsymbol{u},\ (A^T_{\cdot 2} + \lambda_2 A^T_{\cdot k+1})\boldsymbol{u},\ \cdots, \\ &(A^T_{\cdot k} + \lambda_k A^T_{\cdot k+1})\boldsymbol{u})^T = 0. \end{aligned}$$

因为 B 是只含有 k 列的矩阵，故根据归纳法的假设有 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{y}$ 满足

$$B^T\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0},\ B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0},\ B_1^T\boldsymbol{v} + y_1 > 0.$$

于是取

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(\boldsymbol{y}^T,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j y_j\right)^T$$

其中

$$\mu = \frac{-A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}, \qquad \boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k)^T,$$

则 $\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 为所要求的向量.

事实上

$$
\begin{aligned}
(A^{\triangle})^T\boldsymbol{u}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T \\ A^T_{\cdot k+1} \end{pmatrix}(\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{u}) \\
&= (A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{v}+\mu A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{u} \quad A^T_{\cdot 2}\boldsymbol{v}+\mu A^T_{\cdot 2}\boldsymbol{u}\cdots A^T_{\cdot k}\boldsymbol{v} \\
&\qquad +\mu A^T_{\cdot k}\boldsymbol{u} \quad A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}+\mu A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u})^T \\
&= \Bigg(A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{v}-\frac{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{u} \quad A^T_{\cdot 2}\boldsymbol{v}+\frac{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}A^T_{\cdot 2}\boldsymbol{u}\cdots \\
&\qquad A^T_{\cdot k}\boldsymbol{v}-\frac{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}A^T_{\cdot k}\boldsymbol{u} \quad A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v} \\
&\qquad -\frac{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}\Bigg)^T \\
&= ((A_{\cdot 1}+\lambda_1 A_{k+1})^T\boldsymbol{v}(A_{\cdot 2}+\lambda_2 A_{k+1})^T\boldsymbol{v}\cdots \\
&\qquad (A_{\cdot k}+\lambda_k A_{k+1})^T\boldsymbol{v} \quad 0)^T \\
&= (B^T\boldsymbol{v} \quad 0)^T \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{\triangle}\boldsymbol{x}^{(1)} &= (\widetilde{A} \quad A_{\cdot k+1})\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j y_j \end{pmatrix} \\
&= \widetilde{A}\boldsymbol{y}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j A_{\cdot k+1}y_j = B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\lambda_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,k)$ 所以明显地有

$$
\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j y_j \end{pmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}.
$$

最后

$$
\begin{aligned}
A^{\triangle T}_{\cdot 1}\boldsymbol{u}^{(1)}+x_1^{(1)} &= A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{v}-\frac{A^T_{\cdot 1}\boldsymbol{u}}{A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{u}}A^T_{\cdot k+1}\boldsymbol{v}+y_1 \\
&= B_1^T\boldsymbol{v}+y_1>0.
\end{aligned}
$$

故如此构造的 $\boldsymbol{u}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(1)}$ 满足所有条件．证毕．

只要对 A 的各列和 $\boldsymbol{x}$ 的各分量重新排列，仿上面的证明便可以得出 $\boldsymbol{u}^{(j)}$，$\boldsymbol{x}^{(j)}$，其满足

$$
A^T\boldsymbol{u}^{(j)}\geqslant 0,\quad A\boldsymbol{x}^{(j)}=0,\quad \boldsymbol{x}^{(j)}\geqslant 0,\quad A^T_{\cdot j}\boldsymbol{u}^{(j)}+x_j^{(j)}>0.
$$

若令

$$\boldsymbol{u}^* = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}^{(j)},$$

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}^{(j)},$$

则有

$$A^T\boldsymbol{u}^* = \sum_{j=1}^{n} A^T\boldsymbol{u}^{(j)} \geqslant \boldsymbol{0},$$

$$A\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n} A\boldsymbol{x}^{(j)} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}^{(j)} \geqslant \boldsymbol{0}$$

及由

$$A^T_{\cdot j}\boldsymbol{u}^* + x_j^* = \sum_{k=1}^{n} (A^T_{\cdot j}\boldsymbol{u}^{(k)} + x_j^{(k)}) \geqslant A^T_{\cdot j}\boldsymbol{u}^{(j)} + x_j^{(j)} > 0$$
$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

推出

$$A^T\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}.$$

引理 1.1 证完.

有了这个引理,很容易证明下述

引理 1.2. 线性不等式组

$$\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0},\ G^T\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0},$$

与

$$-G\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

有解 $\boldsymbol{v}^*$ 和 $\boldsymbol{x}^*$ 满足

$$\boldsymbol{v}^* - G\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0},$$

$$G^T\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}.$$

容易看出,引理 1.2 是定理 1.1 中取 $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, $C = G$ 的特殊情形,表明这还是一对对偶线性不等式组.

证　在引理 1.1 中我们取 $A = (I\ \ G)$,于是有解 $\boldsymbol{v}^*$ 及 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}^* \\ \boldsymbol{x}^* \end{pmatrix}$

满足

$$(I\ \ G^T)^T\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0},\quad (I\ \ G)\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}^*\\ \boldsymbol{x}^*\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}^*\\ \boldsymbol{x}^*\end{pmatrix}\geqslant\mathbf{0},\ (I\ \ G^T)^T\boldsymbol{v}^*+\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}^*\\ \boldsymbol{x}^*\end{pmatrix}>\mathbf{0}.$$

其中 I 为一单位矩阵. 从第一式求出 $\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0}$, $G^T\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0}$, 从第二、三式求出$-G\boldsymbol{x}^*\geqslant\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^*\geqslant\mathbf{0}$, 从第二、四式求出 $\boldsymbol{v}^*-G\boldsymbol{x}^*>\mathbf{0}$ 及 $G^T\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{x}^*>\mathbf{0}$. 引理 1.2 证完.

现在证明定理 1.1.

证　在引理 1.1 中取

$$G=\begin{pmatrix}-A & -B & B\\ A & B & -B\\ C & D & -D\end{pmatrix},$$

相应地将 $\boldsymbol{v}$ 扩大为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{x}$ 扩大为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix},$$

则存在

$$\boldsymbol{u}_1^*\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{u}_2^*\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0};\ \boldsymbol{x}^*\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{y}_1^*\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{y}_2^*\geqslant\mathbf{0}$$

满足

$$\left.\begin{aligned}&-A^T\boldsymbol{u}_1^*+A^T\boldsymbol{u}_2^*+C^T\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0},\\ &-B\boldsymbol{u}_1^*+B^T\boldsymbol{u}_2^*+D^T\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0},\\ &B^T\boldsymbol{u}_1^*-B^T\boldsymbol{u}_2^*-D^T\boldsymbol{v}^*\geqslant\mathbf{0},\end{aligned}\right\}\text{对应于 } G^T\boldsymbol{v}\geqslant\mathbf{0},$$

$$\left.\begin{aligned}&A\boldsymbol{x}^*+B\boldsymbol{y}_1^*-B_2\boldsymbol{y}_2^*\geqslant\mathbf{0},\\ &-A\boldsymbol{x}^*-B\boldsymbol{y}_1^*+B_2\boldsymbol{y}_2^*\geqslant\mathbf{0},\\ &-C\boldsymbol{x}^*-D\boldsymbol{y}_1^*+D\boldsymbol{y}_2^*\geqslant\mathbf{0},\end{aligned}\right\}\text{对应于 }-G\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{v}^* - C\boldsymbol{x}^* - D\boldsymbol{y}_1^* + D\boldsymbol{y}_2^* > \boldsymbol{0}$，对应于 $\boldsymbol{v}^* - G\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}$ 的最后一部分.

$-A^T\boldsymbol{u}_1^* + A^T\boldsymbol{u}_2^* + C^T\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}$,对应于 $G^T\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}$ 的第一部分. 我们取

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_2^* - \boldsymbol{u}_1^*,$$
$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}_1^* - \boldsymbol{y}_2^*$$

代入上面各式,得出

$$A^T\boldsymbol{u}^* + C^T\boldsymbol{v}^* \geqslant \boldsymbol{0}, \quad -A\boldsymbol{x}^* - B\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0},$$
$$B^T\boldsymbol{u}^* + D^T\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{0}, \quad -C\boldsymbol{x}^* - D\boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$A^T\boldsymbol{u}^* + C^T\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* \geqslant 0, \quad \boldsymbol{v}^* - C\boldsymbol{x}^* - D\boldsymbol{y}^* > \boldsymbol{0}.$$

为定理 1.1 所要证明的.

定理 1.2. 我们称

$$K\boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0},$$

当 $K^T = -K$ 时为自对偶系统,它有解 $\boldsymbol{w}^*$ 满足

$$K\boldsymbol{w}^* + \boldsymbol{w}^* > \boldsymbol{0}.$$

证　在引理 1.2 中取 $G = K^T = -K$,

则存在 $\boldsymbol{v}^*$ 及 $\boldsymbol{x}^*$ 满足

$$\boldsymbol{v}^* \geqslant \boldsymbol{0}, \quad K\boldsymbol{v}^* \geqslant \boldsymbol{0}, \quad K\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{v}^* + K\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}, \quad K\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}.$$

取

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^*,$$

便有

$$K\boldsymbol{w}^* = K(\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^*) = K\boldsymbol{v}^* + K\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\begin{aligned} K\boldsymbol{w}^* + \boldsymbol{w}^* &= K(\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* \\ &= \boldsymbol{v}^* + K\boldsymbol{x}^* + K\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

由此得证.

对偶线性不等式组还有一些结果,这里就不予介绍了.

练　　习

1. (Farkas 引理)若对所有满足

$$Ax\geqslant 0,$$

的 x 都有

$$b^Tx\geqslant 0$$

成立,则一定有 $y\geqslant 0$ 使

$$A^Ty=b$$

成立.

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵,b 为 n 维向量.

证明此引理.

2. 给出 Farkas 引理的几何解释.

3. 若

$$Ax\geqslant 0,$$
$$b^Tx<0$$

无解,则

$$A^Ty=b,$$
$$y\geqslant 0$$

一定有解.

1.2. 线性规划的对偶理论

定义 1.2. 我们称下述的数学问题为线性规划问题:

(LP): 极大化

$$S=c^Tx \tag{1.4}$$

满足于约束条件

$$Ax\leqslant b, \tag{1.5}$$
$$x\geqslant 0. \tag{1.6}$$

其中 c 是一个给定的 n 维向量,称为价值系数向量,或目标函数系数向量. $S=c^Tx$ 被称为目标函数. x 为未知量,也是一个 n 维向量. A 为一给定的 $m\times n$ 矩阵. 称为技术状态矩阵,或约束条件系数矩阵. b 为给定的 m 维列向量,称为要求向量,或约束条

件右端向量． $Ax \leqslant \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 称为约束条件．因为目标函数和约束条件中各函数都是自变量 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数，故称为线性规划问题．在整个这本书中都将讨论这一类数学问题．

每一个线性规划问题中有三个给定的量，即 $\boldsymbol{c}$, A, $\boldsymbol{b}$. 也可以说凡给定了 A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 我们都可依(1.4), (1.5), (1.6)写出一个线性规划问题．

定义 1.3. 对应着每一个线性规划问题 (*LP*)，都可给出与其匹配的另一个线性规划问题：

(*LD*)：极小化

$$z = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}, \tag{1.7}$$

满足于约束条件

$$A^T \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}. \tag{1.9}$$

称 (*LP*) 为"原有"线性规划问题，称 (*LD*) 为 (*LP*) 的"对偶"线性规划问题．

应该注意，对偶线性规划一定要有一对线性规划问题．没有一个"对偶"的线性规划存在，就无所谓"原有"线性规划，自不必说，没有"原有"规划就更谈不上什么"对偶"线性规划问题了．

在一对对偶线性规划问题中，所用的给定量都为 A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. 有了 A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 可以用 (1.4), (1.5), (1.6)写出 (*LP*)；同时也可以用 (1.7),(1.8),(1.9)写出(*LD*)．所以 A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 给定了，问题 (*LD*) 也就给定了．因此可以说沿以上的规律定义的对偶线性规划，一旦 (*LP*) 给定了，(*LD*) 也是确定的．

因为极小化 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ 与极大化 $-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ 相一致．$A^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}$ 与 $-A^T\boldsymbol{y} \leqslant -\boldsymbol{c}$ 相一致．所以可以把 (*LD*) 改写成：

(*LP*)′：极大化

$$-z = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

满足于约束条件

$$-A^T\boldsymbol{y} \leqslant -\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

于是，按上述的对偶规则，可以写出 (*LP*)′ 的对偶线性规划问题：

$(LD)'$：极小化

$$-s = c^T x$$

满足于约束条件

$$(-A^T)^T x \geqslant -b,$$

$$x \geqslant 0.$$

事实上，$(LP)'$ 就是前面的 (LD)，而 $(LD)'$ 就是前面的 (LP).

也就是说，对于一个给定的线性规划问题 (LP) 我们可以根据对偶规则写出其对偶问题(LD).对于新的线性规划问题(LD)，还可以根据对偶规则再写出 (LD) 的对偶，此时给出的线性规划问题刚好是 (LP) 本身. 所以线性规划的对偶关系具有“对合”性质. 于是一对相互对偶的线性规划问题，其中哪一个都可以称为原有问题，而另一个称为它的对偶问题. 因此我们可以称 (LP)，(LD) 是一对互为对偶的线性规划问题.

对偶理论的提出是有深刻的实践背景的，对此大家可以参阅书后参考文献.

一对对偶线性规划有一些很好的性质，研究这些性质是数学规划对偶理论的重要内容. 为了研究这些性质，首先引进一些概念.

定义 1.4. 容许解：满足全部约束条件的向量称为容许解，也可称为一个容许点.

如对问题 (LP)，若有 x° 满足 $Ax^\circ \leqslant b$, $x^\circ \geqslant 0$，我们便称 x° 为 (LP) 的一个容许解.

又如对问题(LD)，若有 y° 满足 $A^T y^\circ \geqslant c$, $y^\circ \geqslant 0$，则称 y° 为 (LD) 的一个容许解. 其中 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 的约束条件且不可忽略. 有时把这种约束条件称为“平庸”的约束条件，但这些约束条件不满足也不能称为容许解.

定义 1.5. 容许集合：也有时称为容许区域，容许集等. 所有容许点构成的集合称为容许集合.

因为可以把一个容许点称为一个容许解. 所以容许集合也就是容许解的集合，