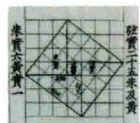
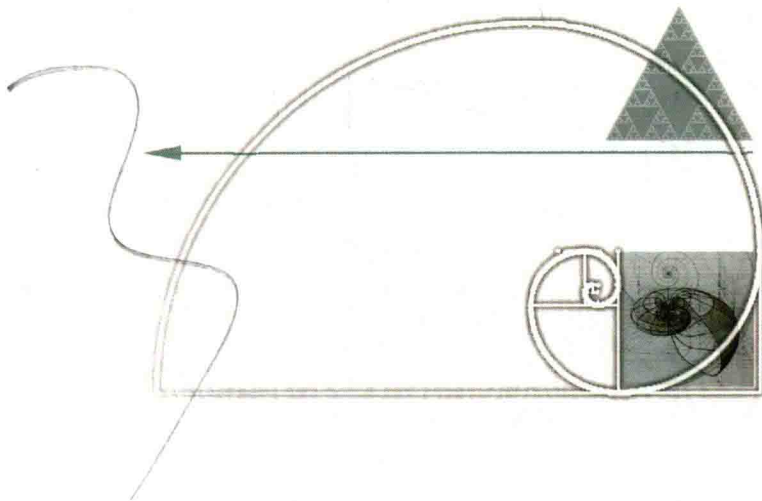


数学思想 与 数学文化



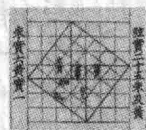
刘华丽 高楠 主编



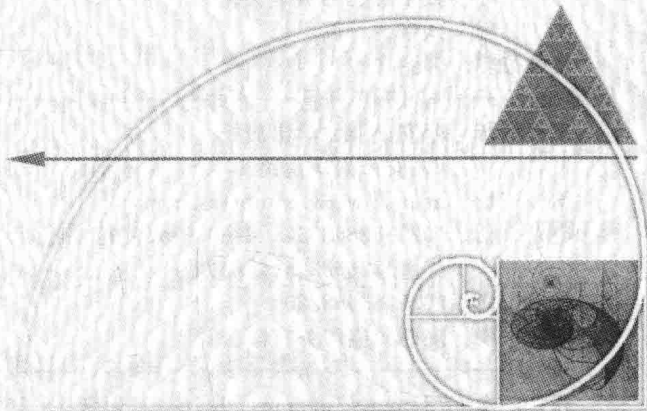
数学

数学文化

想与



刘华丽 高楠 主编



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学思想与数学文化/刘华丽,高楠主编.—西安:西安
交通大学出版社,2017.7

ISBN 978-7-5605-9928-1

I. ①数… II. ①刘… ②高… III. ①数学教学-
教学研究 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 187631 号

书 名 数学思想与数学文化
主 编 刘华丽 高楠
责任编辑 郭鹏飞

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)

传 真 (029)82668280

印 刷 陕西元盛印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 **印张** 15.25 **字数** 368千字

版次印次 2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5605-9928-1

定 价 42.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82665127

读者信箱:lg_book@163.com

版权所有 侵权必究

前 言

目前,我们倡导素质教育,创新成了人类科学研究行为的基本内容,创新能力的培养是素质教育的目标。由于数学这门学科的特点,数学教育本质上就是一种素质教育,搞好数学教学就能体现素质教育。所以,数学文化与思想方法的教育在培养现代创新人才中的地位是任何学科都代替不了的。

数学学习贯穿着两条主线:数学基础知识和数学文化与思想方法。数学基础知识是一条明线,而数学文化与思想方法则是一条暗线。在学习时,我们应充分挖掘由数学基础知识所反映出来的数学文化与思想方法。本书通过几个相对独立的专题,从多个角度探讨数学文化、思想,既把学生多年来学习的数学知识上升到精神、方法、思想的层面上,又从文化和思想的角度反观数学发展中的规律,使学生提高思维品质,学会洞察本质,严谨准确,以简驭繁,运筹帷幄。

本书的数学基础以高中数学知识为起点,适当的高等数学理念为升华。通过该书的学习,要使学生了解:(1)数学与哲学之间的交互影响关系;(2)数学与人类文明的相互影响、数学发展史、未来数学的发展方向;(3)数学的思想、方法;(4)数学的精神;(5)数学在自我的学习、生活中将得到的启示。目的是让当代大学生懂得数学不仅仅是科学的工具和语言、同时它也是一种十分重要的思维方式和文化精神。而对于一个大学生,这种精神和思维方式不仅是十分基本的,而且是无法从其他途径获得的,学习“数学文化与思想”课,对于提高大学生综合素质有非常重要的实际意义。

本书的宗旨是以熟知的数学知识为背景,挖掘数学知识中所蕴含的数学文化,提炼数学思想和方法,体会数学精神。力争人人能听懂,人人有收获!让我们一起忘掉数学带来的困惑或荣耀的过往,以轻松愉悦的心境,了解它的前世今生,重拾对数学的兴趣,感悟数学的思想方法,改善思维品质,欣赏它的美,感受它的品格与精神吧!

本书共分九章,其中第一、三、四、五章由刘华丽老师编写,第二、六、七、八、九章由高楠老师编写。编写的过程中,得到西安石油大学数学教研室的各位老师的支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

由于水平所限,书中疏漏之处在所难免,敬请广大读者多提宝贵意见。

目 录

| | |
|-----------------------|-------|
| 第一章 绪 论 | (1) |
| 第一节 什么是数学 | (1) |
| 第二节 数学文化概述 | (5) |
| 第三节 数学发展简史 | (11) |
| 第二章 数学特点与思想方法的再认识 | (20) |
| 第一节 数学的抽象 | (20) |
| 第二节 有限与无限的问题 | (30) |
| 第三节 数学思想方法概述 | (37) |
| 第四节 心智的模式——推理 | (48) |
| 第三章 中国古典数学中的数学文化 | (55) |
| 第一节 韩信点兵与中国剩余定理 | (55) |
| 第二节 河图与洛书的数学内涵 | (62) |
| 第三节 八卦文化的数学魅力 | (68) |
| 第四节 中国数学史 | (74) |
| 第四章 初等数学中的数学文化 | (87) |
| 第一节 神秘的黄金分割与曼妙的斐波纳契数列 | (87) |
| 第二节 历法与连分数 | (95) |
| 第三节 世界通用语言——勾股定理 | (103) |
| 第五章 变量中的数学文化 | (111) |
| 第一节 微积分概述 | (111) |
| 第二节 微积分发展简史 | (115) |
| 第三节 三次数学危机 | (122) |
| 第六章 生活相遇数学 | (132) |
| 第一节 美术馆里遇到的数学 | (132) |
| 第二节 音乐与数学的对话 | (140) |
| 第三节 数学学科的新分支——体育数学 | (157) |
| 第四节 经济与数学 | (161) |
| 第五节 大数据时代与统计学 | (168) |

| | | |
|-------------|-------------------|-------|
| 第六节 | 没有度量的几何学——射影几何的产生 | (176) |
| 第七章 | 神秘的分形与混沌 | (181) |
| 第一节 | 几何怪物——分形 | (181) |
| 第二节 | 奇哉混沌 | (186) |
| 第三节 | 几何学发展简史 | (192) |
| 第四节 | 数学学科概述 | (199) |
| 第八章 | 数学猜想与数学名题 | (205) |
| 第一节 | 希尔伯特的 23 个问题 | (205) |
| 第二节 | 费马大定理 | (211) |
| 第三节 | 哥德巴赫猜想 | (214) |
| 第四节 | 四色问题 | (216) |
| 第五节 | 千禧年大奖难题 | (219) |
| 第九章 | 数学建模简介 | (223) |
| 参考文献 | | (236) |

第一章 绪 论

第一节 什么是数学

一、何为数学？

何为数学？这个问题是如此简洁，似乎每个学过数学的人都可以回答这个问题。但是，真正来回答这个问题的时候，我们又感觉到某种力不从心。小学生说：“数学是加、减、乘、除运算”；中学生说：“数学是方程，是图形”；高中学生说：“数学是函数，是空间关系”；大学生说：“数学是微积分”；……这些回答都与自己已有的数学知识相关，具有什么样的数学教育背景，就会对数学有不同的理解，但这些观点无疑只是说出了“数学是什么”这个问题的一部分答案。那么，数学到底是什么呢？

由于数学的内涵和形式在不断发展，数学的分支以及与其他学科的交叉越来越多，人们对数学知识的需求、掌握和理解不同，必然有不同的见解。美国数学家德福林在《数学的语言》一书中对数学的认识是：

1. 一切不只是数字

到公元前 500 年左右为止，数学的确是有关数字的一种学问。这是埃及和古巴比伦时期的数学。这时的数学所包括得几乎都以算数为主。它大部分属功利取向，充满模式的特色（譬如，对一个数字这样做，那样做，你将会得到答案。）

从大约公元前 500 年到公元 300 年这一时期，是希腊数学年代，他们关心的是几何。希腊人对数学不只存功取利，他们视数学为一种知性探索，其中包括美学和宗教成分。泰勒斯引进如下想法：数学上精确陈述的断言，都可以被一个形式的论证逻辑地证明出来。这一创新标志着“定理”这一数学的基石的诞生。

2. 运动中的数学

一直到 17 世纪中叶，英国的牛顿和德国的莱布尼茨各自独立发明微积分之前，数学的整体本质未曾有过根本的变革，或者说几乎没有任何显著的进展。实质上讲，微积分是研究运动和变化的一门学科。在此之前数学大都局限于计算、度量和形状描述的静态议题上。现在，引入了处理运动和变化的技巧之后，数学家终于可以研究行星的运行、地球上的自由落体运动、机械装置的运作、液体的流动、气体的扩散、飞行、动植物的生长、流行病的传染、利润的波动等等。在牛顿和莱布尼茨之后，数学成了研究数字、形状、运动、变化及空间的一门学问。

3. 模式的科学

基于数学活动如此迅速成长这一事实，对于“何为数学”这一问题，近三十年间，一个为大

部分数学家同意的有关数学的定义,终于出现了:数学是研究模式的科学。数值模式、形式的模式、运动模式、行为模式、重复机会事件模式等。这些模式可以是真实存在或想象的、视觉性或心智性、静态或动态的、定性或定量的、纯粹功利或有点超乎娱乐趣味的。它可以是源自我们周围的世界、源自空间和时间的深度,或者源自人类心灵的内部运作。不同种类的模式当然引出不同的数学分支。如:算术与数论研究数字与计算模式、几何研究形状模式、微积分研究运动模式、逻辑学研究推理模式、概率论处理机会模式等。

4. 进步之符号

在数学史上,可辨识的代数记号初次有系统地使用,似乎是从丢番图开始。在今日的数学书籍总是到处充满着符号,但是数学记号并不等于数学。就像乐谱并不等于音乐一样。乐谱的一页呈现一段音乐,当乐谱上的音符被唱出来或被乐器演奏时,你才可以得到音乐的本身。也就是说,在它的表演中,音乐变得有了生命,并成为我们经验的一部分。对于数学来说也是一样,书页上的符号只不过是数学的一种表现,要让一位有素养的表演者(譬如,受过数学训练的人)来读的话,印刷页上的符号就拥有了生命,正如抽象的交响乐一样,数学在读者的心灵之中存活于呼吸。

从古希腊起,数学与音乐就被视为一体之两面,两者都被认为是对宇宙秩序提供洞见的学科。直到了17世纪科学方法兴起之后,这两者才分道扬镳。

5. 当看到即发现到

计算机图形学对于数学家,对于让门外汉一瞥数学的内在世界而言,可以发挥极大的功用。例如,复数的动力系统起源于20世纪20年代法国数学家皮埃尔·法图与加斯东·朱利亚的研究。但是,一直到20世纪70年代晚期和20世纪80年代早期,计算机图形学的快速发展,贝努瓦·曼德勃罗及其他数学家才得以看到法图和朱利亚曾经研究过的结构。因缘于这个研究所得的这些美丽的图形,已经变成一种本身具有意义的艺术形式(分形几何)。

6. 让不可见变成可见

当你应用数学来研究某些现象时,数学真正带给你的是什么?这一问题的答案是:“数学让不可见变成可见”。如:概率论让我们预测选举结果;微积分预测明日天气;市场分析师使用各种数学理论预测股票市场等。当时代引领我们展望未来时,数学允许我们将另外一些不可见,即尚未发生之事,变为可见。当然,我们的视界并不完美,我们的预测失准在所难免,不过要是没数学,我们甚至连差劲的展望未来都不可能。

7. 不可见的宇宙

正如工业革命时代的社会燃烧煤炭以启动引擎,在今日信息时代,我们燃烧的主要原料是数学。在过去半个世纪内,随着数学的角色变得越来越重要,数学也越来越隐身在我们的视界之外,构成一个支撑我们的不可见的宇宙。正如我们的一举一动都受自然的不可之力(譬如重力),我们现代生活在一个由数学创造,并且由不可见的数学定理支配的不可见宇宙。现在的科学家们普遍地越来越接受和使用数学的思维方式来思考、解决问题。现在衡量一个国家的实力也往往看她消耗数学的能力多少。

综上所述,我们可以这样认为:数学是一种普遍的语言,数学语言具有准确、严谨、简洁、规范、通用性,是一种宇宙间彼此能够看懂的语言;数学是一种普遍的方法;数学是一种普遍的思想原理;数学是一种思想工具、理性思维的框架。

二、数学的定义

给数学下定义是困难的,事实上对任何事物下定义都会遇到同样的困难,因为很难在一个定义中把事物的一切重要属性都概括进去。由于数学的发展和个人对数学的理解,便有了对数学的不同的“定义”。

1. 古今名家的说法

恩格斯:“数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学。”

(美)R·柯朗(《数学是什么》):“数学,作为人类智慧的一种表达形式,反映生动活泼的意念,深入细致的思考,以及完美和谐的愿望,它的基础是逻辑和直觉,分析和推理,共性和个性。”

(法)E·波莱尔:“数学是我们确切知道我们在说什么,并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。”

(英)罗素:“数学是所有形如 p 蕴含 q 的命题的类”,而最前面的命题 p 是否对,却无法判断。因此“数学是我们永远不知道我们在说什么,也不知道我们说的是否对的一门学科。”

(中国)方延明:“数学是研究现实世界中数与形之间各种形式模型的结构的一门科学。”

(中国)徐利治:“数学是实在世界的最一般的量与空间形式的科学,同时又作为实在世界中最具有特殊性、实践性及多样性的量与空间形式的科学”。

2. 数学的几个“定义”

哲学说(亚里士多德):“新的思想家虽然说是为了其他事物而研究数学,但他们把数学和哲学看作是相同的。”

符号说(亚里士多德):“算术符号是文化的图形,而几何图形图像化的公式;没有一个数学家能缺少这些图像化的公式。”

科学说(高斯):“数学是精密的科学”“数学是科学的皇后”。

工具说(笛卡尔):“数学是其他所有知识工具的源泉。”

逻辑说(库尔):“数学推理依靠逻辑,数学为其证明所具有的逻辑性而骄傲。”

创新说(汉克尔):“在大多数科学里,一代人要推翻另一代人所修筑的东西,一代人所树立的另一代要加以摧毁。数学是一种创新,每一代人都能在旧的建筑上增添一层。”

直觉说(布劳维尔):“数学的基础是人的直觉,数学主要是由那些直觉能力强的人们推进的。”

集合说(克里奇):“数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述。”

结构说(关系说)(法国布尔巴基学派):“强调数学语言、符号的结构方面及联系方面,数学是研究抽象结构的理论。”

模型说(怀特海):“数学就是研究各种形式的模型,如微积分是物体运动的模型,概率论是偶然与必然现象的模型,欧氏几何是现实空间的模型,非欧几何是非欧空间的模型。”

活动说(波普尔):“数学是人类最重要的活动之一。”

精神说(克莱因):“数学不仅是一种技巧,更是一种精神,特别是理性的精神,能够使人的思维得以运用到最完美的程度。”

审美说(普罗克拉斯):“哪里有数学,哪里就有美。”

艺术说(波莱尔):“数学是一门艺术。”

万物皆数说(毕达哥拉斯):“数的规律是世界的根本规律,一切都可以归结为整数与整数比。”

定义说(怀特):“数学是定义的科学。”

语言说(迪里满):“数学是语言的语言。”

玄学说(汤姆生):“数学是真实的玄学体系。”

文化说(维尔德):“数学是一种不断进步的文化。”

符号加逻辑说(罗素):“数学是符号加逻辑。”

这些表述是否准确,是否被人们普遍认可,这可是仁者见仁智者见智了。

三、数学的特点

1. 抽象性

抽象:从许多事物中,舍弃个别的、非本质的属性,抽出共同的、本质的属性,是形成概念的必要手段。(《现代汉语词典》)

数学的抽象性是逐步提高的,其抽象程度大大超过了其他学科中的抽象。例如:初等代数、线性代数、抽象代数、微积分、拓扑学、实变函数、泛函分析,解决实际问题都需要建模,就是典型的数学抽象的过程。

任何一门学科都具有抽象性,只是数学的抽象另有特点:

第一,数学的研究对象本身就保留了量的关系和空间的形式,而舍弃其他一切。即研究内容是抽象的。

第二,在数学的抽象是经过一系列阶段而产生的,它达到的抽象程度大大超过其他学科的一般抽象。

第三,不仅数学概念抽象,数学方法本身也是抽象的。

第四,核心数学主要处理抽象概念和它们的相互关系。

“抽象”是数学的武器,是数学的优势。

2. 推理的严谨性和结论的明确性

严谨性是数学科学的基本特点。它要求数学结论的叙述必须精练、准确,而对结论的推理论证和系统安排都要求既严格,又周密。数学定义的准确性,结论的确定性是无可争辩和无可置疑的。

数学的严格性不是绝对的,一成不变的,数学的原则不是一劳永逸的、僵立不动的,它是发展着。如欧几里得的《几何原本》曾作为逻辑严密的典范,是人类历史上科学的杰作。但后来发现《几何原本》也有不完美的地方,如有些概念定义得不明确,基本命题还缺乏严密的逻辑根据,从而导致了“非欧几何”的产生和更严密的希尔伯特公理体系的建立,这正体现了人类认识逐渐深化的过程。

即使是一些最基本、最常用,甚至不能用逻辑方法加以定义的原始概念,数学科学也不满足于直观描述,而要求用公理来加以确定。对公理的选择,还必须满足“独立性”、“相容性”和“完备性”的严格要求。在新的数学结论的推证过程中,则步步要有根据,处处应合乎逻辑理论的要求。要数学内容的系统安排上,也必须符合学科内在的逻辑顺序。数学科学的严谨性,还有日

益加强的趋势。由于各种专门符号的广泛使用,大量命题的陈述和论证都日益符号化、形式化。

数学的严谨性并不是一下子形成的。在它达到当前高度严谨性以前,也有过一个相对来说不那么严谨的漫长历程。例如,作为全部数学的严格基础的数的系统理论,只是到了19世纪末期才达到当前的严谨程度。在此以前,它处于不太严谨、甚至是很不严谨的境况。

3. 应用的广泛性

数学是描述世界图式的强有力的工具,被誉为“科学的皇后”。数学规律不但自然界遵循,而且人类社会也遵循。数学不但在自然界中应用广泛,而且在人类社会中也应用广泛。无论哪里,都有数学活动的身影。我国著名数学家华罗庚曾说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在。”历史上哈雷彗星的发现、海王星的发现、电磁波的发现等等都离不开数学。

数学与科学技术一直以来的密切联系,在20世纪中叶以后更是达到了新的高度。第二次世界大战期间,数学在高速飞行、核武器设计、火炮控制、物资调运、密码破译和军事运筹等方面发挥了重大的作用,并涌现了一批新的应用数学学科。其后,随着电子计算机的迅速发展和普及,特别是数字化的发展,使数学的应用范围更为广阔,在几乎所有的学科和部门中得到了应用。数学技术已成为高技术中的一个极为重要的组成部分和思想宝库。另一方面,数学在向外渗透的过程中,与其他学科交叉,形成了诸如计算机科学、系统科学、模糊数学、智能计算(其中相当部分也被称为软计算)、智能信息处理、金融数学、生物数学、经济数学、数学生态学等一批新的交叉学科。

第二节 数学文化概述

长期以来,中国的数学教材、数学教育都存在着脱离社会的孤立现象,认为数学是单纯的逻辑思维,使得数学几乎完全形式化,使人错误地认为数学发展无需社会的推动,数学的进步也无需社会文化的哺育,数学只是少数天才脑子里想象出来的“自由创造物”。

也许人们已经意识到这种缺陷,近年来人们注重数学文化,研究数学文化,推广数学文化。

一、文化的含义

文化问题是随着19世纪下半叶人类学、社会学、文化学等学科的兴起才受到人们的重视。1871年泰勒在《原始文化》一书中提出了文化的经典定义:“所谓文化或文明,就是其广泛的民族学意义来说,乃是知识、信仰、艺术、道德、法律、习俗和任何人作为一名社会成员而获得的能力和习惯在内的复杂整体。”

现在的文化定义也上百种。《辞海》把“文化”界定为从广义上来说,是指人类社会历史实践过程中所创造的物质财富和精神财富的积淀,有相对的稳定性。从狭义上来说,指社会意识形态或观念形态,以及与之相适应的制度和组织机构,即人们的精神生活领域。

二、数学文化的含义

数学的内容、思想、方法和语言已成为文化的重要组成部分,而思想的观念,如推理、归纳、整体、抽象、审美等意识都具有精神领域的功效,它蕴涵着深厚的人文精神,具有特殊的文化内涵。

数学作为一种量化模式,显然是描述客观世界的,相对于认识的主体而言,数学具有明显的客观性,但数学对象终究不是物质世界的真实存在,而是抽象思维的产物,数学是一种人为约定的规则系统。为了描绘世界,数学家总是在发明新的描述形式。同时,数学家发明的量化模式,除了在科学技术方面的应用外,同样具有精神领域的效用。如平时所说的推理意识、规划意识、抽象意识、数学的审美意识。由此可见,数学是一种文化。

数学是一门自然科学,也是一种文化。但是数学文化不同于艺术、技术一类文化,数学属于科学文化的范畴。数学是人类文化系统中的一个子系统,是人类文化的一个有机组成部分,与其他各种成分密切相关,并在相互影响中共同发展。特别地,数学对象并非自然世界真实存在,而是抽象思维的产物,是一种人为约定的逻辑建构系统。因此,数学对象正是作为文化而存在,是一种文化,一种特殊的文化,称之为“数学文化”。

数学文化的提法与过去的“数学与文化”不同,“数学与文化”意味着数学和文化是两回事,数学是数学,文化是文化,重点是讨论他们的相互关系问题,而“数学文化”则强调的是数学与文化是一个有机整体,不能把他们分开来谈。

数学文化的解释也有广义和狭义之分。狭义的指数学的思想、精神、方法、观点、语言,以及它们的形成和发展。广义解释除上述内涵以外,还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的关系,等等。

数学是人类的一种创造性活动的结果,是人类抽象思维的产物,是人类历史的一种高层次的文化。数学文化作为人类文化的重要组成部分,其根本特征是表达了一种探索精神。

三、数学文化的特点

数学文化不同于艺术、技术一类的文化,它属于科学的文化。数学文化的主要特点是:

1. 思维性

数学研究的任务,主要是应用人类关于现实世界的空间显示和数量关系的思维成果。因此,思维是数学的灵魂。数学研究的核心是思维的研究,思维研究应贯穿整个研究之中。

2. 数量化

数量化是数学文化区别于其他文化的显著特点之一,也是区别个人是否具有数学素养的标尺之一。任何人都应具备运用数学的素养,其中包括具有运用数学的意识,有良好的信息感、数据感,以及数量化的基础知识和基本技能。数学中所研究的数量关系,包括寻求一个个可序化、可运算、可测度和可运筹的相对封闭的系统。这样的系统往往成为解决繁难问题的钥匙。由于数学的数量化特征,使得解决数学问题的方法有别于其他学科。

3. 发展性

数学家始终处于“寻找完美——打破完美——寻求新的完美”的循环之中,而每一个这样的循环,都使得数学得到了拓宽、加深、添元、增维等效益,大量的新的数学分支由此涌现出来并得到应用。“发展”是数学的本能,是数学家和应用数学的人们的欲望。由于数学的不断发展,数学才有了越来越强大的生命力。

4. 实用性

数学文化的最大魅力,就是它的实用性。它是人人必需,人人会用的一种工具。学习它就是为了应用它。它具备着有效、简洁、相容、互补,以及或可精确或可近似等诸多优良的秉性。

使得任何领域与数学都有一种我中有你，你中有我的水乳交融的关系。

5. 育人性

数学在培养人的思维能力、良好的个性和世界观方面，与人文科学和自然科学起着相辅相成的作用。

四、数学文化的价值

1. 数学——打开科学大门的钥匙

科学史表明，一些划时代的科学理论成就的出现，无一不借助于数学的力量。早在古代，希腊的毕达哥拉斯学派就把数看作万物之本源。享有“近代科学之父”尊称的伽利略认为，展现在我们眼前的宇宙像一本用数学语言写成的天书，如不掌握数学的符号语言，就像在黑暗的迷宫里游荡，什么也认识不清。物理学家伦琴因发现了 X 射线而成为 1901 年开始的诺贝尔物理学奖的第一位获得者。当有人问这位卓越的实验物理学家科学家需要什么样的修养时，他的回答是：第一是数学，第二是数学，第三还是数学。对计算机的发展做出过重大贡献的冯·诺依曼认为“数学处于人类智能的中心领域”。他还指出：“数学方法渗透并支配着一切自然科学的理论分支，它已愈来愈成为衡量成就的主要标志。”科学家们如此重视数学，他们述说的这些切身经验和坚定的信念，如果从哲学的层次来理解，其实就是说，任何事物都是量和质的统一体，都有自身的量的方面的不掌握量的规律，就不可能对各种事物的质获得明确清晰的认识。而数学正是一门研究“量”的科学，它不断地在和积累各种量的规律性，因而必然会成为人们认识世界的有力工具。

马克思曾明确指出：“一门科学只有当它达到了能够成功地运用数学时，才算真正发展了。”这是对数学作用的深刻理解，也是对科学化趋势的深刻预见。事实上，数学的应用越来越广泛，连一些过去认为与数学无缘的学科，如考古学、语言学、心理学等现在也都成为数学能够大显身手的领域。数学方法也在深刻地影响着历史学研究，能帮助历史学家做出更可靠、更令人信服的结论。这些情况使人们认为，人类智力活动中未受到数学的影响而大为改观的领域已寥寥无几了。

2. 数学——科学的语言

一般地说，就像对客观世界量的规律性的认识一样，人们对于其他各种自然规律的认识也并非是一种直接的、简单的反映，而是包括了一个在思想中“重新构造”相应研究对象的过程，以及由内在的思维构造向外部的“独立存在”的转化（在爱因斯坦看来，“构造性”和“思辨性”正是科学思想的本质的思想）；就现代的理论研究而言，这种相对独立的“研究对象”的构造则又往往是借助于数学语言得以完成的（数学与一般自然科学的认识活动的区别之一就在于：数学对象是一种“逻辑结构”，一般的“科学对象”则可以说是一种“数学建构”），显然，这也就更为清楚地表明了数学的语言性质。

数学作为一种符号语言，它可以摆脱自然语言的多义性。数学语言的简洁性有助于思维效率的提高；数学语言也便于量的比较和分析；可以探讨自然法则的更深层面，这是其他语言不可能做到的。还表现在它能以其特有的语言（概念、公式、法则、定理、方程、模型、理论等）对科学真理进行精确和简洁的表述。如著名物理学家、数学家麦克斯韦的麦克斯韦方程组，预见电磁波的存在，推断出电磁波速度等于光速，并断言光就是一种电磁波。这样，麦克斯韦创

立了系统的电磁理论,把光、电、磁统一起来,实现了物理学上重大的理论结合和飞跃。

随着社会的数学化程度日益提高,数学语言已成为人类社会中和交流、贮存信息的重要手段。如果说,从前在人们的社会生活中,在商业交往中,运用初等数学就够了,而高等数学一般被认为是科学研究人员所使用的一种高深的科学语言,那么在今天的社会生活中,只懂得初等数学就会感到远远不够用了。事实上,高等数学(如微积分、线性代数)的一些概念、语言正在越来越多地渗透到现代社会生活各个方面的各种信息系统中,而现代数学的一些新的概念(如算子、泛函、拓扑、张量、流形等)则开始大量涌现在科学技术文献中,日渐发展成为现代的科学语言。

3. 数学——思维的工具

数学是任何人分析问题和解决问题的思想工具。这是因为:首先,数学具有运用抽象思维去把握实在的能力。数学概念是以极度抽象的形式出现的。在现代数学中,作为数学的研究对象,它们本身确是一种思想的创造物。与此同时,数学的研究方法也是抽象的,这就是说数学命题的真理性不能建立在经验之上,而必须依赖于演绎证明。而数学应用于实际问题的研究,其关键还在于能建立一个较好的数学模型。建立数学模型的过程,是一个科学抽象的过程,即善于把问题中的次要因素、次要关系、次要过程先撇在一边,抽出主要因素、主要关系、主要过程,经过一个合理的简化步骤,找出所要研究的问题与某种数学结构的对应关系,使这个实际问题转化为数学问题。在一个较好的数学模型上展开数学的推导和计算,以形成对问题的认识、判断和预测。这就是运用抽象思维去把握现实的力量所在。

其次,数学赋予科学知识以逻辑的严密性和结论的可靠性,是使认识从感性阶段发展到理性阶段,并使理性认识进一步深化的重要手段。在数学中,每一个公式、定理都要严格地从逻辑上加以证明以后才能够确立。数学的推理步骤严格地遵守形式逻辑法则,以保证从前提到结论的推导过程中,每一个步骤都在逻辑上准确无误。所以运用数学方法从已知的关系推求未知的关系时,所得结论有逻辑上的确定性和可靠性。

第三,数学也是辩证的辅助工具和表现方式。这是恩格斯对数学的认识功能的一个重要论断。在数学中充满着辩证法,而且有自己特殊的表现方式,即用特殊的符号语言,简明的数学公式,明确地表达出各种辩证的关系和转化。

最后,值得指出的是,数学还是思维的体操。这种思维操练,确实能够增强思维本领,提高科学抽象能力、逻辑推理能力和辩证思维能力。

4. 数学——一种思想方法

数学是研究量的科学。它研究客观对象量的变化、关系等,并在提炼量的规律性的基础上形成各种有关量的推导和演算的方法。数学的思想方法体现着它作为一般方法论的特征和性质,是物质世界质与量的统一、内容与形式的统一的最有效的表现方式。这些表现方式主要有:提供数量分析和计算工具、提供推理工具、建立数学模型。任何一种数学方法的具体运用,首先必须将研究对象数量化,进行数量分析、测量和计算。例如,太阳系第八大行星——海王星的发现,就是由亚当斯和勒维烈运用万有引力定律,通过复杂的数量分析和计算,在尚未观察到海王星的情况下推理并预见其存在的。

数学作为推理工具的作用是巨大的。特别是对由于技术条件限制暂时难以观测的感性经验以外的客观世界,推理更有其独到的功效,例如正电子的预言,就是由英国理论物理学家狄拉克根据逻辑推理而得出的。后来由宇宙射线观测实验证实了这一论断。

5. 数学——理性的艺术

通常人们认为,艺术与数学是人类所创造的风格与本质都迥然不同的两类文化产品。两者一个处于高度理性化的巅峰,另一个居于情感世界的中心;一个是科学(自然科学)的典范,另一个是美学构筑的杰作。然而,在种种表面无关甚至完全不同的现象背后,隐匿着艺术与数学极其丰富的普遍意义。

数学与艺术确实有许多相通和共同之处,例如数学和艺术,特别是音乐中的五线谱,绘画中的线条结构等,都是用抽象的符号语言来表达内容。难怪有人说,数学是理性的音乐,音乐是感性的数学。事实上,由于数学(特别是现代数学)的研究对象在很大程度上可以被看成“思维的自由想象和创造”,因此,美学的因素在数学的研究中占有特别重要的地位,以致在一定程度上数学可被看成一种艺术。对此,我们还可做出如下进一步的分析。

艺术与数学都是描绘世界图式的有力工具。艺术与数学作为人类文明发展的产物,是人类认识世界的一种有力手段。在艺术创造与数学创造中凝聚着人类美好的理想和实现这种理想的孜孜追求。尽管艺术家与数学家使用着不同的工具,有着不同的方式,但他们工作的基本的目的都是为了描绘一幅尽可能简化的“世界图式”。艺术实践与数学活动的动机、过程、方法与结果,都是在其自身价值的弘扬中,不断地实现着对世界图式的有力刻画。这种价值就是在充分、完全地理解现实世界的基础上,审美地掌握世界。

艺术与数学都是通用的理想化的世界语言。艺术与数学在描绘世界图式的过程中,还同时发展并完善自身的表现形式,这种表现形式最基本的载体便是艺术与数学各自独特的语言体系。其共同特征有:

(1)跨文化性。艺术与数学所表达的是一种带有普遍意义的人类共同的心声,因而它们可以超越时间和地域界限,实现不同文化群体之间的广泛传播和交流。

(2)整体性。艺术语言的整体性来自于其艺术表现的普遍性和广泛性;数学语言的整体性来自于数学统一的符号体系、各个分支之间的有力联系、共同的逻辑规则和约定俗成的阐述方式。

(3)简约性。它首先表现为很高的抽象程度,其次是凝冻与浓缩。

(4)象征性。艺术与数学语言各自的象征性可以诱发某种强烈的情感体验,唤起某种美的感受,而意义则在于把注意力引向思维,升迁为理念,成为表现人类内心意图的方式。

(5)形式化。在艺术与数学各自进行的代码与信息意义交换中,其共同的特征就是达到了实体与形式的分隔。这样提炼出来的形式可以进行形式化处理。

艺术与数学具有普适的精神价值。有人把精神价值划分为知识价值、道德价值和审美价值三种。艺术与数学同时具备这三种价值,这一事实赋予了艺术与数学精神价值以普适性。概括起来,其共同的特点有:

(1)自律性。数学价值的自律性是与其客观性相联系的;艺术的价值也是不能由民主选举和个人好恶来衡量的。艺术与数学的价值基本上是在自身框架内被鉴别、鉴赏和评价的。

(2)超越性。它们可以超越时空,显示出永恒。在艺术与数学的价值超越过程中,现实被扩张、被延伸。人被重新塑造,赋予理想。艺术与数学的超越性还表现为超前的价值。

(3)非功利性。艺术与数学的非功利性是其价值判断有别于其他种类文化与科学的显著特征之一。

(4)多样化、物化与泛化。在现代技术与商业化的冲击下,艺术与数学的价值也开始发生嬗变,出现了各自价值在许多领域内的散射、渗透、应用、交叉等现象。

在人类思维的全谱系中,艺术思维和数学思维的主要特征决定了其主导思维各居于谱系的两端。但两种思维又有很多交叉、重叠和复合。特别是真正的艺术品和数学创造,一般都不是某种单一思维形式的产物,而是多种思维形式综合作用的结果。人类思维之翼在艺术思维与数学思维形成的巨大张力之间展开了无穷的翱翔,并在人类思维的自然延拓和形式构造中被编织得浑然一体,呈现出整体多样性的统一。人类思维谱系不是线性的,而是主体的、网络式的、多层多维的复合体。当我们想要探索人类思维的奥秘时,艺术思维与数学思维能够提供最典型的范本。其中能够找到包括人类原始思维直至人工智能这样高级思维在内的全部思维素材。

6. 数学——充满理性精神

数学犹如一棵正在成长着的大树,它是不断发展和丰富着的理论知识体系。数学充满着理性精神,它不断为人们提供新概念、新方法。有的数学家说:“数学在人类历史中的地位绝不亚于语言、艺术和宗教,今天数学正对科学和社会产生着翻天覆地的影响。”数学对于人类理性精神发展有着特殊的意义,这也清楚地说明数学作为整个人类文化的一个有机组成成分的重要性。正如克莱因指出的:“在最广泛的意义上说,数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生产;试图回答有关人类自身存在提出的问题;努力去理解和控制自然;尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。”

五、数学文化教育的作用

和所有的文化现象一样,数学文化直接支配着人们的行为、影响着人们的思想。

1. 数学文化教育可以还原数学的“本来面目”

数学具有三种形态:原始形态、学术形态和教育形态。前两者形态强调数学的思考、严密推理,把数学的“本来面目”淹没在形式化的海洋里。教育形态则是教师启发学生进行火热的思考,从而让学生容易理解并接受人类数千年积累的数学知识体系。数学课程多以学术形态出现,学生看到的是干巴、冰冷、孤立的定义、定理、公式等。很容易让学生失去学习的兴趣、丧失思考能力。其实每一个数学概念背后都有一部“活生生的历史”,数学的原始形态。数学文化教育则是在数学的教育形态和原始形态之间寻求“中间地带”,还原数学“本来面目”的内涵,包括数学知识的内在联系、数学规律的形成过程、数学思想方法的提炼、数学理性精神的体验等。

2. 数学文化教育能促使学生全面发展

教育的根本目的就是培养现代化的人,在常规的数学教育中只重视学生的智能,忽视学生的情意,而数学文化教育弥补了智能与情意的分离,有效地促进学生的全面发展。数学不仅仅是一种重要的“工具”或“方法”,更是一种思维模式、素质、文化。若能让学生了解数学活动的“原过程”,即数学的本来面目,清楚数学概念、原理、方法的发展势态,掌握数学中蕴涵的思想、观念、意识等内容,就可以培养他们利用数学的思想和方法去处理数学问题和现实问题的意识,培养他们实事求是的科学态度,勇于创新的科学精神和良好的学习习惯。

数学中解决难题的训练,会培养他们不怕失败,百折不挠的奋斗精神;数学家发现定理和理论的故事,会启发他们勇于探索的创新精神;所以这些都与他们从数学中获得的数学文化、数学素养息息相关,这些优良品质将会让他们受用终生。

另外通过数学文化教育呈现数学创造的曲折艰辛的过程,还可以让学生知道其中的可歌可泣的事件和人物,如中国古代的刘徽、无薪水的女数学家诺特、铁窗数学家彭色列等。这些

揭示了人类为求数学的“真”而不断奋斗的曲折过程,从而充分体验数学家的优良的精神品质和数学内容中所折射出的一些社会优秀品德。

总之,数学文化从个体上来说,更应关心学习数学对人的发展以及人格的完善。

第三节 数学发展简史

乔治·萨顿曾说过:“科学史是人类认识自然的经验的历史回顾。”数学史是数学发展历史的回顾,它研究数学产生发展的历史过程,探求其发展的规律。研究数学史,可以通过历史留下的丰富材料,了解数学何时兴旺发达,何时停滞衰退,从中总结经验教训,以利于数学更进一步的发展。关于数学发展史的分期,一般来说,可以按照数学本身由低级到高级分阶段进行,也就是分成四个本质不同的发展时期,每一新时期的开始都以卓越的科学成就作标志,这些成就确定了数学向本质上崭新的状态过渡。这里我们主要介绍世界数学史的发展。

一、数学的萌芽时期

这一时期大体上从远古到公元前六世纪,根据目前考古学的成果,可以追溯到几十万年以前。这一时期可以分为两段,一是史前时期,从几十万年前到公元前大约五千年;二是从公元前五千年到公元前六世纪。

数学萌芽时期的特点,是人类在长期的生产实践中,逐步形成了数的概念,并初步掌握了数的运算方法,积累了一些数学知识。由于土地丈量和天文观测的需要,几何知识初步兴起,但是这些知识是片断和零碎的,缺乏逻辑因素,基本上看不到命题的证明。这个时期的数学还未形成演绎的科学。

历史学家常把兴起于埃及、美索不达米亚、中国和印度等地域的古代文明称为河谷文明。早期数学就是在尼罗河、底格里斯河与幼发拉底河、黄河与长江、印度河与恒河等河谷地带首先发展起来的。

1. 古代埃及的数学

古埃及是世界上文化发达最早的几个地区之一,位于尼罗河两岸,公元前 3200 年左右,形成一个统一的国家。尼罗河是埃及人生命的源泉,他们靠耕种河水泛滥后淤土覆盖的田地谋生。尼罗河定期泛滥,淹没全部谷地,水退后,要重新丈量居民的耕地面积。由于这种需要,多年积累起来的测地知识便逐渐发展成为几何学。由于他们也得准备好应付洪水的危害,因此就得预报洪水到来的日期。这就需要计算。

埃及人还把他们的天文知识和几何知识结合起来用于建造他们的神庙,使一年里某几天的阳光能以特定方式照射到庙宇里。公元前 2900 年以后,埃及人建造了许多金字塔,作为法老的坟墓。从金字塔的结构,可知当时埃及人已懂得不少天文和几何的知识。例如基底直角的误差与底面正方形两边同正北的偏差都非常小。

埃及人创造了连续 3000 多年的辉煌历史,建立了国家,有了相当发达的农业和手工业,发明了铜器、创造了文字、掌握了较高的天文学和几何学知识,建造了巍峨宏伟的神庙和金字塔。

吉萨金字塔(公元前 2600 年),它显示了埃及人极其精确的测量能力,其中它的边长和高度的比例约为圆周率的一半。

古埃及最重要的传世数学文献:纸草书,是来自现实生活的数学问题集。